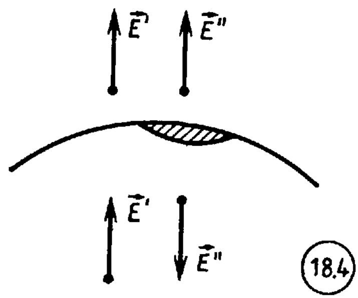


Однако для расчета силы, действующей на некоторую малую площадку поверхности проводника, нужно знать не эту величину, а напряженность поля $\vec{E}'$, созданного всеми зарядами, за вычетом заряда данной площадки. Применим следующий прием: мысленно вырежем некоторую площадку (рис. 18.4) вместе с зарядом на ней и исключим действие ее заряда на поле. Тогда в данном месте при переходе границы тела скачка напряженности не будет: напряженность $\vec{E}'$ окажется непрерывной величиной. Пусть площадка создает поле напряженностью $\vec{E}''$, как показано на рисунке. Внутри проводника $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = 0$, т. е. $\vec{E}'' = -\vec{E}'$; следовательно, при наличии площадки снаружи тела $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' = 2\vec{E}'$, а $\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{2}$.

Вычислим элементарную силу, действующую на площадку dS:

$$d\vec{F} = \vec{E}'\sigma dS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}dS.$$

Для плотности силы имеем выражение

$$\vec{f}_{\text{пов}} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}\vec{n}. \qquad (18.18)$$

Его можно преобразовать, принимая в расчет формулу (18.3). Получаем

$$f_{\text{пов}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \qquad (18.19)$$

т. е. модуль плотности силы равен плотности энергии поля у поверхности проводника.

Методические указания и рекомендации

I. Электростатическое поле является наиболее подробно изучаемым из всей электродинамики объектом в курсе средней школы и в курсе общей физики. Для него вводятся основные характеристики – напряженность и потенциал, рассматривается теорема Гаусса и т. д. Кроме того, анализируется явление поляризации, электростатической индукции.

В нашем курсе задача электростатики по нахождению поля системы заряженных тел оказалась основной; электростатическое поле как таковое рассматривается как частный случай проявления электромагнитного поля, явление и закономерности поляризации вещества изложены в предыдущей главе. В то же время рамки курса не позволяют вникать в подробности и различные частные методы решения множества электростатических задач.

II. При изучении главы рекомендуется сосредоточить внимание на особенностях поля в веществе, на разборе примеров по расчету поля. Самостоятельная работа может быть организована как решение задач из упражнений к главе и имеющихся задачников по теоретической физике, например [5–6].

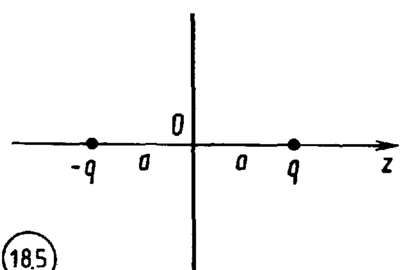
Упражнения

1. Вычислить энергию поля, созданного в однородном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью ε шаром радиусом a, равномерно заряженным с плотностью ϱ.

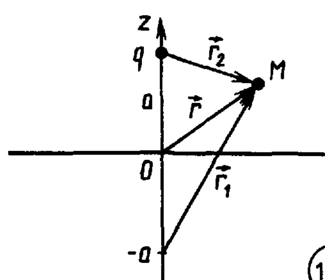
Ответ: $W = \dfrac{3kQ^2}{5a\varepsilon}$, где Q – заряд шара.

2. Точечный заряд q находится на расстоянии a от бесконечного проводника, занимающего левое полупространство. Определить поле в правом полупространстве и плотность наведенных на проводнике зарядов.

