

$C_2 e^{-ik_x x}$ . Отсюда видно, что исходное уравнение (3.16) допускает частные решения вида

$$\varphi = C e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = C e^{i\vec{k}\vec{r}}.$$

Здесь  $\vec{k}$  — постоянный вектор.

Введем другую сохраняющуюся величину — вектор импульса  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ . В таком случае решение

$$\varphi(x, y, z) = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}\vec{r}} \quad (3.21)$$

описывает частицу с импульсом  $\vec{p}$  и энергией  $E$ . Связь энергии и импульса дается формулой (3.16). Как и в классической механике,  $E = \frac{p^2}{2m}$ .

Если учесть временной множитель (3.6), то получим полную функцию состояния:

$$\varphi(x, y, z, t) = C e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = C e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}. \quad (3.22)$$

Это плоская монохроматическая волна, которая совпадает с волной де Бройля (1.15). Такое совпадение, конечно, не случайно, поскольку при разработке квантовой механики с самого начала использовалась гипотеза де Бройля.

Плотность вероятности для координат частицы при свободном движении равна:  $w = |C|^2$ , т. е. имеется равная вероятность обнаружить частицу в любой точке пространства.

Особенность волновой функции (3.22): для нее не выполняется условие нормировки (2.5). В данном случае

$$\int |\varphi|^3 dV = \infty.$$

Физически это может быть вызвано тем, что абсолютно свободных частиц не существует в природе. Поэтому понятие о свободном движении — некоторая идеализация реального положения дел, допустимая потому, что всегда возможны состояния, весьма близкие к свободному.

В принципе мы могли бы записать функции состояния для «почти свободного движения» и пользоваться только ими. Однако математически проще применение функций (3.22). Разработаны такие способы их использования в квантовой механике, которые позволяют избежать ошибок и обойти возникающие математические трудности. В частности, применяются специальные условия нормировки. Один из возможных методов описан ниже, другой указан в формуле (7.2).

**Пример 3.2. Вычисление плотности потока вероятности.**

Вычислим с помощью формул (3.22) и (3.15) плотность потока вероятности для свободной частицы:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} |C|^2 \text{grad}(\vec{k}\vec{r}) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |C|^2 = \frac{\vec{p}}{m} |C|^2. \quad (3.23)$$

Постоянную  $C$  подберем так, чтобы значение  $\vec{j}$  было равно числу частиц, пересекающих за единицу времени единичную площадку, перпендикулярную вектору  $\vec{k}$ . Плотность потока равна  $n\vec{v}$ , где  $\vec{v}$  — скорость, а  $n$  — концентрация частиц. Полагая  $\vec{j} = n\vec{v}$ , имеем  $|C|^2 = n$ .

## § 4. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

**4.1. Состояния с неопределенным значением импульса.** Волновая функция (3.21) описывает состояния свободно движущейся

частицы, в которых не имеют определенных значений координаты частицы. Существуют состояния, в которых нет определенных значений других физических величин, например импульса или его отдельных проекций, энергии, момента импульса и т. д. Сейчас речь пойдет об импульсе частицы. К изучению состояний с неопределенным значением импульса проще всего подойти на основе принципа суперпозиции.

Волновая функция  $\varphi = Ce^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}}$  описывает состояние с заданным значением импульса  $\vec{p}$ . Для упрощения следующих выкладок направим ось  $Ox$  параллельно вектору  $\vec{p}$ . Функция  $\varphi = Ce^{\pm \frac{i}{\hbar}px}$  описывает движение с импульсом, направленным по оси  $Ox$ , при знаке плюс, и с импульсом, направленным против оси  $Ox$ , при знаке минус в показателе экспоненты.

Волновая функция

$$\psi(x) = C_1 e^{\frac{i}{\hbar}p_1 x} + C_2 e^{\frac{i}{\hbar}p_2 x} \quad (4.1)$$

по принципу суперпозиции состояний также соответствует некоторому реально осуществимому состоянию частицы. Для этого состояния характерно, что изучаемому микрообъекту уже нельзя приписать определенного значения импульса. В соответствии с принципом суперпозиции в состоянии (4.1) при измерении импульса получаются два конкретных значения:  $p_1$  и  $p_2$ . Причем число случаев, когда наблюдается импульс  $p_1$ , относится к числу случаев, когда наблюдается импульс  $p_2$ , как  $|C_1|^2$  к  $|C_2|^2$ .

Полученные результаты имеют общий характер, т. е. и другие величины в некоторых состояниях не имеют определенных значений. Далее после изучения математического аппарата квантовой механики будет видно, что существуют методы, которые позволяют предсказать, какие значения некоторой физической величины и с какой вероятностью наблюдаются на опыте при заданном состоянии микрочастицы.

