

ГЛАВА II. ПРОСТЕЙШИЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Уравнение Шредингера (3.1) допускает точные решения для некоторых сравнительно простых потенциальных полей. При этом, как правило, рассматриваются весьма идеализированные системы. Тем не менее для овладения основами квантовой механики полезно изучить ряд таких задач, в которых получаются простые аналитические выражения для функций состояния, дающие исчерпывающие сведения о свойствах исследуемой квантовой системы. На основе таких задач в данной главе мы познакомимся и с некоторыми качественно новыми особенностями поведения микрочастиц, отличающими их от классических корпускул. Рассмотренные ниже случаи важны и потому, что часто используются для моделирования реальных объектов; не повторяя объект во всех деталях, модель отражает его существенные черты, имеющие принципиальное значение. Поэтому такие модели широко применяются в теоретических исследованиях и практических расчетах.

§ 5. ЗАДАЧИ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ

5.1. Финитное и инфинитное движения. Наиболее просты задачи на движение микрочастиц в постоянных полях. Кроме того, на первых порах мы ограничимся одномерным движением. Если потенциальная энергия зависит только от одной координаты x , то изучается зависимость волновой функции только от этой переменной.

Такие задачи решаются с помощью стационарного одномерного уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi = 0. \quad (5.1)$$

Напомним, что зависимость волновых функций от времени в состояниях с определенной энергией имеет универсальный характер и уже была найдена ранее (см. гл. I, § 3); следовательно, ею можно пользоваться и находить один координатный множитель функции состояния $\psi(x)$.

Физический смысл имеют только однозначные, непрерывные и всюду ограниченные по модулю ψ -функции — решения уравнения (5.1). Можно показать, что непрерывна также и первая производная $\frac{d\psi}{dx}$.

Из уравнения Шредингера (5.1) следует, что

$$\int_{x-a}^{x+a} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{x-a}^{x+a} [U(x) - E] \psi dx.$$

Интеграл слева равен: $\frac{d\psi(x+a)}{dx} - \frac{d\psi(x-a)}{dx}$. Теперь очевидно, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{d\psi(x+a)}{dx} - \frac{d\psi(x-a)}{dx} \right] = 0, \text{ что и доказывает непрерывность.}$$

В точках, где $U(x) = \infty$, функция состояния принимает нулевое значение.

Это становится очевидным, если уравнение (5.1) записать в виде

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [U(x) - E]$$

и принять во внимание, что с бесконечной и положительной потенциальной энергией мы встречаемся в случае действия бесконечно больших сил отталкивания. (Вспомним, например, энергию электростатического взаимодействия двух одноименно заряженных точечных тел.) Если частица не может попасть в точку x_0 , то вероятность обнаружить ее там равна нулю; следовательно, $\psi(x_0) = 0$.

Рассмотрим график потенциальной энергии на рисунке 5.1. При $x=0$ $U(0) = \infty$. Поэтому частица с энергией E не может подойти как угодно близко к началу координат. Может или не может частица иметь координату $x \rightarrow \infty$, зависит от знака полной энергии.

На больших расстояниях от начала координат $U(x) = 0$, и уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) имеет два линейно независимых решения: $\psi_1 = Ce^{-ikx}$ и $\psi_2 = Ce^{+ikx}$. Если $E < 0$, то физический смысл имеет только решение ψ_1 , так как ψ_2 расходится на бесконечности. Но $\psi_1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Это означает, что частицу можно обнаружить только на конечных расстояниях от начала координат. Такое движение называется *финитным*.

При $E > 0$ одному и тому же значению энергии соответствуют

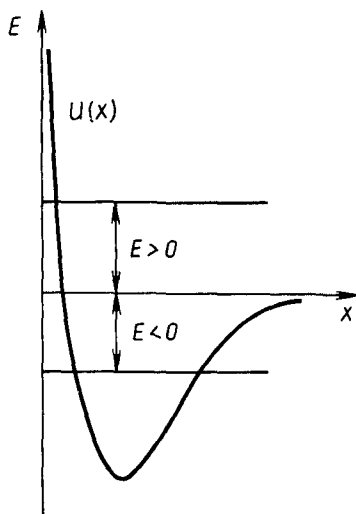


Рис 5.1.

