(см. формулы (11.21), (11.11), (10.11)) и учитывая, что $\rho=\frac{r}{a}$, вычислим интегралы при векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, начиная с интегрирования по угловым переменным.

Ответ. $\vec{p}_{2p,\,1s}=\frac{3}{4}ea\vec{k}$. Излучение поляризовано по оси Oz.

4. Найдите правила отбора для гармонического осциллятора, находящегося в однородном электрическом поле, напряженность которого изменяется по закону $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$. Поле направлено по оси Ox. Заряд частицы равен e.

Указание. Воспользуйтесь формулой

$$zH_n=nH_{n-1}+\frac{1}{2}H_{n+1}.$$

Ответ. $\Delta n=\pm 1$, поэтому осциллятор поглощает и испускает кванты света с энергией $\hbar\omega$.

ГЛАВА VIII. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Отклонение классических частиц от первоначального направления движения, вызванное взаимодействиями с другими частицами, называют рассеянием. В квантовой физике рассеяние понимается шире, так как при взаимодействиях могут происходить изменения внутреннего состояния микрообъектов, т. е. превращения одних частиц в другие. Типичные эксперименты по рассеянию состоят в следующем: имеются неподвижные частицы — мишени, на них направлен поток частиц — снарядов. В результате взаимодействия часть частиц из начального потока выбывает, изменяя характер движения или превращаясь в другие частицы. Различают упругое рассеяние, при котором изменяется только направление движения, но не изменяются число частиц, их энергия и внутренние характеристики — масса покоя, заряд и др.,— и неупругое рассеяние, в результате которого изменяется энергия или вид частиц, появляются новые частицы.

В настоящее время опыты по рассеянию являются основным источником информации при изучении ядер и элементарных частиц, а вместе с тем и при познании фундаментальных свойств и строения материи.

§ 23. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ

23.1. Дифференциальное и полное сечения рассеяния. В нашем курсе изучается только упругое рассеяние. Но основные характеристики рассеяния общие для упругих и неупругих процессов — это *дифференциальное* и *полное сечения рассеяния*. Дифференциальное сечение определяется отношением числа рассеянных в единицу вре-

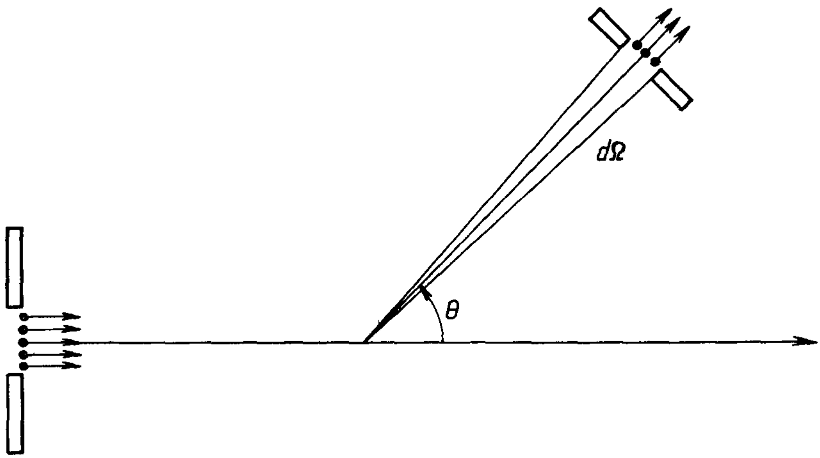

Рис 23 1

мени в элемент телесного угла $d\Omega$ частиц к плотности потока падающих частиц (рис. 23.1):

$$d\sigma = \frac{dN}{j_{\text{пад}}}. \tag{23.1}$$

Величину dN можно представить в виде произведения плотности потока рассеянных частиц на величину площадки dS, перпендикулярной этому потоку (поток берется в направлении, заданном углами θ и φ):

$$dN = j_{\text{рас}}(\theta, \varphi)\, dS,$$

откуда

$$d\sigma = \frac{j_{\text{рас}}}{j_{\text{пад}}}\, dS. \tag{23.1a}$$

Отсюда видно, что величина $d\sigma$ имеет размерность площади и зависит от углов рассеяния θ и φ.

Если все частицы рассеиваются независимо друг от друга, то увеличение интенсивности падающего пучка в несколько раз вызовет увеличение во столько же раз интенсивности рассеянного пучка. Поэтому величина сечения рассеяния не зависит от числа падающих на мишень частиц и определяется только их характеристиками и законом взаимодействия с мишенью. Ниже имеется в виду, что сечение рассеяния относится к одной частице — рассеивающему центру.