Большие трудности возникают в связи с попытками дать наглядное физическое толкование функциям типа (4.1). Если представить частицу в виде корпускулы, то непонятно, как может она двигаться в одном состоянии с импульсом  $p_1$  и с импульсом  $p_2$ . И волновые представления тоже не сразу проясняют ситуацию: материальное волновое поле всегда имеет вполне определенный суммарный импульс. Наглядное толкование возможно, если в квантовом состоянии, описываемом волновой функцией (4.1), находятся много частиц. Тогда два слагаемых в выражении (4.1) сопоставляются двум разным потокам частиц.

Нужно привыкнуть к тому, что квантовым объектам нельзя в общем случае сопоставить наглядные представления. Причина, как уже говорилось, в следующем: любые наглядные образы имеют макроскопический классический характер. Их применение в микромире ограничено. И если мы хотим их использовать, то необходимо знать границы применимости классических представлений.

**4.2. Волновой пакет.** Мы видели, что с помощью функции состояния для частицы во всех случаях нельзя указать однозначно ее положение в пространстве. Пример со свободной частицей показывает, что при определенном импульсе координата частицы может

быть вообще любой. Поставим сейчас задачу по отысканию волновой функции такого состояния частицы, в котором и координата, и импульс ее находились бы в возможно более узких интервалах — иными словами, приближались бы к некоторым определенным значениям. Для этого найдем такую функцию состояния, которая была бы отлична от нуля в малой области пространства. Для простоты будем рассматривать состояния частицы, движущейся вдоль оси  $Ox$ . Искомую функцию можно получить, составив линейную суперпозицию волновых функций (3.22), отвечающих состояниям с определенными импульсами.

Для одномерного движения с импульсом  $p$  и энергией  $E(p)$  волновая функция имеет вид

$$\psi_p(x, t) = C_p e^{\frac{i}{\hbar} [px - E(p)t]} \quad (4.2)$$

Возьмем набор функций (4.2) с импульсом, изменяющимся непрерывно в интервале от  $p_0 - \Delta p$  до  $p_0 + \Delta p$ . Их линейная комбинация записывается в виде интеграла:

$$\psi(x, t) = \int_{p_0 - \Delta p}^{p_0 + \Delta p} C(p) e^{\frac{i}{\hbar} [px - E(p)t]} dp \quad (4.3)$$

Такое волновое поле часто называют *группой волн* или *волновым пакетом*.

Исследуем вид функции состояния (4.3), для чего произведем приближенное вычисление интеграла в формуле (4.3). Если интервал  $\Delta p$  достаточно мал, то можно считать

$$C(p) \approx C(p_0) = C_0 \quad (4.4)$$

и

$$E(p) \approx E(p_0) + \left( \frac{dE}{dp} \right)_0 (p - p_0) = E_0 + v_0 \eta, \quad (4.5)$$

где

$$\eta = p - p_0, \quad v_0 = \left( \frac{dE}{dp} \right)_0, \quad E_0 = E(p_0). \quad (4.6)$$

После подстановки выражений (4.4) ... (4.6) в соотношение (4.3) получаем

$$\psi(x, t) \approx C_0 e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 x - E_0 t)} \int_{-\Delta p}^{\Delta p} e^{\frac{i}{\hbar} (x - v_0 t) \eta} d\eta.$$

В последней формуле берется интеграл от экспоненты:

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta p}^{\Delta p} e^{\frac{i}{\hbar} (x - v_0 t) \eta} d\eta &= \frac{\hbar}{i(x - v_0 t)} \left[ e^{\frac{i}{\hbar} (x - v_0 t) \Delta p} - e^{-\frac{i}{\hbar} (x - v_0 t) \Delta p} \right] = \\ &= \frac{2\hbar}{x - v_0 t} \sin \frac{\Delta p}{\hbar} (x - v_0 t). \end{aligned}$$

Тогда

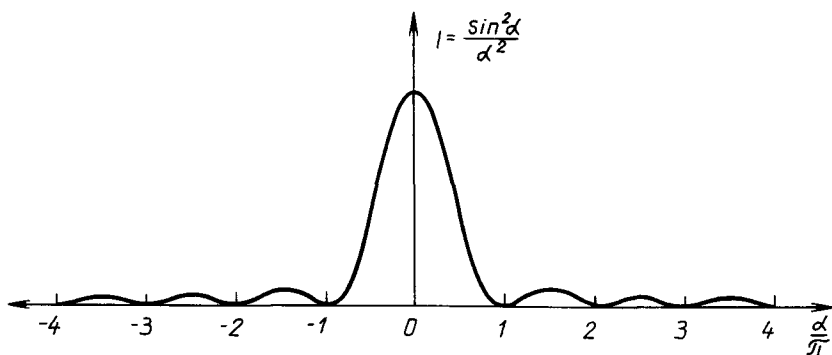


Рис. 4.1.