два разных решения: ψ_1 и ψ_2 , описывающие частицы, движущиеся от начала координат в бесконечно удаленные точки и из бесконечности к началу координат. В этом случае движение *инфинитно*, так как есть отличная от нуля вероятность обнаружить частицу сколь угодно далеко от точки $x=0$.

Итак, аналогично классической механике (см. ч. I, § 12) квантовая механика приводит к финитному движению в случае, если полная механическая энергия частицы отрицательна, и к инфинитному, если она положительна.

Обратим внимание и на то, что волновая функция отлична от нуля в тех точках, где $U(x) > E$. Это означает, что микрочастица может быть обнаружена там, где запрещено появляться классическим частицам. Если потенциальная энергия больше полной механической энергии, то по законам классической механики

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(x) < 0, \quad (5.3)$$

что невозможно, так как $\frac{mv^2}{2} > 0$. С точки зрения квантовой механики это неравенство смысла не имеет, потому что в состояниях с определенной полной энергией ни кинетическая, ни потенциальная энергии в общем случае не принимают точных значений. Поэтому формулу (5.3) нельзя применять к квантовым объектам непосредственно. Действительно, указывать потенциальную энергию можно только тогда, когда точно задано положение частицы. Кинетическая энергия соответственно имеет определенные значения в состояниях с точно заданным импульсом. Отсюда следует, что в природе не существует состояний, в которых кинетическая и потенциальная энергии имели бы определенные значения одновременно.

5.2. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме. Потенциальное поле, удерживающее частицу в ограниченной области пространства, можно грубо моделировать потенциальной ямой бесконечной глубины. В одномерном случае полагаем $U(x) = 0$ при $0 < x < a$ и $U(x) = \infty$ при $x \leq 0$, $x \geq a$.

Данные условия физически означают, что частица не может покинуть участок оси Ox между точками O и a , так как на границах на нее действуют бесконечно большие возвращающие силы. Для выхода за пределы отрезка требуется бесконечная энергия, а кинетическая энергия рассматриваемой частицы в яме конечна. Прямоугольная яма в самых общих чертах описывает системы со связанными состояниями частиц. Молекула газа в объеме какого-то сосуда, электрон в атоме или нуклон в ядре — вот примеры систем, в которых частица не выходит за пределы некоторой области пространства.

Уравнение (5.1) для частицы, движущейся внутри ямы, записывается в следующем виде:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E. \quad (5.4)$$

Из условия задачи вытекают граничные условия:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(a) = 0. \quad (5.5)$$

Общее решение уравнения (5.4) известно:

$$\psi = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}. \quad (5.6)$$

Возьмем в формуле (5.6) $x=0$. Из первого условия (5.5) находим $C_1 + C_2 = 0$. Следовательно, $C_1 = -C_2 = C$ и

$$\psi = C \sin kx$$

Чтобы удовлетворить второму граничному условию (5.5), нужно считать

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Итак, решение (5.4), удовлетворяющее граничным условиям, найдено: это система функций

$$\psi_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (5.7)$$

описывающих возможные стационарные состояния частицы в яме.

Физический смысл *квантового числа* n заключается в том, что оно определяет набор стационарных состояний и соответствующие им значения энергии частицы. С помощью формулы (5.4) находим

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \quad (5.8)$$

Энергия оказывается квантованной величиной. Существенно, что квантование получено в процессе решения уравнения Шредингера с учетом требований, налагаемых на волновую функцию (однозначность, непрерывность, ограниченность), и граничных условий (5.5).

Для окончательного определения вида волновой функции требуется выбрать коэффициент C_n так, чтобы выполнялось условие нормировки:

$$\int_0^a |\psi_n|^2 dx = 1.$$

После вычисления данного интеграла для функции (5.7) получаем

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{a}}. \quad (5.9)$$

Диаграмма распределения плотности вероятности для координаты x в нескольких стационарных состояниях изображена на рисунке 5.2. Если добавить к найденной координатной части функции состояния временной множитель (3.6), то получается стоячая волна с числом узлов, на единицу большим n (считая и узлы на краях ямы). Узлы есть точки, в которых частица никогда не обнаруживается. С ростом квантового числа n число узлов и пучностей возрастает, диаграмма приближается к равномерному распределению вероятностей, характерному для классической частицы.