Поверхность проводника в искомом поле является эквипотенциальной поверхностью. Любая плоскость будет эквипотенциальной поверхностью, если симметрично относительно нее расположить два заряда q и $-q$ (в отсутствие проводника). Положение данного заряда q и граничное условие на поверхности проводника однозначно определяют поле в правом полупространстве. Это означает, что проводник с наведенным поверхностным зарядом создает такое же поле в правом полупространстве, что и точечный заряд величиной $-q$, расположенный в точке, где находилось бы изображение заряда q, если бы поверхность проводника была зеркальной (рис. 18.5). На этом



18.5



18.6

основан метод «изображений». Устраняя проводник, поместим в точку (0, 0, $-a$) заряд величиной $-q$. Введем цилиндрическую систему координат с осью Oz, проходящей через оба заряда.

При $z \geq 0$

$$\varphi(r, z) = \frac{kq}{\sqrt{r^2 + (a-z)^2}} - \frac{kq}{\sqrt{r^2 + (a+z)^2}},$$

тогда

$$E_z = -\left\{\frac{kq(a-z)}{(r^2 + z^2 + a^2 - 2za)^{3/2}} + \frac{kq(a+z)}{(r^2 + z^2 + a^2 + 2za)^{3/2}}\right\}.$$

Вычисляя E_z на поверхности, определяем и плотность зарядов.

Ответ: $\sigma = -\dfrac{2\varepsilon_0 kqa}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$.

3. Определить силу, с которой точечный заряд q притягивается к бесконечной проводящей поверхности (см. задачу 2).

Ответ: $F = \dfrac{kq^2}{4a^2}$.

4. Точечный заряд находится в вакууме на расстоянии a от плоской поверхности однородного диэлектрика, заполняющего все нижнее полупространство. Показать, что поле описывается выражениями:

$$\varphi_2(\vec{r}) = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r_1}\right), \quad (z \geq 0); \tag{1}$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{2kq}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r_2}, \quad (z \leq 0), \tag{2}$$

где r_2 и r_1 — расстояния до точки $M(\vec{r})$ от точек (0, 0, a) и (0, 0, $-a$) (рис. 18.6).

Указание. Потенциалы являются решениями уравнений

$$\Delta\varphi_2 = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (z \geq 0),$$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad (z \leq 0),$$

где вектор $\vec{r}_0$ имеет проекции (0, 0, a).

С помощью формулы (см. П. II, 2) вычисляем градиенты φ_2 и φ_1 в цилиндрических координатах ϱ, α, z:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho} = -kq\varrho\left(\frac{1}{r_2^{3/2}} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{1}{r_1^{3/2}}\right), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho} = -\frac{2kq}{\varepsilon + 1}\frac{\varrho}{r_2^{3/2}};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = kq\left(\frac{a - z}{r_2^{3/2}} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{a + z}{r_1^{3/2}}\right), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{2kq}{\varepsilon + 1}\frac{a - z}{r_2^{3/2}}.$$

На граничной поверхности ($z = 0$) выполняются равенства

$$\varphi_1 = \varphi_2, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho}, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

обеспечивающие выполнение соответствующих граничных условий.

5. Найти емкость плоского конденсатора, у которого промежуток между пластинами заполнен разнородными диэлектриками ε_1 и ε_2. Толщина слоев соответственно d_1 и d_2.

Так как $D = \sigma$, а $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}$, $E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = E_1 d_1 + E_2 d_2$, то $\sigma \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} \right) C = \sigma S$, откуда $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$.

6. Найти емкость плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов, заполненных однородным диэлектриком.

1) Так как поле бесконечной плоскости определяется формулой $E = \frac{2\pi k \sigma}{\varepsilon}$, то для однородного поля плоского конденсатора имеем

$$E = \frac{4\pi k \sigma}{\varepsilon} = \frac{4\pi k Q}{\varepsilon S},$$

отсюда разность потенциалов между обкладками равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi k Q d}{\varepsilon S},$$

а емкость найдется по формуле (18.10):

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}.$$

2) С помощью теоремы Гаусса находим напряженность поля между обкладками. Она определяется зарядом внутренней обкладки:

$$E = \frac{Q}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 r l},$$

где l – длина цилиндра. Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr = -\frac{2kQ}{\varepsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

и

$$C = \frac{\varepsilon l}{2k \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

3) Тем же способом получим

$$C = 4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{k (R_2 - R_1)}.$$