$$\psi(x, t) \approx 2C_0 \Delta p \frac{\sin \frac{\Delta p}{\hbar}(x - v_0 t)}{\frac{\Delta p}{\hbar}(x - v_0 t)} e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 x - E_0 t)}$$

Нас интересует, где находится частица. Плотность вероятности для координаты  $x$  определяется формулой

$$w(x) = |\psi|^2 = 4C_0^2 (\Delta p)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2},$$

где

$$\alpha = \frac{\Delta p}{\hbar}(x - v_0 t).$$

График функции  $I = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$  дан на рисунке 4.1. Эта функция заметно отличается от нуля лишь в интервале от  $-\pi$  до  $\pi$ . Вне указанного отрезка ее значения могут быть приравнены нулю. Поэтому частица с подавляющей вероятностью обнаруживается на участке оси  $Ox$  между точками  $x_1$  и  $x_2$ . Границы участка находятся из равенств

$$\pi = (x_2 - v_0 t) \frac{\Delta p}{\hbar}, \quad -\pi = (x_1 - v_0 t) \frac{\Delta p}{\hbar}.$$

Отсюда определяется длина участка:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi \hbar}{\Delta p}. \quad (4.7)$$

Итак, волновой пакет вследствие интерференции отдельных составляющих группы волн оказывается сосредоточенным в области пространства протяженностью  $\Delta x$ . Он не стоит на месте. Точке с максимальной интенсивностью волнового поля соответствует значение  $\alpha = 0$ . Ее координата  $x$  изменяется по закону  $x = v_0 t$ . Это означает, что центр пакета равномерно перемещается вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v_0$ . Параметр  $v_0$  называется групповой скоростью. Это скорость движения волнового пакета как единого целого. Для

нерелятивистских частиц  $E = \frac{p^2}{2m}$  и  $v_0 = \frac{p_0}{m}$ , т. е. совпадает со скоростью движения классической частицы (с импульсом  $p_0$ ).

Сказанное позволяет сделать вывод о допустимости рассмотрения микрочастицы как материальной точки, если координата ее определяется с точностью до  $\Delta x$ , а импульс — с точностью до  $\Delta p$  (но и при таких условиях корпускулярные представления не вполне адекватны действительности — см. § 4, п. 3).

**4.3. Соотношения неопределенностей Гейзенберга.** Границы пакета можно считать более широкими, нежели это указано в выражении (4.7). Если учесть дополнительные максимумы функции  $I(\alpha)$ , то для граничных точек имеем неравенства  $\alpha_2 \geq \pi$ ,  $\alpha_1 \leq -\pi$ , или

$$\frac{\Delta p}{\hbar}(x_2 - v_0 t) \geq \pi, \quad \frac{\Delta p}{\hbar}(x_1 - v_0 t) \leq -\pi.$$

Тогда

$$\Delta x \Delta p \geq 2\pi\hbar.$$

Если проанализировать трехмерное движение частицы, то получим три неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq 2\pi\hbar, \\ \Delta y \Delta p_y &\geq 2\pi\hbar, \\ \Delta z \Delta p_z &\geq 2\pi\hbar. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Эти выражения носят название *соотношений неопределенностей* для координат и импульса, или *неравенств Гейзенберга*. Впервые неравенства (4.8) были получены Гейзенбергом в 1927 г.; они сыграли исключительно важную роль в интерпретации выводов квантовой механики. (В ней математический аппарат сложился ранее понимания физической сущности явлений.)

Физический смысл соотношений неопределенностей Гейзенберга состоит в том, что эти неравенства указывают пределы применимости классических представлений о микрочастицах как о материальных точках, движущихся по определенной траектории и имеющих в каждый момент времени определенные значения координат, определенные величину и направление вектора импульса (или скорости).