Действительно, по законам классической механики материальная точка в яме будет двигаться вперед и назад, имея постоянную энергию E и модуль импульса: $p = \sqrt{2mE}$. Вероятность ее обнаружения на участке dx пропорциональна времени

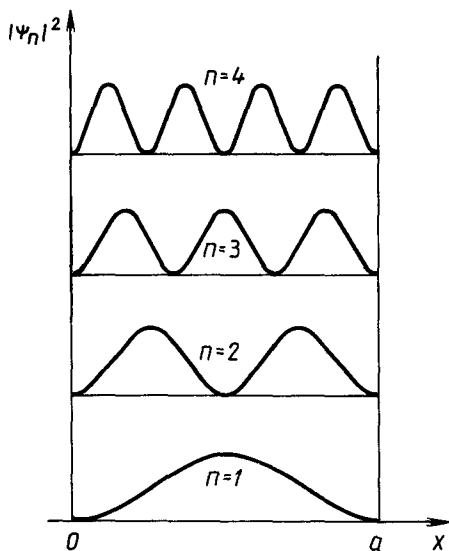


Рис. 5.2.

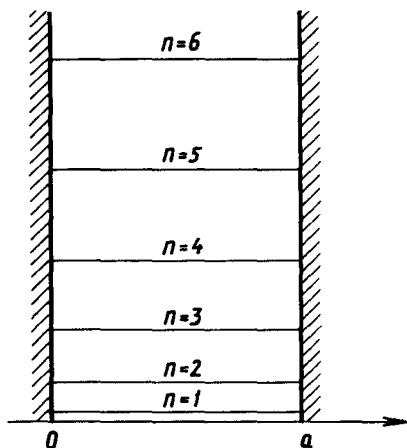


Рис. 5.3.

пребывания dt . Так как $dt = \frac{dx}{v} = \sqrt{\frac{m}{2E}} dx$, то $dW = \text{const } dx$, т. е. $w = \text{const}$.

Таким образом, из сравнения поведения микрообъекта с макрообъектом в том же силовом поле усматривается общее правило: *по мере роста энергии или квантового числа n движение микрочастицы становится все более близким к классическому*. На рисунке 5.3 изображена энергетическая диаграмма. Обратим внимание на отношение

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \sim \frac{1}{n}.$$

Оно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. в пределе получается практически непрерывная последовательность уровней энергии.

Характерно, что самый нижний уровень энергии не равен нулю. Такое положение типично для любой связанной частицы. Согласно соотношениям неопределенностей Гейзенберга неопределенности координаты частицы $\Delta x = a$ соответствует неопределенность импульса $\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{a}$, а значит, и энергии $\Delta E = \frac{\Delta p^2}{2m}$. Это минимальное значение энергии частицы, связанной в области с протяженностью a , по порядку величины соответствует (5.8). Важно, что чем меньше область пространства, в которой локализуется частица, тем больше ее минимальная энергия.

Дискретность уровней энергии, наличие состояния с неравной нулю минимальной энергией являются общими чертами всех финитных движений.

Сейчас познакомимся с новой характеристикой состояний микро-

частиц. Она выявится, если перенести начало координат в решенной выше задаче в точку $x = \frac{a}{2}$. В новой системе отсчета волновая функция принимает вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a}, & n = 2, 4, 6, \dots \\ (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi n x}{a}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (5.10)$$

Функции состояния для четных и нечетных значений квантового числа n по-разному ведут себя при изменении направления оси Ox на противоположное. Состояния с нечетным n описываются четными функциями; состояниям с четным n соответствуют нечетные функции.

В первом случае частице приписывается равное единице значение новой для нас физической величины — *четности*, во втором случае ее значение равно минус единице. Четность есть сохраняющаяся для замкнутой системы частиц величина, не имеющая аналога в макромире. (Подробнее четность обсуждается ниже в § 9 п. 7.)

