Для придания формуле (23.10) вида, удобного при вычислениях, введем векторы $\vec{K}_0$ и $\vec{K}$. Вектор $\vec{K}_0$ направлен вдоль оси $Oz$ в сторону движения падающей частицы. Вектор $\vec{K}$ показывает направление движения рассеянной частицы. Рассеяние упругое, поэтому $|\vec{K}|=|\vec{K}_0|$.

Формулу (23.10) перепишем с учетом введенных обозначений:

$$f(\theta, \varphi)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{K}\vec{r}'}U(\vec{r}')\,e^{i\vec{K}_0\vec{r}'}dV'. \qquad (23.11)$$

Такова амплитуда рассеяния на силовом центре в первом приближении теории возмущений. Если функция $U(\vec{r}')$ задана, то $f(\theta, \varphi)$ вычисляется.

Характерно, что амплитуда рассеяния выражена через интеграл, представляющий собой матричный элемент перехода от начального состояния движения к конечному под действием возмущения $U(\vec{r})$:

$$f=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\,U_{\vec{K}_0\vec{K}}. \qquad (23.12)$$

При этом предполагается, что движение после рассеяния можно описать плоской волной $e^{i\vec{K}\vec{r}}$ (см. о квантовых переходах, § 21).

Это не является случайным. К формуле (23.12) можно прийти другим путем на основе нестационарной теории возмущений. Ход рассуждений примерно такой.

Частица до и после рассеяния описывается гамильтонианом невозмущенного состояния $\hat{H}_0$. Пусть его собственные функции $\psi_n$ и $\psi_m$ определяют начальное и конечное состояния. При $t=-\infty$ частица двигалась свободно, затем «включается» возмущение — частица испытывает действие поля $U(\vec{r})$, после чего она (в пределе при $t=\infty$) снова движется свободно. Если по этим данным вычислить вероятность перехода из состояния $n$ в состояние $m$ и связать ее с сечением рассеяния, то получится формула (23.12).

## § 24. РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

**24.1. Сечение рассеяния в борновском приближении.** Очень часто силы взаимодействия между частицами являются центральными. В таком случае поле рассеивающего центра обладает центральной симметрией. Если $U=U(r)$, то формула (23.11) допускает упрощения. Вспомним, что $|\vec{K}_0|=|\vec{K}|=k$, вектор $\vec{K}_0$ направлен вдоль оси $Oz$, а вектор $\vec{K}$ расположен под углом $\theta$ к этой оси. Введем вектор $\vec{q}=\vec{K}_0-\vec{K}$, и формула (23.11) запишется компактнее:

$$f(\theta, \varphi)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int U(\vec{r}')\,e^{i\vec{q}\vec{r}'}\,dV'. \qquad (24.1)$$

Выражение для амплитуды рассеяния (24.1) называется формулой Борна, а основанные на ней расчеты — борновским приближением.

При вычислении интеграла в формуле (24.1) направим ось $Oz$ по вектору $q$:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} U(r')\, e^{iqr'\cos\theta'} r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'.$$

Интегрируя по переменной $\varphi'$, получаем

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{\hbar^2}\int_0^\infty U(r')\, r'^2 dr' \int_0^\pi e^{iqr'\cos\theta'} \sin\theta' d\theta'.$$

Сделаем подстановку $x = \cos\theta'$:

$$\int_0^\pi e^{iqr'\cos\theta'} \sin\theta' d'\theta' = \int_{-1}^{1} e^{iqr'x} dx = \frac{e^{iqr'x}}{iqr'}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin qr'}{qr'}.$$

Опуская штрих у переменной интегрирования $r'$, приходим к следующему выражению для амплитуды рассеяния:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{2\mu}{q\hbar^2}\int_0^\infty U(r)\, r \sin qr dr. \tag{24.2}$$

Подставляя найденное значение амплитуды рассеяния в формулу (23.5) и учитывая, что

$$q = 2k\sin\frac{\theta}{2},$$

получаем сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{\mu^2}{k^2\hbar^4\sin^2\frac{\theta}{2}}\left[\int_0^\infty U(r)\, r\sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right) dr\right]^2 d\Omega. \tag{24.3}$$

Формула (24.3) и является окончательной для расчета сечения рассеяния в центральном поле в первом приближении теории возмущений. Дифференциальное сечение рассеяния оказалось не зависящим от угла $\varphi$, т. е. в центральных полях всегда имеет место осевая симметрия рассеяния. (Этот результат не связан с приближенным характером формулы (24.3).)

При малых углах, когда $\theta \to 0$, можно принять

$$\sin\left(2kr\sin\frac{\theta}{2}\right) \simeq 2kr\sin\frac{\theta}{2}.$$

Тогда

$$d\sigma = \frac{4\mu^2}{\hbar^2}\left[\int_0^\infty U(r)\, r^3 dr\right]^2 d\Omega.$$

В этом случае рассеяние вообще не зависит от направления в пространстве, т. е. изотропно. Не зависит оно и от энергии рассеиваемых частиц.