Неравенства (4.8) указывают, что в природе не существует таких состояний микрообъектов, в которых имелись бы одновременно точные значения координат и вектора импульса. Чем точнее задается положение частицы, тем более широкий набор импульсов должен быть в группе монохроматических волн, составляющих ее  $\psi$ -функцию. Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta p_x \rightarrow \infty$ . Следовательно, исчезают основания для утверждения о том, что импульс частицы определен, ибо он может оказаться любым числом. И наоборот, если точно определен импульс:  $\Delta p_x = 0$ , т. е. состояние задано одной волной

де Бройля:  $\psi = C_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 x - E_0 t)}$ , то полностью отсутствует информация о месте нахождения частицы ( $\Delta x$  обращается в бесконечность, так как  $\Delta p_x$  равно нулю). Имеется равная вероятность обнаружить частицу в любой точке оси  $Ox$ .

Из проведенного анализа соотношений (4.8) вытекает важное следствие о *принципиальной невозможности* точно указать траекторию движения частицы.

Соотношения неопределенностей дают критерий разграничения классической и квантово-механической областей и в то же время указывают на соответствие и взаимные переходы между ними. Если неопределенности для координат и проекций импульса, вытекающие из неравенств Гейзенберга, меньше погрешностей измерения этих величин, то мы воспринимаем объект как точечный и движущийся по некоторой траектории в пространстве.

**Пример 4.1. Треки микрочастиц в камере Вильсона.**

Ширина трека порядка  $10^{-4}$  см. Если считать  $\Delta x \approx 10^{-4}$  см, то неопределенность для импульса имеет порядок величины  $\Delta p_x \approx \frac{2\pi\hbar}{\Delta x} \approx 6 \cdot 10^{-28}$  кг·м/с. Для электрона, движущегося со скоростью, близкой к скорости света, импульс равен:  $p = mc = 3 \cdot 10^{-22}$  кг·м/с. Поскольку  $\Delta p_x \ll p$  импульс можно считать заданным практически точно. Но трек не является траекторией движения микрочастицы в силу своей размытости.

**Пример 4.2. Соотношение неопределенностей в классической области.**

Для макроскопических тел импульс всегда относительно велик вследствие большой массы. Пылинка массой  $10^{-5}$  г, движущаяся со скоростью 1 см/с, имеет импульс  $10^{-10}$  кг·м/с. Допустим, что мы умеем задавать или измерять импульс с точностью до 6 верных значащих цифр, что в принципе возможно. Это значит, что неопределенность импульса  $\Delta p \approx 10^{-16}$  кг·м/с. Из неравенств (4.8) следует, что соответствующая неопределенность координаты  $\Delta x \approx 6 \cdot 10^{-18}$  м. Ясно, что в этом случае в классической области можно не учитывать квантовые особенности поведения частиц, так как неопределенность координаты  $x$  меньше доступной погрешности ее измерения.

В случае несущественных по сравнению со значениями  $p$  и  $x$  неопределенностей  $\Delta p$  и  $\Delta x$  можно в правых частях неравенств (4.8) положить  $\hbar = 0$ . Поэтому в классической физике можно говорить о траектории движения, конечном ускорении, плавно меняющейся скорости и т. д.

Понятно, что не только макротела, но и микрочастицы могут участвовать в движениях, удовлетворяющих указанному условию (см. пример 4.1). В таком случае к ним применима классическая механика. Но с точки зрения соотношений неопределенностей частица всегда движется не по геометрической линии, а в некоторой трубке, выделенной в пространстве неопределенностями в значениях координат. Внутри трубки точная траектория отсутствует.

Итак, соотношения неопределенностей Гейзенберга указывают предел точности для одновременного измерения координаты и соответствующей ей проекции импульса. За этой границей указание точного положения вместе с заданием точного импульса теряет смысл, так как микрочастица по своей природе обеими точно заданными в одном и том же состоянии характеристиками не обладает. Но соотношения (4.8) формально не запрещают точного задания одной из сопряженных величин: импульса или радиус-вектора (координаты  $x$  или проекции импульса  $p_x$ ).

Заметим, что для точного определения положения частицы имеется еще одно ограничение, вытекающее из наличия связи между энергией и импульсом. При  $\Delta x \rightarrow 0$   $\Delta p_x \rightarrow \infty$ . Но тогда импульс частицы может принимать сколь угодно большие значения — вместе с им-

пульсом стремится к бесконечности энергия частицы. Для локализации частицы в какой-нибудь точке пространства требуется сообщить ей бесконечно большую энергию. Отсюда понятно, почему для изучения все более мелких деталей в строении материи необходимо строить все более мощные ускорители. Ведь единственным средством исследований в этой области служит все большее сближение частиц при столкновениях. Соответственно растут необходимые для этого энергии.