5.3. Прямоугольный потенциальный барьер. Введем понятие о потенциальном барьере. Для этого рассмотрим потенциальную энергию взаимодействия двух протонов, диаграмма которой показана на рисунке 5.4. На расстояниях, больших радиуса действия ядерных сил: $r_0 = 1,7 \cdot 10^{-13}$ см, — проявляется кулоновское отталкивание (участок диаграммы при $r > r_0$). При $r < r_0$ основную роль играет сильное (ядерное) взаимодействие, обуславливающее притяжение нуклонов (протонов и нейтронов). На расстояниях, меньших $r_k = 0,3 \cdot 10^{-13}$ см, притяжение вновь сменяется отталкиванием (но те-

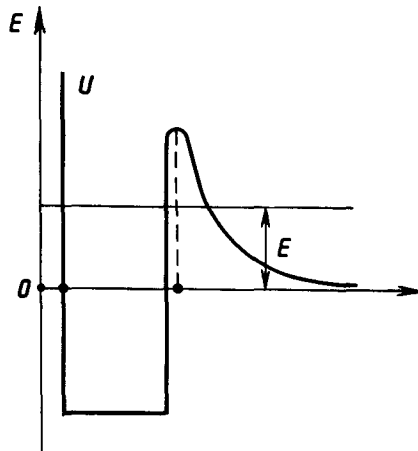


Рис 5.4.

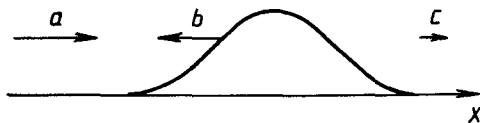


Рис. 5.5. *a* — поток частиц, падающих на барьер; *b* — поток частиц, отраженных от барьера; *c* — поток частиц, прошедших барьер.

перь это сильное, а не электромагнитное взаимодействие). Таким образом, диаграмма потенциальной энергии представляет собой потенциальную яму, ограниченную слева прямоугольным потенциальным барьером (ход графика здесь не уточнен, высота порядка 200 МэВ), а справа — барьером высотой порядка 25 МэВ, плавно спадающим при росте r .

Если протонам удастся сблизиться до расстояний $r \leq r_0$, то происходит реакция ядерного синтеза, нуклоны образуют связанную систему — ядро атома дейтерия. (Связанному состоянию соответствует модель частицы в потенциальной яме.) Но такому сближению частиц препятствует потенциальный барьер. Для выяснения возможности реакции требуется решить задачу о прохождении частиц через барьер при различных энергиях.

Большие энергии частиц достигаются, например, нагреванием вещества до очень высоких температур. Достичь высоких температур нелегко. Еще труднее удерживать нагретую плазму. Поэтому большое значение для этой и других аналогичных практических задач на столкновения имеют ответы на такие вопросы: возможно ли прохождение барьера при энергиях ниже вершины барьера? Всегда ли частица пройдет через барьер без отражения, если ее энергия выше пика барьера?

С потенциальными барьерами приходится иметь дело и при исследованиях многих других явлений в атомной физике. К ним относятся столкновения элементарных частиц друг с другом и ядрами, рассеяние пучка электронов на атомах и молекулах, химические реакции и т. д.

Типична следующая постановка задачи о прохождении барьера: на барьер падает поток частиц, движущихся вдоль оси Ox (рис. 5.5). Требуется определить, какая часть из них пройдет через барьер и какая отразится от барьера.

В качестве классического аналога можно рассмотреть поведение шарика, накатывающегося слева на крутую горку высотой H , изображенную на рисунке 5.6. Пусть шарик двигался с начальной скоростью v и без трения. Если $\frac{mv^2}{2} < mgH$, то шарик на горку не закатится. Поднявшись до уровня h , который находится из условия $\frac{mv^2}{2} = mgh$, шарик остановится и скатится обратно с горки. При $\frac{mv^2}{2} > mgH$ шарик преодолевает горку обязательно, сколько бы раз ни повторялся опыт.