В числителе и знаменателе дроби в формуле (23.1а) можно перейти от плотностей потоков частиц к соответствующим плотностям потока вероятности. После этого формулы могут применяться и к одной рассеянной частице. Дифференциальное сечение рассеяния определяет в этом случае вероятность того, что частица испытает рассеяние в элементарный телесный угол $d\Omega$.

Полным или интегральным сечением рассеяния называется отношение числа рассеянных в единицу времени по всем направлениям частиц к плотности потока падающих частиц:

$$\Sigma = \frac{N_{\text{рас}}}{j_{\text{пад}}}.$$

Связь полного сечения с дифференциальным дается соотношением

$$\Sigma = \int d\sigma.$$

Полное сечение рассеяния, так же как и дифференциальное, имеет размерность площади. Его значение определяет размеры перпендикулярной потоку площадки, попадание в которую обязательно вызовет отклонение в движении частиц. Для уяснения смысла полного сечения можно рассмотреть макроскопический пример (рис. 23.2). Если обстреливать шар дробинками, движущимися по законам классической механики, то полное сечение равно поперечному сечению шара. И в микромире, если силы взаимодействия частиц являются короткодействующими и радиус взаимодействия мал, полное сечение рассеяния может быть условно принято за поперечное сечение мишени.

Дифференциальное и полное сечения рассеяния могут быть введены и для характеристики неупругого рассеяния отдельно для каждого типа реакций, происходящих при столкновении. Суммирование по всем реакциям — «каналам» — рассеяния дает полное дифференциальное и полное интегральное сечения рассеяния. (Следует учитывать, что вид рассеянных частиц может не совпадать с исходным и что частицы некоторых сортов получаются в результате нескольких процессов.)

В экспериментах по рассеянию дифференциальные и полные сечения измеряются непосредственно с помощью подсчета рассеянных в фиксированных направлениях частиц при известной интенсивности падающего потока. В качестве мишени берется не одна частица, а тонкий слой вещества, так что результат должен быть пересчитан с учетом числа рассеивающих центров и их расположения — геометрии мишени.

Теория рассеяния, опираясь на основные уравнения механики, ставит и решает задачу о нахождении (расчете) сечения рассеяния

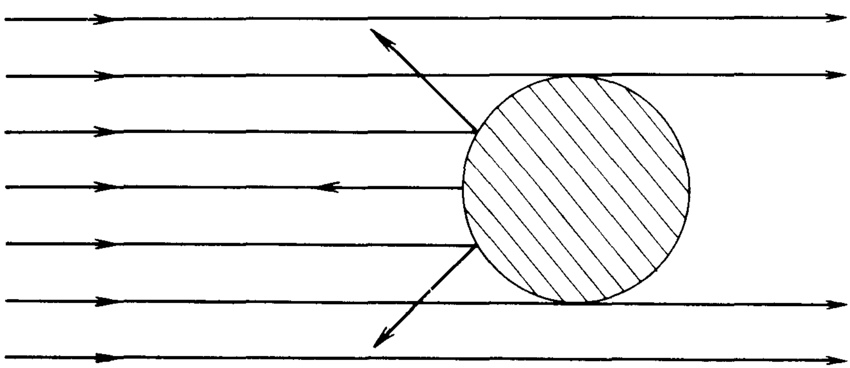

Рис 23 2

в различных случаях взаимодействия между мишенью и рассеиваемыми частицами. В классической механике она решается с помощью основного уравнения динамики или его следствий, в квантовой механике решение этой задачи опирается на уравнение Шредингера. Как и ранее в курсе, оно решается для заданного гамильтониана, но в отличие от изучавшихся ранее финитных движений при рассеянии движение рассеиваемых частиц инфинитно.

23.2. Рассеяние на силовом центре. Амплитуда рассеяния. Допустим, что взаимодействие рассеивающей и налетающей частиц описывается оператором потенциальной энергии $\widehat{U}(\vec{r})$. Это значит, что нам нужно исследовать движение частицы-снаряда и частицы-мишени при заданном гамильтониане системы. Такая задача сводится к движению одной (рассеиваемой) частицы с приведенной массой μ относительно другой — рассеивающего силового центра (см задачу двух частиц, § 14).

Запишем уравнение Шредингера:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+U(\vec{r})\right]\psi(r,\ \theta,\ \varphi)=E\psi(r,\ \theta,\ \varphi). \tag{23.2}$$

Движение заведомо инфинитно, поэтому спектр значений энергии непрерывен.