Сделаем еще одно замечание. Может показаться, что в волновом пакете достигнут необходимый для наглядности синтез корпускулярных и волновых представлений, так что частице можно сопоставить материальное волновое поле, локализованное в малой области пространства. Но это не так. Если учесть высшие члены в разложении (4.5), то окажется, что с течением времени пакет расширяется, захватывая все большую область пространства. Снова подтверждается квантовое положение о том, что волновая функция описывает состояние частицы, определяет вероятность ее обнаружения в различных точках пространства, но не представляет непосредственно сам объект — микрочастицу.

В учебниках, научных и научно-популярных статьях и книгах по физике микромира нередки утверждения о том, что все фундаментальные частицы: электроны, нейтрино, кварки и т. д. — считаются точечными. Использование такой модели здесь оправдано тем, что при взаимодействии друг с другом (особенно при высоких энергиях) микрочастицы ведут себя так, как если бы их заряд и масса были сосредоточены в одной точке. Согласно квантовой механике использование точечной модели для описания поведения электронов и других частиц согласуется с использованием волновых функций (со всеми вытекающими отсюда последствиями в виде соотношения неопределенностей и т. д.) в рамках вероятностно-статистического толкования  $\psi$ -функции.

**4.4. Соотношения неопределенностей и измерение физических величин.** Изучение микромира привело к переосмыслению значения измерения физических величин. Оказалось, что теорию невозможно построить без учета взаимодействия, в процессе которого получается информация об объекте. Например, теоретическое положение — соотношения неопределенностей — Гейзенберг получил путем анализа процесса измерения координат и импульсов.

Рассмотрим детальнее физическую сущность измерения координат микрочастиц. Для определения места расположения частицы нужно ограничить свободу ее перемещения, включив ее в состав системы с известными размерами и положением в пространстве (например, электрон в атоме). Но при этом будет потеряна информация об импульсе микрочастицы. Можно не прибегать к локализации частицы, а только заставить ее провзаимодействовать с объектом, положение которого известно. Если такой объект — микрочастица с точно заданными координатами, то ее импульс неизвестен. И в этом случае результат взаимодействия не даст однозначной информации об импульсе микрочастицы.

Такая же проблема возникает при измерениях импульса. Для установления значения этой величины необходимо взаимодействие исследуемой частицы с другой, которая находилась в состоянии с определенным импульсом до взаимодействия и перешла в состояние с определенным импульсом после взаимодействия. Такие состояния микрочастиц описываются монохроматическими волнами де Бройля, которые не несут никакой информации о положении частицы, используемой для измерения. Поэтому при измерении импульса нельзя получить сведения о том, где произошло столкновение, т. е. о координатах изучаемой частицы.

Таким образом, наличие волновых свойств у микрочастиц не позволяет провести опыт со взаимодействием частиц так, чтобы получить одновременно информацию о положении частицы и об ее импульсе. Посмотрим, нельзя ли это сделать при помощи макроскопических тел.

Любое измерение физической величины включает в себя некоторое взаимодействие между измерительным прибором и изучаемым объектом. При этом не только исследуемый предмет воздействует на прибор, изменяя его состояние (за счет чего и становится возможным измерение), но и прибор действует на изучаемый объект, также в какой-то мере изменяя его состояние. Если в классической физике действие прибора на объект можно сделать несущественно малым или учесть его, а затем исключить из показаний, то в микромире такой учет оказывается невозможным. Возмущение в состоянии объекта нельзя сделать пренебрежимо малым или учесть его точным расчетом.

Одна из обсуждавшихся при осмыслении квантовой механики многочисленных схем опытов с одновременным измерением координаты и соответствующей проекции импульса представлена на рисунке 4.2. Частица, движущаяся вдоль оси  $Ox$ , проходит через отверстие в диафрагме и попадает на экран. В классическом случае взаимодействия частицы с диафрагмой нет или оно пренебрежимо мало. Если частица окажется в точке экрана, лежащей против середины отверстия, то можно утверждать, что в момент прохождения щели проекция импульса равна:  $p_y = 0$ . Для этого же момента известна ее координата  $y$  с точностью до ширины отверстия  $a$ . Щель можно сделать сколь угодно узкой. Тогда значения величин  $y$  и  $p_y$  находятся одновременно и со сколь угодно малой погрешностью.

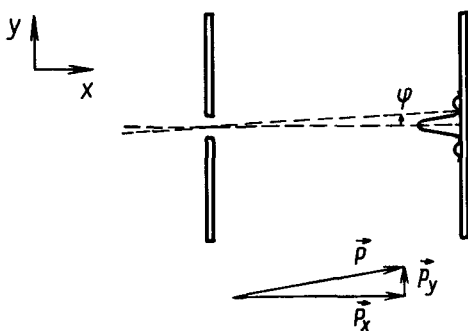


Рис. 4.2.