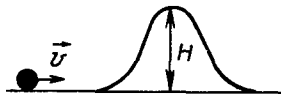


Рис. 5.6.

Решим задачу на потенциальный барьер для микрочастиц. Наиболее простой для расчета случай — прохождение барьера прямоугольной формы. Полный ход потенциальной кривой описывается соотношениями

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ U, & 0 < x < a, \\ 0, & x \geq a. \end{cases}$$

Им соответствует диаграмма на рисунке 5.7.

Разрывный характер функции $U(x)$ приводит к необходимости записать уравнение Шредингера (5.1) отдельно для всех трех областей, выделенных на рисунке 5.7:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k^2\psi_1 &= 0, & k^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2}, \\ \text{II. } \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + q^2\psi_2 &= 0, & q^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}(E - U), \\ \text{III. } \frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k^2\psi_3 &= 0, & k^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Функции ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 представляют одно и то же решение в соответствующих интервалах изменения переменной x . Чтобы это решение было непрерывным вместе с первой производной, необходимо выполнение граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), & \psi_2(a) &= \psi_3(a), \\ \psi_1'(0) &= \psi_2'(0), & \psi_2'(a) &= \psi_3'(a). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Запишем общие решения уравнений (5.11):

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \\ \psi_2 &= Ce^{iqx} + De^{-iqx}, \\ \psi_3 &= Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Постоянные A , B , C , D , F и G должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия (5.12) и чтобы решение соответствовало постановке задачи.

В областях I и III частицы движутся как свободные. Поэтому легко установить физический смысл отдельных слагаемых в первой и третьей формулах (5.13). Выражение Ae^{ikx} соответствует волне,

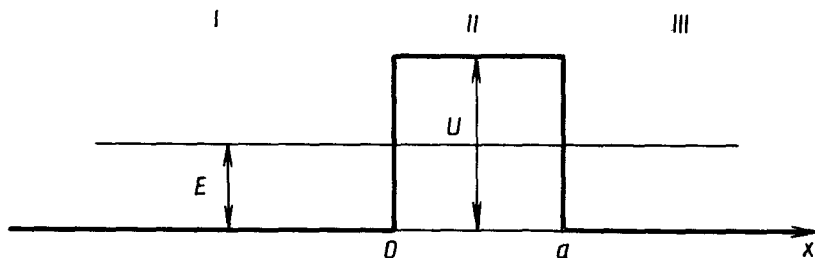


Рис 5.7

распространяющейся вдоль оси Ox . (Следует вспомнить о временном множителе $e^{-i\omega t}$.) Это слагаемое описывает частицы, падающие на барьер. Частицы, отраженные от барьера, представлены в решении членом Be^{-ikx} . В области III также имеются две волны. Волна Fe^{ikx} , бегущая по направлению оси Ox , связана с частицами, прошедшими через барьер. Волна, распространяющаяся в обратном направлении, сопоставляется частицам, падающим на барьер справа. По условиям задачи таких частиц нет, поэтому $G=0$.

Чтобы сравнить между собой количество падающих, отраженных и прошедших через барьер частиц, найдем плотность потока вероятности для частиц, падающих на барьер, отраженных от барьера и прошедших через него. Применим формулу (3.23):

$$\begin{aligned} j_{\text{пад}} &= \frac{\hbar k}{m} |A|^2, \\ j_{\text{отр}} &= \frac{\hbar k}{m} |B|^2, \\ j_{\text{прош}} &= \frac{\hbar k}{m} |F|^2 \end{aligned}$$

Обозначим через P и R отношения плотностей потоков:

$$P = \frac{j_{\text{прош}}}{j_{\text{пад}}} = \frac{|F|^2}{|A|^2}, \quad R = \frac{j_{\text{отр}}}{j_{\text{пад}}} = \frac{|B|^2}{|A|^2}.$$

Величина P называется коэффициентом прохождения или прозрачностью барьера, R — коэффициентом отражения.

Вследствие непрерывности волновой функции и ее производной плотность потока вероятности во всех областях должна быть одна и та же. Отсюда следует равенство

$$j_{\text{пад}} = j_{\text{отр}} + j_{\text{прош}},$$

выражающее закон сохранения числа частиц при прохождении барьера. Из него вытекает связь коэффициентов P и R : $P + R = 1$.