Пусть поток падающих частиц движется вдоль оси Oz, а частица-мишень находится в начале координат. До рассеяния на больших расстояниях от начала координат падающие частицы описываются плоской волной:

$$\psi_{\text{пад}}=e^{ikz},\quad k=\frac{p}{\hbar}. \tag{23 3}$$

(При больших r взаимодействием с силовым центром можно пренебречь)

Рассеянные частицы движутся в различных направлениях от мишени. Можно считать, что вдали от центра они вновь движутся свободно. Имея в виду, что вероятность нахождения частицы в единице объема убывает пропорционально квадрату расстояния до рассеивающего центра, запишем функцию состояния рассеянной частицы в следующем виде:

$$\psi_{\text{рас}}=\frac{f(\theta,\ \varphi)}{r}e^{ikr}. \tag{23.4}$$

Функция $f(\theta, \varphi)$ определяет вероятность рассеяния частицы по различным направлениям от центра и называется *амплитудой рассеяния*

Вычислим плотность потока вероятности в падающей и рассеянной волнах. Используя формулы (3.23) и (3.15), находим

$$j_{\text{пад}}=(j_z)_{\text{пад}}=\frac{p}{\mu},\quad j_{\text{рас}}=(j_r)_{\text{рас}}=\frac{p}{\mu r^2}\,|f(\theta,\ \varphi)|^2$$

Сейчас можно записать выражение для дифференциального сечения рассеяния. На основании соотношения (23 1а) получаем

$$d\sigma=|f(\theta,\ \varphi)|^2\,d\Omega. \tag{23.5}$$

Из формулы (23.5) видно, что квадрат модуля амплитуды рассеяния определяет дифференциальное сечение рассеяния, т. е. играет роль *плотности вероятности* рассеяния частицы в направлении θ, φ. В теории задача о рассеянии, как правило, сводится к расчету амплитуды рассеяния по заданному силовому полю $U(\vec{r})$. (После этого находятся и сечения рассеяния $d\sigma$, Σ.)

23.3. Общий вид амплитуды рассеяния на силовом центре. На основании формул (23.3) и (23.4) вдали от начала координат функцию состояния частицы в силовом поле рассеивающего центра следует представить как суперпозицию волн $\psi_{\text{пад}}$ и $\psi_{\text{рас}}$:

$$\psi = e^{ikz} + \frac{f(\theta, \varphi)}{r} e^{ikr}. \tag{23.6}$$

Определение неизвестной функции $f(\theta, \varphi)$ — амплитуды рассеяния — производится путем отыскания решения уравнения Шредингера (23.2) в виде (23.6).

Задача эта может быть решена для конкретных силовых полей, заданных функцией $U(\vec{r})$ в простейших случаях, да и тогда весьма сложна в математическом отношении. Мы воспользуемся следующим выражением для функции состояния, справедливым для любых $U(\vec{r})$:

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int U(r')\,\psi(r')\, e^{-ik\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}} dV' \quad (r \gg 1,\ |z| \gg 1) \tag{23.7}$$

Искомая амплитуда рассеяния находится из выражения (23.7) с учетом соотношения (23.6):

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int U(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')\, e^{ik\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}} dV' \tag{23.8}$$

Формула (23.8) является общей в том смысле, что выражает $f(\theta, \varphi)$ с помощью квадратур для любых функций $U(\vec{r})$. Однако мы далеки еще от окончательного ответа; в выражения (23.7) и (23.8) входит неизвестная функция $\psi(\vec{r})$ — решение уравнения для рассеяния (23.2). И все же достигнуто значительное продвижение в нахождении амплитуды рассеяния, ибо с помощью формулы (23.8) можно произвести ее приближенный расчет. Это будет выполнено в следующем пункте.

Для вывода формулы (23.7) покажем сначала, что решение уравнения (23.2) может быть представлено в виде

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ikR}}{R} U(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')\, dV', \tag{23.8 а}$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ и $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$.

Подействуем оператором Лапласа на обе части равенства (23.8 а):

$$\Delta\psi = -k^2 e^{ikz} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int U(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')\, \Delta\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) dV'. \tag{23.8 б}$$

Нетрудно проверить, что

$$\Delta\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)=e^{ikR}\Delta\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{R}\Delta(e^{ikR})+2\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\nabla(e^{ikR}). \quad (23.8\text{ в})$$

Кроме того, известно, что

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right)=-4\pi\delta(\vec{R})=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}').$$

Подставим это выражение в формулу (23.8 в) и произведем **дифференцирование** во втором и третьем слагаемых:

$$\Delta\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)=-4\pi\delta(\vec{R})\,e^{ikR}-k^2\frac{e^{ikR}}{R}.$$

Если это соотношение подставить в формулу (23.8 б) и проинтегрировать по $\vec{r}'$, то получим

$$\Delta\psi=-k^2e^{ikz}+\frac{\mu k^2}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ikR}}{R}U(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')\,dV'+\frac{2\mu}{\hbar^2}U(\vec{r})\,\psi(\vec{r}),$$

или

$$\Delta\psi=-k^2\psi+\frac{2\mu}{\hbar^2}U(\vec{r})\,\psi,$$

что совпадает с уравнением (23.2).