Дополнительный анализ показывает, что условия применимости борновского приближения могут быть записаны в виде двух неравенств

$$\frac{\mu U_0}{\hbar^2} d^2 \ll 1, \quad \frac{\mu U_0 d}{k\hbar^2} \ll 1.$$

В них $d$ — радиус области, где потенциальная энергия $U(r)$ заметно отлична от нуля; параметр $U_0$ характеризует интенсивность поля в этой части пространства. Если кривая $U(r)$ образует потенциальную яму, то выполнение первого неравенства приводит к отсутствию связанных состояний. Второе неравенство выполняется при высоких энергиях. Быстрые частицы слабо отклоняются полем, и чем больше их скорость, тем ближе их движение к свободному.

**24.2. Формула Резерфорда.** В качестве примера применения формулы (24.3) рассмотрим рассеяние быстрых $\alpha$-частиц на ядрах атомов. Потенциал поля запишем в следующем виде:

$$U = \frac{\beta}{r} e^{-\lambda r}, \quad \beta = \varkappa 2 Z e^2,$$

где первый сомножитель $\frac{\beta}{r}$ описывает кулоновское отталкивание $\alpha$-частицы от ядра, а с помощью экспоненциального сомножителя учтено, что за пределами атома электрическое поле быстро затухает, так как электроны экранируют ядро. (Прямое взаимодействие $\alpha$-частицы с электронами практически не сказывается на ее движении вследствие большой разницы в массах. Поэтому оно и не включено в формулу для потенциала.)

Вычислим интеграл, входящий в сечение рассеяния (24.3). Он легко берется, если использовать соотношение

$$\sin qr = \frac{1}{2i}\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right).$$

Получаем

$$\int_0^\infty U(r)\, r \sin qr dr = \beta \int_0^\infty e^{-\lambda r} \sin qr dr = -\frac{\beta}{q\left(1+\frac{\lambda^2}{q^2}\right)}.$$

Подставим найденное значение интеграла в формулу (24.3):

$$d\sigma = \left(\frac{\varkappa \mu Z e^2}{\hbar^2 k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \frac{d\Omega}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2}. \qquad (24.4)$$

Постоянная $\lambda$ очень мала, поэтому слагаемым $\frac{\lambda^2}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$ можно пренебречь. Тогда

$$d\sigma = \left(\frac{\varkappa Z e^2 \mu}{p^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \qquad (24.5)$$

где $p=\hbar k$ — импульс частицы. Эта формула была первоначально выведена сотрудниками Резерфорда с помощью классической механики без учета экранирования ядра. В данном случае классическая и квантовая теории рассеяния дают один и тот же результат, причем соотношение (24.5) является точным (см. ч. I, § 28).

Рассеяние в поле с кулоновским потенциалом имеет особенность: при $\theta \to 0$ амплитуда рассеяния неограниченно растет, обращается в бесконечность также и полное сечение рассеяния. Причина заключается в том, что кулоновское поле медленно спадает при $r \to \infty$, так что частицы испытывают отклонение, проходя на любых расстояниях от ядра. Число частиц, рассеянных на малые углы, становится сколь угодно большим. Учет экранирования ядра электронами, как показывает формула (24.4), устраняет эту особенность; сечение рассеяния становится конечным.

**24.3. Матрица рассеяния.** Обсудим с качественной стороны процесс рассеяния, опираясь на понятие о квантовом переходе. При этом будем иметь в виду как упругие, так и неупругие столкновения и тем самым познакомимся с теоретическим подходом к процессам взаимных превращений частиц.

До взаимодействия и после него имеется система свободных частиц, которая описывается гамильтонианом $\hat{H}_0$. Состав же системы до и после столкновения может быть различен.

Пусть $\varphi_n$ — волновая функция начального состояния системы. Это одна из собственных функций самосопряженного оператора $\hat{H}_0$. Конечному состоянию отвечает некоторая функция состояния $\psi$, ее можно представить в виде суперпозиции собственных функций $\hat{H}_0$:

$$\psi=\sum_k S_{kn}\varphi_k.$$

Коэффициенты $S_{kn}$ определяют вероятности перехода из $n$-го состояния в $k$-е:

$$W_{kn}=|S_{kn}|^2.$$

Набор чисел $S_{kn}$ носит название *матрицы рассеяния* или $S$-матрицы. Если $S$-матрица известна (найдена), то задача о рассеянии решена: через величины $|S_{kn}|^2$ можно найти сечения рассеяния для каждого из возможных каналов реакции, т. е. вероятность возникновения различных частиц при взаимодействии исходных между собой.