Смысл этой формулы установить нетрудно: величины P и R определяют вероятность прохождения частицей барьера и отражения от барьера, поэтому их сумма должна быть равна единице.

Далее нужно вычислить коэффициенты A, B, C, D, F , для чего следует использовать общее решение (5.13) и граничные условия (5.12):

$$\left. \begin{aligned} A + B &= C + D, \\ Ce^{iqa} + De^{-iqa} &= Fe^{iqa}, \\ k(A - B) &= q(C - D), \\ q(Ce^{iqa} - De^{-iqa}) &= kFe^{iqa}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Перепишем уравнения (5.14) в виде

$$\left. \begin{aligned} A + B &= C + D, \\ A - B &= \frac{q}{k}(C - D), \\ Ce^{iqa} + De^{-iqa} &= Fe^{iqa}, \\ Ce^{iqa} - De^{-iqa} &= \frac{k}{q}Fe^{iqa}. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Из первых двух уравнений этой системы следует

$$2A = \left(1 - \frac{q}{k}\right) C + \left(1 - \frac{q}{k}\right) D, \quad (5.16)$$

а из третьего и четвертого

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} F e^{ika} e^{-iqa} \left(1 + \frac{k}{q}\right), \\ D &= \frac{1}{2} F e^{ika} e^{iqa} \left(1 - \frac{k}{q}\right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Подставляя значения постоянных C и D из соотношений (5.17) в (5.16), получаем

$$2A = \frac{1}{2} F e^{ika} \left[\left(1 + \frac{q}{k}\right) \left(1 + \frac{k}{q}\right) e^{-iqa} + \left(1 - \frac{q}{k}\right) \left(1 - \frac{k}{q}\right) e^{iqa} \right].$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\frac{F}{A} = \frac{4kq e^{-ika}}{(k+q)^2 e^{-iqa} - (k-q)^2 e^{iqa}}. \quad (5.17')$$

После вычислений для коэффициентов F и A получаем

$$\frac{F}{A} = \frac{2kq e^{-ika}}{2qk \cos qa - i(k^2 + q^2) \sin qa}. \quad (5.18)$$

Дальнейший разбор задачи произведем сначала для энергий выше пика барьера. При $E > U$ q действительно. Тогда

$$P = \frac{4k^2 q}{4q^2 k^2 \cos^2 qa + (k^2 + q^2) \sin^2 qa} \quad (5.19)$$

и

$$R = 1 - P = \frac{(k^2 - q^2)^2}{(k^2 + q^2)^2 + 4k^2 q^2 \operatorname{ctg} qa}. \quad (5.20)$$

Неожиданный с точки зрения классической физики результат: частица имеет неравную нулю вероятность отразиться от барьера, несмотря на то что ее энергия превышает высоту потенциального барьера. Это явление объясняется волновыми свойствами частиц. (Вспомним, что волны отражаются на границе сред с различными плотностями.)

Найдем P при $E < U$. Сейчас q — чисто мнимая величина. Пусть в формуле (5.17') $q = if$, где $f = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}$:

$$\frac{F}{A} = \frac{4ikf e^{-ika}}{(k+if)^2 e^{fa} - (k-if)^2 e^{-fa}}. \quad (5.21)$$

Вводя гиперболические функции

$$\operatorname{Sh}fa = \frac{1}{2}(e^{fa} - e^{-fa}), \quad \operatorname{Ch}fa = \frac{1}{2}(e^{fa} + e^{-fa}),$$

приведем выражение (5.21) к виду

$$\frac{F}{A} = \frac{2ikfe^{-ika}}{(k^2 - f^2) \operatorname{Sh}fa + 2ik\operatorname{Ch}fa},$$

тогда

$$P = \frac{4k^2f^2}{(k^2 - f^2)^2 \operatorname{Sh}^2fa + 4k^2f^2 \operatorname{Ch}^2fa}. \quad (5.22)$$

Замечателен вывод, что при энергии ниже пика барьера частица может пройти сквозь него. Коэффициент прозрачности — сложная функция от энергии частицы, высоты и ширины потенциального барьера.