Доказано, что функция $\psi(\vec{r})$, определенная равенством (23.8 а), является решением уравнения (23.2).

Далее, пусть размеры области, в которой потенциальная энергия $U(\vec{r})$ заметно отлична от нуля, много меньше рассматриваемых расстояний. В таком случае можно воспользоваться приближенной формулой

$$R=\sqrt{r^2-2\vec{r}\vec{r}'+r'^2}=\simeq r-\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}.$$

Тогда при $r\to\infty$

$$\psi(\vec{r})=e^{ikz}-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int U(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')\,e^{-ik\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}}\,dV'.$$

Формула (23.7) верна.

23.4. Определение амплитуды рассеяния в первом приближении теории возмущений. Для определения амплитуды рассеяния по формуле (23.8) обычно прибегают к приближенным методам.

Применим теорию возмущений. Невозмущенной системе соответствует свободное движение частицы без взаимодействия с силовым центром, так что функция состояния в нулевом приближении известна:

$$\psi_0(\vec{r})=e^{ikz}. \quad (23.9)$$

В этом приближении рассеяния нет:

$$f_0(\theta,\varphi)=0.$$

Если подставить функцию (23.9) вместо $\psi(\vec{r})$ в формулу (23.8), то получим выражение для амплитуды рассеяния в первом приближении теории возмущений:

$$f(\theta,\varphi)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int U(\vec{r}')\,e^{ikz'}e^{-ik\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}}\,dV'. \quad (23.10)$$

Для придания формуле (23.10) вида, удобного при вычислениях, введем векторы $\vec{K}_0$ и $\vec{K}$. Вектор $\vec{K}_0$ направлен вдоль оси Oz в сторону движения падающей частицы. Вектор $\vec{K}$ показывает направление движения рассеянной частицы. Рассеяние упругое, поэтому $|\vec{K}| = |\vec{K}_0|$.

Формулу (23.10) перепишем с учетом введенных обозначений:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{K}\vec{r}'} U(\vec{r}') e^{i\vec{K}_0\vec{r}'} dV'. \tag{23.11}$$

Такова амплитуда рассеяния на силовом центре в первом приближении теории возмущений. Если функция $U(\vec{r}')$ задана, то $f(\theta, \varphi)$ вычисляется.

Характерно, что амплитуда рассеяния выражена через интеграл, представляющий собой матричный элемент перехода от начального состояния движения к конечному под действием возмущения $U(\vec{r})$:

$$f = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} U_{\vec{K}_0\vec{K}}. \tag{23.12}$$

При этом предполагается, что движение после рассеяния можно описать плоской волной $e^{i\vec{K}\vec{r}}$ (см. о квантовых переходах, § 21).

Это не является случайным. К формуле (23.12) можно прийти другим путем на основе нестационарной теории возмущений. Ход рассуждений примерно такой.

Частица до и после рассеяния описывается гамильтонианом невозмущенного состояния $\hat{H}_0$. Пусть его собственные функции ψ_n и ψ_m определяют начальное и конечное состояния. При $t = -\infty$ частица двигалась свободно, затем «включается» возмущение — частица испытывает действие поля $U(\vec{r})$, после чего она (в пределе при $t = \infty$) снова движется свободно. Если по этим данным вычислить вероятность перехода из состояния n в состояние m и связать ее с сечением рассеяния, то получится формула (23.12).

§ 24. РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

24.1. Сечение рассеяния в борновском приближении. Очень часто силы взаимодействия между частицами являются центральными. В таком случае поле рассеивающего центра обладает центральной симметрией. Если $U = U(r)$, то формула (23.11) допускает упрощения. Вспомним, что $|\vec{K}_0| = |\vec{K}| = k$, вектор $\vec{K}_0$ направлен вдоль оси Oz, а вектор $\vec{K}$ расположен под углом θ к этой оси. Введем вектор $\vec{q} = \vec{K}_0 - \vec{K}$, и формула (23.11) запишется компактнее:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int U(\vec{r}') e^{i\vec{q}\vec{r}'} dV'. \tag{24.1}$$

Выражение для амплитуды рассеяния (24.1) называется формулой Борна, а основанные на ней расчеты — борновским приближением.