Для квантового объекта взаимодействием с диафрагмой пренебречь нельзя, так как при узкой щели возникает дифракция волн де Бройля. Опыт не позволяет судить, чем вызвано отклонение частицы на угол  $\varphi$ : тем, что до прохождения отверстия имелась неравная нулю проекция импульса  $p_y$ , или тем, что действие прибора на частицу привело к изменению начального импульса, направленного вдоль оси  $Ox$ . Возникает неопределенность в импульсе, равная  $\Delta p_y = p_y = p \sin \varphi$ . Если ограничиться углами, лежащими в пределах главного максимума, то можно оценить угол  $\varphi$  из условия  $a \sin \varphi = \lambda$ . (Это соотношение взято из теории дифракции. Оно определяет направление на первый максимум.)

Длина волны де Бройля находится из формулы  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p_y}$ . Поэтому произведение неопределенностей для координаты  $y$  и проекции импульса  $p_y$  оказывается равным  $\Delta p \sin \varphi = 2\pi\hbar$ . Очевидно, что оно не равно нулю ни при каких размерах отверстия. При  $a \rightarrow 0$  возрастает точность в измерении координаты. Но чем уже щель, тем шире главный максимум. Поэтому растет неточность в измерении импульса. При широкой щели дифракцией можно пренебречь: импульс измеряется очень точно, но положение частицы фиксируется грубо.

Небольшое изменение в методе измерений позволило бы находить значение проекции импульса  $p_y$  непосредственно. Для этого нужно сделать диафрагму подвижной. Если при прохождении отверстия частица получает добавочный импульс:  $\Delta p = p_y$ , то диафрагма со щелью придет в движение. Ее импульс станет равным  $p_y$ . Установка такого типа позволяет осуществить более точное измерение импульса по движению диафрагмы, но положение частицы на оси  $Oy$  в ней будет находиться грубее, чем при начальной схеме опыта. Расчет показывает, что и в этом случае мы не выходим за пределы соотношения неопределенностей.

Обратим также внимание на другие важные моменты процесса измерения. Движение частицы после прохождения щели в установке, изображенной на рисунке 4.2, однозначно предсказать нельзя. Расчету поддаются лишь вероятности того или иного направления движения. Частица может полететь в направлении любого максимума. Это означает, что взаимодействие частицы с прибором не является однозначно предсказуемым. Отсюда и возникает невозможность полного учета возмущения, вносимого прибором в начальное состояние частицы. Известно только, что оно конечно (не равно нулю), а по величине таково, что всегда выполняются неравенства Гейзенберга.

Существует два типа измерительных приборов: для измерения координат и для измерения импульсов. Применение приборов одного типа не позволяет получить всю информацию о свойствах микро-частицы, находящейся в некотором состоянии. Только использование установок обоих типов дает возможность получить полную совокупность сведений, которые согласно законам квантовой механики доступны для наблюдателя.

В процессе измерения какой-нибудь характеристики состояние частицы изменяется, и поэтому процесс измерения в микромире, вообще говоря, невоспроизводим. Чтобы выявить на опыте статистические закономерности квантовой механики, необходимо проводить измерения над многими одинаковыми частицами, находящимися в одном и том же начальном состоянии.

Таким образом, анализ показывает, что при измерениях нужно разумно ставить вопросы и не пытаться получить более детальные сведения о движении микрочастиц, нежели это заложено в природе. Так, в опыте с прохождением пучка частиц через диафрагму с двумя отверстиями всякие попытки с помощью детекторов уточнить путь движения частиц и указать, через какое отверстие проходит каждая из них, обречены на неудачу; детекторы вносят настолько сильное возмущение, что изменяется вид дифракционной картины

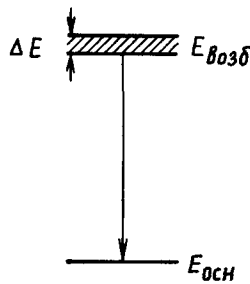


Рис 4.3

и весь характер опыта, так как микрочастица взаимодействует не только с диафрагмой, но и с детектором.

И наконец, есть еще один аспект влияния измерительного прибора на состояние микрочастицы. Можно сказать, что при измерении прибор «выбирает» одно из альтернативных состояний частицы. Пусть состояние микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi$ , которую можно представить в виде линейной суперпозиции волновых функций:  $\psi = \sum_i C_i \varphi_i$ , где  $\varphi_i$  — функция состояния с определенным значением  $a_i$  какого-то параметра  $a$  (импульса, энергии и др.). При каждом отдельном измерении этой физической величины мы будем получать не смесь всех возможных значений, а одно конкретное значение:  $a_1$ , или  $a_2$ , или  $a_3$  и т. д. Следовательно, в процессе опыта частица переходит из состояния  $\psi$  в состояние  $\varphi_i$ . Можно сказать, что при измерении «создается» наблюдаемое значение физической величины.

**4.5. Соотношение неопределенностей для энергии и времени.** Допустим, что частица находится в нестационарном состоянии. В этом случае она не обладает определенной энергией. Волновую функцию объектов можно представить как суперпозицию волновых функций стационарных состояний — состояний с определенной энергией.

В частности, нестационарное состояние можно описать волновым пакетом (4.3), составленным из плоских монохроматических волн де Бройля. Стационарному состоянию соответствует неизменное распределение вероятностей для координат частиц. Перемещение пакета — одно из проявлений нестационарности состояния. Поэтому в качестве «меры нестационарности» можно использовать время пребывания пакета  $\Delta t$  на отрезке  $\Delta x$  оси  $Ox$ . (Имеется в виду интервал значений координаты  $x$ , на котором с подавляющей вероятностью обнаруживается частица.)

Согласно неравенствам (4.8)

$$\Delta x \geq \frac{2\pi\hbar}{\Delta p}.$$

Искомая мера нестационарности

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_0}.$$

где  $v_0$  — скорость движения центра пакета. Она известна:

$$v_0 = \left( \frac{dE}{dp} \right)_0.$$

Поэтому

$$\Delta t \geq \frac{2\pi\hbar}{\left( \frac{dE}{dp} \right)_0 \Delta p} \quad (4.9)$$

Учтем, наконец, что

$$\left( \frac{dE}{dp} \right)_0 \Delta p = \Delta E,$$

где  $\Delta E$  — неопределенность в значении энергии частицы. Тогда из выражения (4.9) следует неравенство

$$\Delta E \Delta t \geq 2\pi\hbar, \quad (4.10)$$

которое называется *соотношением неопределенностей для энергии и времени*.

Хотя по форме соотношение (4.10) совпадает с неравенствами Гейзенберга (4.8), физический смысл его иной. В формулах (4.8) речь идет о неопределенностях в значениях двух физических величин, измеренных в один и тот же момент времени. Но такое толкование неравенства (4.10) невозможно. Как следует из вывода,  $\Delta E$  и  $\Delta t$  нельзя понимать как неопределенность в энергии, измеренной в какой-то момент времени, соотношенную с неопределенностью в значении самого момента времени. Согласно определению  $\Delta t$  — это время пребывания частицы в некоторой области пространства, т. е. в некотором состоянии.

Укажем на два возможных применения формулы (4.10). Величина  $\Delta t$  может быть принята за среднее время жизни, а  $\Delta E$  — за ширину уровня энергии нестабильных систем: радиоактивных ядер, способных к распаду элементарных частиц, атомов и молекул в возбужденных состояниях и т. д. Если они имеют дискретные уровни энергии, то эти уровни не заданы точно. Неопределенность в энергии обуславливает конечную ширину уровня. Известны, например, конечная ширина спектральных линий излучения атомов, неопределенность в энергии продуктов радиоактивного распада и т. д. (рис. 4.3).

Другое применение неравенства (4.10) относится к самому процессу измерения энергии. Как уже говорилось ранее, всякое измерение связано с некоторым воздействием прибора на объект измерения. В момент измерения частица (или система) в результате взаимодействия с прибором находится в нестационарном состоянии. Взаимодействие приводит к неопределенности  $\Delta E$  в энергии частицы. Под  $\Delta t$  понимается время измерения — время воздействия прибора на частицу. Чтобы уменьшить  $\Delta E$ , необходимо увеличить  $\Delta t$ ; при этом можно сделать сколь угодно малым возмущение, вносимое в начальное состояние.

Точно заданную энергию могут иметь системы, «живущие» как угодно долго в одном квантовом состоянии. Это стационарные

состояния. Точность, с которой закон сохранения энергии может быть проверен на опыте, зависит от времени наблюдения. Фактически проверка может быть проведена только для стационарных состояний.

В квантовой теории вводится представление о виртуальных частицах, которые испускаются и поглощаются реальными частицами и являются переносчиками взаимодействия между ними — квантами соответствующих полей. Виртуальная частица возникает и немедленно исчезает. Она существует лишь в течение малого промежутка времени  $\Delta t$ , которому соответствует неопределенность энергии:  $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$ , целиком приписываемая самой виртуальной частице. Непосредственное наблюдение таких частиц невозможно, но рядом следствий модель взаимодействия через виртуальные частицы подтверждается и является общепринятой. В нашем курсе нерелятивистской квантовой механики понятие о виртуальной частице не используется. Однако неустранимое влияние измерительного прибора на микрочастицу можно понять, если учесть, что взаимодействие передается виртуальными квантами.

В самых общих чертах особенность микромира состоит в том, что передаваемый квант существенно изменяет состояние микрочастицы: импульс ее сравним с импульсом кванта по порядку числового значения. Квант поглощается или испускается целиком; поэтому импульс частицы изменяется не непрерывно, как это имеет место при действии силы на макротело, а скачкообразно. Каждое изменение импульса случайно и однозначно непредсказуемо, как непредсказуемо излучение или поглощение виртуального кванта.

Связь частиц в некоторой системе осуществляется за счет взаимодействия между частицами; последнее же в силу квантового характера неизбежно приводит к неопределенности импульса, а значит, и координаты. То же относится и к измерению: чем точнее определяется координата, тем меньше область локализации микрочастицы, больше взаимодействие и соответственно больше неопределенность, вносимая измерительным прибором.

В заключение вопроса о соотношениях неопределенностей (4.8) и (4.10) сделаем последнее важное замечание. Величины  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  в неравенствах (4.8) имеют смысл интервалов, в которые попадают значения координаты и импульса при повторных многократных измерениях, проводимых над множеством независимых тождественных частиц, находящихся в одном и том же квантовом состоянии. Строго установить границы интервалов нельзя: они всегда условны.

Выпадение того или иного значения физической величины — это событие случайное. В теории вероятностей разброс значений случайной величины обычно характеризуют среднеквадратичным отклонением. По определению

$$\delta x = \sqrt{(x - \bar{x})^2}, \quad \delta p_x = \sqrt{(p_x - \bar{p}_x)^2},$$

где чертой обозначены средние значения. В квантовой механике выводится формула

$$\delta x \delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$

представляющая собой иную форму записи неравенств (4.8). Вывод разобран в задаче 22 к главе III. Соответственно неравенство (4.10) нужно заменить соотношением

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

(имеется в виду, что  $\Delta E = \delta E$ ,  $\Delta t = \delta t$ ).

Наконец, если важен только порядок величины неопределенностей  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$ ,  $\Delta E$  и  $\Delta t$ , то пишут просто

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar, \quad \Delta E \Delta t \sim \hbar.$$

### Методические указания и рекомендации

I. Первая и вторая главы курса являются пропедевтическими. В первой главе вводятся на элементарном уровне квантово-механические понятия и законы, а во второй они применяются к решению простейших задач. Математический аппарат излагается в третьей главе, после чего возникает возможность решения основных задач и систематического изложения курса. Такая структура диктуется трудностями, которые встречают неподготовленные слушатели, если лекции начинаются с изложения абстрактного математического формализма квантовой механики. При принятом построении удается иллюстрировать математический аппарат на разобранных ранее простых задачах.

Однако при желании лектор может изменить порядок изучения курса. Во всяком случае, материал первой главы должен быть знаком студентам по курсу общей физики; их внимание нужно сосредоточить на функции состояния, особенно на ее вероятностно-статистической трактовке, а также на уравнении Шредингера и разделении переменных в нем. Для самостоятельного чтения рекомендуются книги [4, 12, 13, 17, 18] из списка литературы в конце курса, а также можно использовать учебники [2, 3, 8, 10, 21]. По вопросу об измерениях в микромире можно отослать студентов к литературе [2, 9, 17, 18, 19, 21].

II. При изучении материала первой главы читателю полезно ответить на вопросы, выполнить следующие упражнения:

— Назовите проблемы, которые не смогла разрешить классическая физика. Укажите теоретические и экспериментальные работы, инициировавшие возникновение квантовой механики.

— Обсудите корпускулярно-волновой дуализм микрочастиц: почему ни модель «материальная точка», ни модель «плоская волна» неадекватны микрочастице?

— Дайте математическое определение волновой функции и назовите ее свойства. Сформулируйте положения, раскрывающие физический смысл волновой функции. Сформулируйте принцип суперпозиции состояний и примените его к мысленному дифракционному эксперименту.

— Запишите уравнение Шредингера для микрочастицы в потенциальном поле и охарактеризуйте его математические особенности и особенности решений.

— Обсудите особенности стационарного состояния частицы в потенциальном поле.

— Разберитесь в вероятностной трактовке закона сохранения числа частиц.

— Запишите функцию состояния свободной частицы через па-