Матрица рассеяния в принципе может быть найдена из решения уравнения Шредингера (или соответствующих уравнений релятивистской квантовой физики). Значения матричных элементов $S_{kn}$ вычисляются с помощью теории возмущений в общих чертах так же, как находились коэффициенты $C_{mn}$ в § 21, причем в формулах (21.16) и (21.17) нужно произвести интегрирование по $t$ в пределах от $-\infty$ до $\infty$. Допустим, что эти формулы пригодны для вычисления элементов $S$-матрицы. В соотношении (21.17) фигурируют промежуточные состояния невозмущенной системы. В данном случае промежуточным состояниям можно сопоставить наборы частиц, отличающиеся от их начального и конечного наборов. Частицы, живущие короткое время и соответствующие промежуточным состояниям, называются *виртуальными*. Их непосредственное обнаружение с физической точки зрения невозможно, ибо энергия виртуальных частиц не превышает неопределенность энергии системы реальных частиц, находящейся при взаимодействии в нестационарном состоянии. (Согласно соотношению неопределенностей $\Delta E\tau \geqslant 2\pi\hbar$; $\tau$ — время жизни, а $\Delta E$ — энергия виртуальных частиц.) Несмотря на невозможность «самостоятельного» существования, виртуальные частицы являются переносчиками всех взаимодействий между реальными частицами в современной релятивистской квантовой теории.

Обычно считают, что для виртуальных частиц нарушена связь между энергией и импульсом, даваемая формулой Эйнштейна (см. ч. II, (4.15)). Однако законы сохранения энергии импульса, момента импульса, заряда в системе реальных частиц выполняются и при участии виртуальных частиц. Существование виртуальных частиц подтверждается многими микроявлениями, которые объясняются квантово-релятивистской моделью взаимодействия.

Рассмотрим *электромагнитные взаимодействия* при высоких энергиях между электронами, позитронами и фотонами. Функции состояния этих частиц находятся из невозмущенных релятивистских уравнений для свободных частиц, а элементы матрицы рассеяния находятся через матричные элементы оператора взаимодействия заряженной частицы с полем во втором и следующих приближениях теории возмущений. Каждому приближению теории сопоставляется обмен взаимодействующих частиц виртуальными фотонами.

Существенно, что матричные элементы содержат малый множитель — безразмерную постоянную тонкой структуры: $\alpha=\frac{\varkappa e^2}{\hbar c}\simeq\frac{1}{137}$ . При нахождении элементов матрицы рассеяния получаются ряды, содержащие слагаемые, пропорциональные $\alpha$, $\alpha^2$ и т. д., что обусловливает хорошую сходимость рядов и высокую степень точности начальных приближений. Таким образом, малость постоянной $\alpha$ лежит в основе многих успехов квантовой электродинамики.

Другие взаимодействия между элементарными частицами также исследуются методами теории возмущений, но здесь встречаются большие трудности, так как в ряде случаев неизвестен точный вид оператора взаимодействия, а константа связи, аналогичная постоянной $\alpha$, не мала. (Ее значение при сильных взаимодействиях оказывается порядка единицы и более.) Тем не менее в настоящее время *теорию сильных взаимодействий — квантовую хромодинамику* — удалось развить по той же принципиальной схеме взаимодействия с помощью виртуальных частиц. Оказалось, что при малом расстоянии между составными частями адронов — кварками — сильные взаимодействия ослабевают и константа взаимодействия становится малой, что и позволяет применять теорию возмущений. Переносчиком взаимодействия оказывается новая виртуальная частица — глюон (см. [20]).

Ранее оригинальный метод исследования, не утративший значения и в настоящее время, был предложен Гейзенбергом. Можно изучать взаимодействие частиц, не обращаясь к уравнению Шредингера или другим каким-либо квантовым уравнениям, а основываясь прямо на свойствах $S$-матрицы. Теория строится на некоторых аксиоматических положениях, достаточных для определения матричных элементов $S_{mn}$ и описания экспериментальных данных. Матрица рассеяния должна удовлетворять ряду требований, выполнение которых необходимо, чтобы она давала информацию о реальных процессах. В частности, на нее накладывается условие унитарности:

$$\sum_k S^*_{mk}S_{kn}=\delta_{mn},$$

которое связано с тем, что сумма вероятностей рассеяния по всем возможным каналам реакций должна равняться единице. Элементы матрицы не зависят от выбора системы координат, они являются аналитическими функциями энергии и других параметров. При обращении времени матрица не изменяется, что приводит к одинаковой вероятности прямых и обращенных во времени переходов.

## Методические указания и рекомендации

1. Теория рассеяния — важное составное звено квантовой механики. Ряд понятий и методов теории используется в ядерной физике и в физике элементарных частиц. Нельзя обойтись без них и в соответствующих разделах курса теоретической физики пединститута. Поэтому сущность явления рассеяния, его основные характеристики — сечение и амплитуда рассеяния, квантово-механическая их трактовка и постановка вопроса о теоретическом расчете сечений с помощью уравнения Шредингера — должны твердо усваиваться студентами.

Что же касается довольно сложных выкладок (§ 23, п. 2 и § 24, п. 1), то, по-видимому, нужно добиваться понимания их основных этапов. Ведь, по сути дела, в вопросах рассеяния мы вступаем в об-