На практике вместо громоздкой формулы (5.22) для разного рода оценок и приближенных расчетов используют приближенное выражение, которое получается при условии $e^{2fa} \gg 1$. Если данное неравенство справедливо, то

$$\operatorname{Sh}fa \approx \operatorname{Ch}fa \approx \frac{1}{2} e^{fa}$$

и

$$P = \frac{16k^2f^2}{(k^2 + f^2)^2} e^{-2fa}.$$

Поэтому окончательный результат записывается в виде соотношения

$$P = P_0 e^{-2fa}. \quad (5.23)$$

Вероятность прохождения барьера обычно мала, и она тем меньше, чем шире и выше барьер и чем больше масса частицы (сравнение производится при одной и той же энергии).

Явление прохождения барьера тесно связано с возможностью появления частицы в запрещенной с точки зрения классической физики области, где $U > E$. Характерно, что частица выходит из пределов потенциального барьера с той же энергией, с которой она в него входит. Поэтому прохождение барьера образно называют туннельным эффектом. Частица не взбирается на вершину барьера (ее энергия везде постоянна) — она как бы проходит под ним через туннель.

Формула (5.23) обобщается на барьер произвольной формы.

Разобьем его на узкие прямоугольные полоски. Вероятность прохождения барьера равна произведению вероятностей прохождения всех элементарных прямоугольных барьеров, для которых высота полоски больше энергии частицы:

$$P = \prod_i P_i = P_0 \prod_i e^{-2f_i \Delta x_i}, \quad P_0 = \prod_i P_{0i},$$

где

$$f_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m[U(x_i) - E]}.$$

В пределе, когда полоски будут бесконечно тонкими и их число неограниченно возрастет, имеем

$$P = P_0 e^{-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U(x) - E} dx} \quad (5.24)$$

Точки x_1 и x_2 определяются из условия $U(x) = E$.

Туннельный эффект — типично квантовое явление, которое невоз-

можно понять без учета волновых свойств частиц. Он лежит в основе многих физических процессов: здесь распад и деление ядер, протекание ряда химических реакций, эмиссия электронов из металла и многие другие.

§ 6. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

6.1. Постановка задачи. Гармонический осциллятор — это материальная точка, совершающая гармонические колебания, т. е. колебания, в которых смещение точки из положения равновесия изменяется по закону синуса и косинуса. Ясно, что такое кинематическое определение непригодно в квантовой области, где нельзя указать точного положения микрочастицы в пространстве. Более общим определением гармонического осциллятора, пригодным и в микромире, является динамическое определение.

Классический осциллятор — это материальная точка, движущаяся в силовом поле, в котором потенциальная энергия имеет минимум, как, например, на рисунке 6.1. В таком случае (см. ч. I, § 26) малые отклонения частицы от точки устойчивого равновесия — минимума — приводят к гармоническим колебаниям. Приближенное значение потенциальной энергии, принимаемое в одномерном случае в расчет, следующее:

$$U = \frac{kx^2}{2}, \quad (6.1)$$

где $k > 0$ — коэффициент квазиупругой силы.

Квантовый осциллятор — это частица, движущаяся в потенциальном поле с минимумом энергии. Если полная энергия частицы E — величина малая, то потенциальную энергию можно выразить формулой (6.1). Коэффициент k удобно выразить через циклическую частоту колебаний: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. В таком случае вместо (6.1) имеем

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Последняя формула и определяет постановку задачи о квантовом гармоническом осцилляторе: это микрочастица, находящаяся в потенциальном поле вида (6.1).

Гармонические колебания играют очень важную роль в классической физике. Не менее важное значение имеет задача о гармоническом осцилляторе и в квантовой физике, где также говорят о гармонических колебаниях. Результаты ее решения средствами квантовой механики интересны как сами по себе, так и в качестве модельных представлений для реальных систем, в которых частица движется в силовом поле в окрестности точки минимума потенциальной энергии.

6.2. Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора. Запишем уравнение Шредингера для квантового гармонического осциллятора: