Так как при использовании указанных соотношений отдельным частицам уже нельзя сопоставлять конкретные квантовые состояния, то предполагается, что происходит непрерывный обмен состояниями. Первая частица переходит из состояния $n_1$ в состояние $n_2$, а вторая совершает обратный переход. Далее они снова меняются состояниями, и так на протяжении всего взаимодействия. (Обмен состояниями не следует понимать буквально и представлять как процесс, происходящий в пространстве и времени. Это, скорее, условный образ, чем наблюдаемое перемещение.) Подробнее об обменных силах говорится ниже, в § 17, 19.

Пример 14.4. **Зависимость плотности вероятности от ориентации спинов.** Система двух одинаковых частиц со спином 1/2, находящихся в потенциальной яме, описывается в зависимости от ориентации спина двумя различными координатными функциями (см. пример 14.3):

$$\psi_{\downarrow\uparrow}=\frac{\sqrt{2}}{a}(\sin k_1x_1 \sin k_2x_2+\sin k_1x_2 \sin k_2x_1),$$

$$\psi_{\uparrow\uparrow}=\frac{\sqrt{2}}{a}(\sin k_1x_1 \sin k_2x_2-\sin k_1x_2 \sin k_2x_1).$$

Найдем плотность вероятности попадания обеих частиц в одни и те же точки пространства ($x_1=x_2$):

$$w_{\downarrow\uparrow}=\frac{8}{a^2}\sin^2 k_1x \sin^2 k_2x,$$

$$w_{\uparrow\uparrow}=0.$$

Различные плотности распределения частиц отвечают и различному взаимодействию их в случае, если частицы заряжены.

Таким образом, ориентация спинов вызывает существенное влияние на выбор функции состояния, а через нее — на энергию взаимодействия частиц в системе.

## § 15. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ. ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ МОМЕНТОВ

**15.1. Свойства оператора момента импульса системы.** В приложениях квантовой механики к атомам и молекулам особое значение приобретает оператор момента импульса. Анализ его свойств выливается в целое учение о моменте импульса системы и ее частей. В данном параграфе будут кратко изложены только те положения, без которых невозможно понять изучаемые ниже закономерности строения многоэлектронных атомов.

Запишем оператор полного механического момента системы в виде суммы:

$$\hat{J}=\sum_{n=1}^{N}\hat{L}_n. \qquad (15.1)$$

Символами $\widehat{\vec{L}}_n$ здесь обозначены как орбитальные, так и спиновые моменты импульса отдельных частиц. Нашей ближайшей задачей является определение коммутационных свойств операторов $\widehat{J}_x$, $\widehat{J}_y$ и $\widehat{J}_z$. Правила коммутации для проекций представляют собой наиболее важную, характерную черту момента импульса в квантовой механике. Существенно, что и для орбитальных, и для спиновых моментов они одинаковы. Поэтому можно не выделять два вида слагаемых в (15.1).

Все операторы, относящиеся к разным частицам, коммутируют друг с другом, так как они действуют на различные переменные. Отсюда

$$[\widehat{\vec{L}}_i,\ \widehat{\vec{L}}_k]=0,\ [\widehat{L}_{xi},\ \widehat{L}_{xk}]=0,\ \ldots \qquad (15.2)$$

Используя коммутационные соотношения (10.2), (13.1) и (15.2), можно показать, что

$$[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y]=i\hbar\widehat{J}_z,\ [\widehat{J}_y, \widehat{J}_z]=i\hbar\widehat{J}_x,\ [\widehat{J}_z, \widehat{J}_x]=i\hbar\widehat{J}_y.$$

Таким образом, перестановочные соотношения для операторов проекций момента импульса системы те же, что и для моментов отдельных частиц. Отсюда следует совпадение и других свойств операторов.

Во-первых, операторы $\widehat{J}^2$ и $\widehat{J}_z$ коммутируют. Это означает, что существуют состояния с определенной величиной момента $J$ и его проекции $J_z$. Во-вторых, по аналогии с (10.7), (10.12) устанавливаем правило квантования полного механического момента системы и его проекции:

$$J=\hbar\sqrt{j(j+1)},$$
$$J_z=\hbar m_j,\ m_j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm j.$$

Если операторы $\widehat{J}^2$ и $\widehat{J}_z$ коммутируют с гамильтонианом, то возможны стационарные состояния системы с сохраняющимися значениями полной энергии, момента и его проекции. В частности, это справедливо для изолированной системы. Что же касается величин $L_k^2$, $L_{zk}$ и т. д., относящихся к отдельным частицам (или частям системы), то они, вообще говоря, не имеют определенных значений (за исключением, модулей спинов частиц) и не являются интегралами движения.

Если взаимодействия внутри системы, зависящие от моментов частиц, достаточно слабы или отсутствуют совсем, то в некотором приближении или точно наряду с постоянством суммарного момента сохраняются моменты подсистем. Понятно, что допустимые значения полного момента как-то зависят от величины моментов частей системы. Этот важный вопрос нуждается в подробном анализе.

Заметим, что в классической физике подобной проблемы нет. Задача там решается сложением соответствующих векторов по правилам векторной алгебры. В квантовой теории физическим величинам сопоставлены операторы. Поэтому при введении новой

величины — момента импульса системы — заново рассматривается вопрос о спектре ее наблюдаемых значений.

**15.2. Два способа описания системы, состоящей из двух невзаимодействующих частей.** Пусть система состоит из двух невзаимодействующих частей, находящихся в состояниях с заданными значениями момента импульса $L_1$ и $L_2$. Первая подсистема описывается волновой функцией $\varphi_{l_1 m_1}$, являющейся собственной функцией операторов $\widehat{L}_1^2$ и $\widehat{L}_{z_1}$ и принадлежащей их собственным значениям: $\hbar\sqrt{l_1(l_1+1)}$ и $\hbar m_1$. Аналогично для описания второй подсистемы введем функцию $\varphi_{l_2 m_2}(x_2)$, являющуюся собственной функцией операторов $\widehat{L}_2^2$ и $\widehat{L}_{z_2}$ и принадлежащую их собственным значениям: $\hbar\sqrt{l_2(l_2+1)}$ и $\hbar m_2$.

Любые два оператора, относящиеся к разным подсистемам, коммутируют друг с другом. Поэтому все четыре оператора: $\widehat{L}_1^2$, $\widehat{L}_2^2$, $\widehat{L}_{z_1}$ и $\widehat{L}_{z_2}$ — попарно коммутируют. Функции

$$\psi_{l_1 l_2 m_1 m_2}(x_1 x_2) = \varphi_{l_1 m_1}(x_1)\,\varphi_{l_2 m_2}(x_2) \tag{15.3}$$

являются их общими собственными функциями. Они описывают такое состояние системы, в котором каждая из ее частей имеет определенное значение момента импульса и его проекции. Состояние системы полностью определяется четверкой квантовых чисел: $l_1$, $l_2$, $m_1$ и $m_2$.

При заданном квантовом числе $l_1$ может быть $2l_1+1$ состояний с различными значениями квантового числа $m_1$. Точно так же при фиксированной величине $l_2$ может быть $2l_2+1$ состояний, различающихся проекцией момента, т. е. квантовым числом $m_2$. Поэтому при заданных моментах $L_1$ и $L_2$ имеется $(2l_1+1)(2l_2+1)$ различных квантовых состояний всей системы. Они отличаются друг от друга квантовыми числами $m_1$ и $m_2$.

Для оператора суммарного момента импульса:

$$\widehat{\vec{J}} = \widehat{\vec{L}}_1 + \widehat{\vec{L}}_2$$

операторы проекций имеют вид

$$\widehat{J}_x = \widehat{L}_{x_1} + \widehat{L}_{x_2},\quad \widehat{J}_y = \widehat{L}_{y_1} + \widehat{L}_{y_2},\quad \widehat{J}_z = \widehat{L}_{z_1} + \widehat{L}_{z_2},$$

а оператор квадрата полного момента импульса —

$$\widehat{J}^2 = (\widehat{\vec{L}}_1 + \widehat{\vec{L}}_2)^2 = \widehat{L}_1^2 + \widehat{L}_2^2 + 2(\widehat{\vec{L}}_1\widehat{\vec{L}}_2),$$

где

$$\widehat{\vec{L}}_1\widehat{\vec{L}}_2 = \widehat{L}_{x_1}\widehat{L}_{x_2} + \widehat{L}_{y_1}\widehat{L}_{y_2} + \widehat{L}_{z_1}\widehat{L}_{z_2}.$$

Непосредственная проверка расчетом коммутации операторов $\widehat{J}^2$ и $\widehat{J}_z$ с операторами, относящимися к подсистемам, дает следующие результаты. Оператор $\widehat{J}^2$ коммутирует с операторами $\widehat{L}_1^2$ и $\widehat{L}_2^2$, но не коммутирует с операторами $\widehat{L}_{z_1}$ и $\widehat{L}_{z_2}$:

$$\begin{gathered}[\widehat{J}^2, \widehat{L}_1^2] = 0,\ [\widehat{J}^2, \widehat{L}_2^2] = 0,\\ [\widehat{J}^2, \widehat{L}_{z_1}] \neq 0,\ [\widehat{J}^2, \widehat{L}_{z_2}] \neq 0.\end{gathered} \tag{15.4}$$

Оператор $\widehat{J}_z$ коммутирует как с операторами $\widehat{L}_1^2$ и $\widehat{L}_2^2$, так и с операторами $\widehat{L}_{z_1}$ и $\widehat{L}_{z_2}$:

$$[\widehat{J}_z, \widehat{L}_1^2] = 0,\ [\widehat{J}_z, \widehat{L}_2^2] = 0,\ [\widehat{J}_z, \widehat{L}_{z_1}] = 0,\ [\widehat{J}_z, \widehat{L}_{z_2}] = 0. \tag{15.5}$$

Отсюда видно, что не существует состояний системы, в которых одновременно имели бы определенные значения все шесть величин: $J$, $J_z$, $L_1$, $L_2$, $L_{z_1}$, $L_{z_2}$, но *имеются состояния с определенными значениями пяти величин:* $L_1$, $L_2$, $L_{z_1}$, $L_{z_2}$, $J_z$ *и состояния с определенными значениями четырех величин:* $J$, $J_z$, $L_1$, $L_2$.

Состояния первого типа описываются волновыми функциями (15.3). Уже говорилось, что эти функции являются собственными функциями операторов $\widehat{L}_1^2$, $\widehat{L}_2^2$, $\widehat{L}_{z_1}$ и $\widehat{L}_{z_2}$. Но они также и собственные функции оператора $\widehat{J}_z$:

$$\widehat{J}_z \psi_{l_1 l_2 m_1 m_2} = (\widehat{L}_{z_1} + \widehat{L}_{z_2})\,\varphi_{l_1 m_1}(x_1)\,\varphi_{l_2 m_2}(x_2) = \hbar(m_1 + m_2)\,\psi_{l_1 l_2 m_1 m_2}.$$

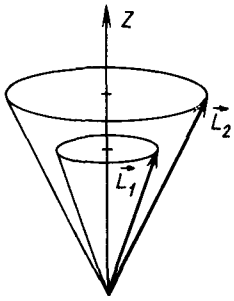


Рис 15.1

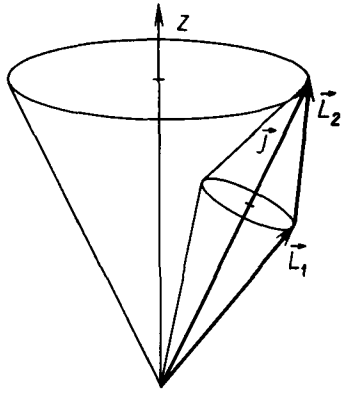


Рис 15 2.

Таким образом, оказалось, что функция (15.3) соответствует собственному значению: $J_z=\hbar m_j$, причем $m_j=m_1+m_2$.

Состояния второго типа характеризуются квантовыми числами $l_1$, $l_2$, $j$, $m_j$. Обозначим соответствующие им волновые функции через $\psi_{l_1 l_2 j m_j}(x_1, x_2)$. Они являются собственными для операторов $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{L}_1^2$, $\hat{L}_2^2$.

Две группы коммутирующих операторов: $\hat{L}_1^2$, $\hat{L}_2^2$, $\hat{L}_{z_1}$, $\hat{L}_{z_2}$, $\hat{J}_z$ и $\hat{L}_1^2$, $\hat{L}_2^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$ — пересекаются; три оператора: $\hat{L}_1^2$, $\hat{L}_2^2$ и $\hat{J}_z$ — входят как в ту, так и в другую группу. Поэтому число общих собственных функций для двух указанных наборов операторов должно быть одно и то же. Отсюда следует, что при одних и тех же значениях $l_1$ и $l_2$ число квантовых состояний второго типа равно числу квантовых состояний первого типа, т. е. $(2l_1+1)(2l_2+1)$.

Два разобранных способа описания системы находят наглядное отображение с помощью так называемой векторной модели. Первому из них соответствует независимая прецессия векторов $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$ вокруг оси $Oz$, изображенная на рисунке 15.1. В этом случае величины $L_1$, $L_2$, $L_{z_1}$, $L_{z_2}$ и $J_z$ являются интегралами движения. Кроме того, $J_z=L_{z_1}+L_{z_2}$.

При втором способе предполагается, что вокруг оси $Oz$ прецессирует вектор $\vec{J}$ (рис. 15.2). При этом сохраняются величина момента $J$ и его проекция на ось. Вектор $\vec{J}$ получается путем сложения векторов $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$ по правилу параллелограмма. Слагаемые векторы постоянны по модулю и располагаются под постоянным углом друг к другу (и к вектору $\vec{J}$). Они также прецессируют вокруг направления вектора суммарного момента.

**15.3. Задача о сложении моментов импульса.** Оператор полного механического момента, или момента импульса, системы определен ранее формулой (15.1), которая аналогична классической формуле

$$\vec{J}=\sum_{k=1}^{N}\vec{L}_k.$$

Для замкнутой макроскопической системы материальных точек суммарный момент $\vec{J}$ сохраняется во времени, а векторы $\vec{L}_k$ — величины переменные. Поэтому для вычисления $\vec{J}$ следует знать мгновенные значения $\vec{L}_k$ в один и тот же момент времени. Измерение $\vec{J}$ упрощается, если его можно произвести до начала взаимодействия в системе; искомая величина $\vec{J}$ остается неизменной далее при любом внутреннем взаимодействии.

Закон сохранения момента импульса замкнутой системы справедлив и для микрочастиц; поэтому полный момент можно находить по измеренным моментам ее невзаимодействующих частей, а результат использовать и после «включения» взаимодействия. Однако суммирование векторов $\hat{\vec{L}}_k$ в квантовой механике осложняется новыми свойствами, приобретаемыми моментом импульса в микромире. Определенные значения имеют модуль и одна проекция, они квантуются; определенные значения указанных величин для суммы и слагаемых имеются не во всех квантовых состояниях системы.

Задача на сложение моментов импульса в квантовой механике такова: *заданы модули моментов частиц системы; требуется определить допустимые значения модуля и проекций полного момента.* Так, в теории многоэлектронных атомов возникает вопрос о нахождении момента импульса электронной оболочки по известным (из задачи о частице в центральном поле) моментам отдельных электронов. Аналогично ставится вопрос о суммарном спине нескольких электронов в атоме, о спине ядра, состоящего из протонов и нейтронов.

Для получения правил сложения моментов импульса рассмотрим систему, состоящую из двух частей, не взаимодействующих между собой. По условию задачи они находятся в состоянии с определенными значениями $L_1$, $L_2$.

Нас интересуют значения модуля и проекции момента импульса системы $J$, $J_z$. Следовательно, нужно рассматривать функции состояния системы, собственные как для операторов $\hat{L}_1^2$ и $\hat{L}_2^2$, так и для операторов $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$. Нетрудно показать, что операторы $\hat{L}_1^2$, $\hat{L}_2^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$ коммутируют между собой, т. е. существуют состояния системы с определенными значениями указанных четырех величин: заданных $L_1$ и $L_2$ и искомых $J$ м $J_z$ (или заданных $l_1$ и $l_2$ и искомых $j$ и $m_j$).

Однако в таких состояниях проекции складываемых векторов $L_{1z}$ и $L_{2z}$ не имеют определенного значения, так как операторы $\hat{L}_{1z}$ и $\hat{L}_{2z}$ с оператором $\hat{J}^2$ не коммутируют. Поэтому ориентация векторов $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$ неопределенна, а их сумма может принимать несколько значений.

Если мы найдем $j_{\min}$ и $j_{\max}$, то остальные значения $j$ заключены между ними и отличаются друг от друга на единицу; это следует из общих правил квантования момента импульса (см. § 15, п. 1).

Для нахождения крайних значений $j$ воспользуемся нестрогим, но наглядным методом векторных диаграмм, приводящих к верному результату. На рисунке 15.3 систему складываемых векторов $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$ надо считать вращающейся вокруг сектора $\vec{J}$, а сам вектор $\vec{J}$ вращающимся вокруг оси $Oz$. Поэтому проекция $J_z$ постоянна, а $L_{1z}$ и $L_{2z}$ нет.

На рисунке 15.3, *а* показан случай наименьшего угла между векторами $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$, $J$ принимает наибольшее значение; соответственно на рисунке 15.3, *б* — наименьшее. Следовательно, искомые значе-

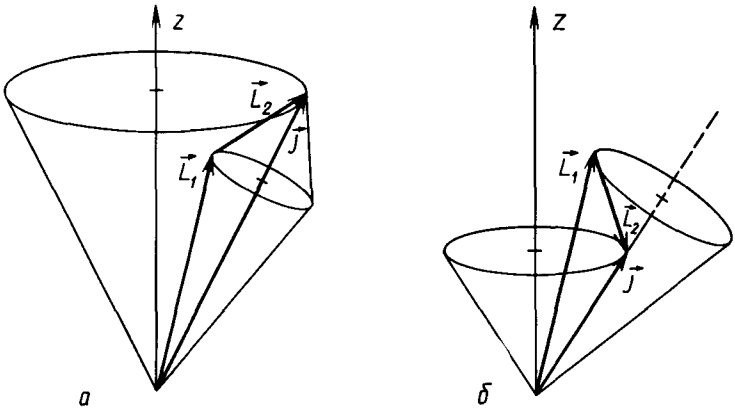


Рис 15.3

ния $J$ удовлетворяют неравенствам, справедливым для сторон треугольника:

$$L_1 - L_2 \leqslant J \leqslant L_1 + L_2. \qquad (15.6)$$

Проверим, что неравенства (15.6) выполняются, если $l_1 \geqslant l_2$ и $j_1 = l_1 - l_2$, а $j_2 = l_1 + l_2$.

Непосредственная подстановка этих значений в формулы для модулей векторов дает два верных неравенства:

$$\hbar\sqrt{l_1(l_1+1)} - \hbar\sqrt{l_2(l_2+1)} < \hbar\sqrt{(l_1-l_2)(l_1-l_2+1)},$$
$$\hbar\sqrt{l_1(l_1+1)} + \hbar\sqrt{l_2(l_2+1)} > \hbar\sqrt{(l_1+l_2)(l_1+l_2+1)},$$

в чем нетрудно убедиться, приводя их к очевидным.

Предложенные значения $j$ оказываются минимальным и максимальным: $j_1 = j_{\min}$, $j_2 = j_{\max}$, в чем убеждаемся, испытывая числа $j_1 - 1 = l_1 - l_2 - 1$ и $j_2 + 1 = l_1 + l_2 + 1$, которые нарушают неравенства (15.6). Правило для определения допустимых значений квантового числа $j$ найдено. Для $l_1 \geqslant l_2$ имеем

$$j = l_1 - l_2,\ l_1 - l_2 + 1,\ \ldots,\ l_1 + l_2,$$

или

$$l_1 - l_2 \leqslant j \leqslant l_1 + l_2. \qquad (15.7)$$

Если складываются только орбитальные моменты, то квантовое число $j$ целочисленно; если в число слагаемых входят спиновые моменты, то $j$ может принимать как целые, так и полуцелые значения. Но следует помнить, что в том и другом случае «шаг» для числа $j$ единичный, т. е. значения $j$ либо целые, либо полуцелые.

После того как значения квантового числа $j$ найдены, для каждого $j$ находят все возможные $m_j$:

$$m_j = -j,\ -(j-1),\ \ldots,\ (j-1),\ j.$$

Вместе с ними находятся и проекции $J_z$ по общему правилу квантования (10.12).

Результаты, полученные при анализе системы невзаимодействую-

щих частиц, справедливы для любой замкнутой системы, если квантовые числа $l_1$ и $l_2$ заданы до начала взаимодействия. Из формулы (15.7) по ним находятся сохраняющиеся при любом взаимодействии возможные значения $J$, а затем и $J_z$. (Разумеется, после начала взаимодействия определенных моментов импульса $L_1$ и $L_2$ уже не будет.)

Если некоторая система микрочастиц рассматривается по условиям задачи как целостный и точечный объект, то ее полный момент импульса есть спин. Правила сложения моментов позволят найти спины атомов и ядер в различных возможных для них квантовых состояниях через спины и орбитальные моменты входящих в них частиц. Причем сложение более чем двух моментов выполняется последовательно. Порядок сложения определяется интенсивностью взаимодействия и другими физическими соображениями.

В задаче о сложении моментов импульса отыскивают также функции состояния системы, соответствующие определенным значениям $L_1$, $L_2$, $J$, $J_z$, по заданным волновым функциям входящих в нее частиц. Однако мы не касаемся этого вопроса.

Пример 15.1. **Расчет полного момента импульса электрона в атоме водорода.** Допустим, что можно пренебречь спин-орбитальным взаимодействием, т. е. взаимодействием магнитных спиновых и орбитальных моментов.

Тогда электрон характеризуется независимыми орбитальным и спиновым моментами. Волновая функция электрона:

$$\psi = \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)\ u\ (m_s)$$

есть частный случай функции (15.3). Она описывает состояние с определенным орбитальным моментом $l$, его проекцией $m_l$, а также спином $s=\frac{1}{2}$ и его проекцией $m_s=\pm\frac{1}{2}$.

Из правил сложения моментов следует, что существуют состояния электрона с определенным орбитальным моментом $l$, спином $s=\frac{1}{2}$, а также полным моментом $j$ и его проекцией $m_j$. Указанный момент находится как сумма орбитального и спинового моментов, поэтому $j=l\pm\frac{1}{2}$. В $s$-состояниях орбитальный момент равен нулю. Тогда полный и спиновый моменты электрона совпадают. В этом случае квантовое число $j$ принимает только одно значение: $j=\frac{1}{2}$.

Волновые функции электрона в состояниях с заданным полным моментом обозначим так:

$$\psi_{nljm_j}(r, \theta, \varphi).$$

В общем случае выделить отдельно спиновый множитель нельзя. (Эта функция состояния представляет собой двухрядную матрицу-столбец.) Функция $\psi_{nljm_j}$ является собственной функцией операторов $\hat{H}$, $\hat{L}^2$, $\hat{S}^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$. Причем $\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}}$ и $\hat{J}_z=\hat{L}_z+\hat{S}_z$.

Пример 15.2. **Сложение спиновых моментов двух электронов.**

Спиновые функции системы из двух невзаимодействующих электронов можно записать в виде четырех произведений одночастичных функций:

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) u_2\left(\frac{1}{2}\right),\ m_{1s}=\frac{1}{2},\ m_{2s}=\frac{1}{2},$$

$$
\begin{aligned}
&u_1\left(-\frac{1}{2}\right)u_2\left(-\frac{1}{2}\right),\ m_{1s}=-\frac{1}{2},\ m_{2s}=-\frac{1}{2},\\
&u_1\left(\frac{1}{2}\right)u_2\left(-\frac{1}{2}\right),\ m_{1s}=\frac{1}{2},\ m_{2s}=-\frac{1}{2},\\
&u_1\left(-\frac{1}{2}\right)u_2\left(\frac{1}{2}\right),\ m_{1s}=-\frac{1}{2},\ m_{2s}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{15.8}
$$

Они соответствуют состояниям, в которых заданы не только спины частиц $\left(s_1=\frac{1}{2},\ s_2=\frac{1}{2}\right)$, но и проекции спинов обоих электронов. Кроме того, в этих состояниях имеет определенное значение проекция полного момента: $S_z=S_{1z}+S_{2z}$; мы получаем следующие ее значения: $S_z=\hbar m_s$, где $m_s=0,\ 1,\ -1$. Соответственно

$$
\left.
\begin{aligned}
&m_s=1,\ u_1\left(\frac{1}{2}\right)u_2\left(\frac{1}{2}\right), && m_s=0,\ u_1\left(\frac{1}{2}\right)u_2\left(-\frac{1}{2}\right),\\
&m_s=-1,\ u_1\left(-\frac{1}{2}\right)u_2\left(-\frac{1}{2}\right), && m_s=0,\ u_1\left(-\frac{1}{2}\right)u_2\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
\right\}
\tag{15.9}
$$

Квантовое число полного спина системы принимает значения от $s_1-s_2$ до $s_1+s_2$. Следовательно, $s=0$ или $s=1$. При $s=1$ возможны состояния с $m_s=0,\ \pm 1$; при $s=0$ может быть только $m_s=0$.

Запишем спиновые функции системы двух электронов, отвечающие состояниям с заданными значениями $s$ и $m_s$ и определенному классу симметрии:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&m_s=1,\ u_C=u_1\left(\frac{1}{2}\right)u_2\left(\frac{1}{2}\right),\\
&s=1,\ m_s=0,\ u_C=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_1\left(\frac{1}{2}\right)u_2\left(-\frac{1}{2}\right)+u_1\left(-\frac{1}{2}\right)u_2\left(\frac{1}{2}\right)\right],\\
&m_s=-1,\ u_C=u_1\left(-\frac{1}{2}\right)u_2\left(-\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}
\right.
\tag{15.10}
$$

$$
s=0,\ m_s=0,\ u_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_1\left(\frac{1}{2}\right)u_2\left(-\frac{1}{2}\right)-u_1\left(-\frac{1}{2}\right)u_2\left(\frac{1}{2}\right)\right].
$$

Заметим, что выражения (15.10) являются частным случаем общей формулы (14.19). Они обладают определенной симметрией относительно перестановки частиц. Данные функции мы будем использовать в качестве симметричных и антисимметричных спиновых множителей в полной волновой функции системы (см. (14.7)).

Пример 15.3. **Сложение спиновых моментов нескольких электронов.**

Возьмем сначала три частицы. Складывая спины первого и второго электронов, получаем систему со спином 0 или 1. Добавляя спин третьего электрона, получаем значения квантового числа суммарного спина всех трех частиц: $s=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$.

Вообще, для нечетного числа частиц с полуцелым спином имеем

$$
s=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \ldots,\ \frac{N}{2},
$$

для четного —

$$
s=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2}.
$$

Пример 15.4. **Сложение орбитальных моментов двух электронов.**

Пусть $l$ — квантовое число суммарного орбитального момента:

$$
l=l_1+l_2,\ l_1+l_2-1,\ \ldots,\ l_1-l_2\ (l_1\geqslant l_2).
$$

Если второй электрон находится в $s$-состоянии, то $l_2=0$ и $l=l_1$. Если оба электрона — в $p$-состоянии, то $l_1=1$, $l_2=1$ и $l=0,\ 1,\ 2$ и т. д. Соответственно для каждого значения $l$ имеем ряд значений $m_l$: $m_l=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm l$.