пульса в системе наблюдателя направления мировой линии у частицы и античастицы противоположны.

Введение наряду с частицами соответствующих им античастиц в релятивистской области приводит к совершенно новой трактовке волновой функции. В самом деле, общее решение релятивистского уравнения должно быть записано как линейная суперпозиция зарядово-сопряженных решений:

$$\psi=A_1 e^{\frac{i}{\hbar}(px-\varepsilon t)}+A_2 e^{\frac{i}{\hbar}(px+\varepsilon t)}. \tag{25.16}$$

В соответствии с этим в релятивистской квантовой теории, вообще говоря, вместо отдельных элементарных частиц рассматривается волновое поле ψ, возбужденными состояниями (квантами) которого являются частицы и античастицы. Найденное решение (25.16) скалярного уравнения Клейна — Гордона — Фока описывает, например, π-мезонное поле.

Волновое поле релятивистской теории в общем случае не несет информации о местоположении частицы в пространстве, как об этом уже говорилось в § 25, п. 1. И только в квазирелятивистском случае старая трактовка ψ-функции сохраняется.

§ 26. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

26.1. Матрицы Дирака и уравнение Дирака. В 1928 г. Дираку удалось найти релятивистское уравнение, описывающее электроны и позитроны. Это матричное релятивистское обобщение уравнения Шредингера (8.3), сохраняющее формально его вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\widehat{H}\psi, \tag{26.1}$$

но теперь в (26.1) ψ — четырехкомпонентная функция, матрица-столбец:

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}.$$

Четырехрядной квадратной матрицей является и гамильтониан:

$$\widehat{H}=c\,(\vec{\alpha}\,\hat{\vec{p}})+mc\beta, \tag{26.2}$$

где $\vec{\alpha}$ и β — четырехрядные матрицы, носящие название матриц Дирака. Значок вектора у матрицы $\vec{\alpha}$ означает, что она представляет собой совокупность трех матриц: α_x, α_y, α_z, для сокращения записей и выкладок объединенных в трехмерную вектор-матрицу.

Введение четырехрядных матриц обусловлено следующими требованиями к разыскиваемому релятивистскому уравнению: оно должно быть лоренц-инвариантным и в то же время содержать первую производную по времени. Но в таком случае в уравнение должны входить производные первого порядка не только по времени, но и по пространственным переменным. Кроме того, уравнение должно быть, как это требует принцип суперпозиции состояний, линейным. Наконец, вид гамильтониана подсказывает принцип соответствия:

$$\hat{H}^2 = c^2\hat{p}^2 + m^2c^4. \tag{26.3}$$

Анализ показывает, что для обеспечения всех этих требований нельзя ограничиться уравнением для однокомпонентной функции (или, как это было в случае уравнения Клейна — Гордона — Фока, одинаковыми уравнениями для каждой компоненты ψ_α), а необходимо ввести многокомпонентную функцию ψ и соответственно матричные соотношения и операторы. Наименьший возможный для выполнения названных выше требований ранг матриц оказывается равным 4. Совокупность перечисленных требований позволяет найти матрицы $\vec{\alpha}$ и β, введенные в уравнение (26.2). Воспользуемся готовым результатом:

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{26.4}$$

Если теперь, используя матрицы (26.4), записать уравнение (26.1) с гамильтонианом (26.2) для каждой матричной строки, то получим следующие четыре уравнения:

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y)\psi_4 + c\hat{p}_z\psi_3 + mc^2\psi_1, \\ i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)\psi_3 - c\hat{p}_z\psi_4 + mc^2\psi_2, \\ i\hbar\frac{\partial\psi_3}{\partial t} &= c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y)\psi_2 + c\hat{p}_z\psi_1 - mc^2\psi_3, \\ i\hbar\frac{\partial\psi_4}{\partial t} &= c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)\psi_1 - c\hat{p}_z\psi_2 - mc^2\psi_4. \end{aligned}\right\} \tag{26.5}$$

Формулы (26.5) в совокупности и выражают уравнение Дирака (26.1) в подробной записи.

Гамильтониан (26.2), а вместе с ним и уравнение Дирака и (26.5) написаны для свободной частицы. Для обобщения их на случай движения частицы в потенциальном силовом поле следует прибавить в операторе $\hat{H}$ (26.2) оператор потенциальной энергии, после чего получим

$$\hat{H} = c(\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}) + mc^2\beta + 1U(x, y, z, t),$$

где I — единичная матрица. В квазирелятивистском случае предполагается, что внешнее поле слабое, и энергия взаимодействия недостаточна для рождения и уничтожения частиц, так что возможны связанные состояния.

Получим для примера конкретный вид релятивистского гамильтониана заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого в написанном выше гамильтониане нужно от обычного импульса $\vec{p}$ перейти к обобщенному: $\vec{p}_{об}=\vec{p}+q\vec{A}$, ибо известный вид оператора $\hat{\vec{p}}=-i\hbar\nabla$ постулируется в случае обобщенно-потенциальных полей именно для обобщенного импульса. После этого имеем

$$\hat{H}=c\vec{\alpha}(\hat{\vec{p}}-q\vec{A})+mc^2\beta+Iq\varphi, \tag{26.6}$$

где q — заряд частицы; $\vec{A}$ — векторный, а φ — скалярный потенциалы электромагнитного поля.

Применяя уравнение Дирака с оператором (26.6), уточняют, в частности, решение задачи об электроне в атоме водорода, выясняя тонкую структуру уровней энергии ($q=-e$).

Мы не будем решать уравнение Дирака для квазирелятивистского случая частицы в силовом поле, а ограничимся свободными частицами. Важные качественные особенности микрочастиц, связанные с релятивистской и квантовой их природой, могут быть выяснены в процессе решения уравнения для свободных частиц. Заметим, что это решение используется в квантовой электродинамике как исходный объект — электронно-позитронное поле.

26.2. Некоторые свойства решений уравнения Дирака. Для того чтобы уравнение Дирака сохраняло свою форму во всех инерциальных системах координат, необходимо, чтобы элементы матрицы-столбца ψ определенным образом преобразовались при лоренцовом преобразовании координат. Но если преобразование координат нам известно (см. ч. II, § 3), то преобразование ψ-функций, зависящих от этих координат, мы не знаем.

Запишем искомое преобразование в общем виде:

$$\psi'=\lambda\psi, \tag{26.7}$$

где λ — матрица, элементы которой определяются матрицей преобразования Лоренца. Волновая функция ψ преобразуется не непосредственно матрицей Лоренца (как вектор предыдущего параграфа), а связанной с ней матрицей λ, так что все элементы матрицы λ находятся через элементы матрицы Λ.

Далее конкретные значения элементов матрицы λ мы использовать не будем; важно лишь, что преобразование для ψ, сохраняющее форму уравнения Дирака, известно. В этом случае ψ называется *спинорной функцией* или спинором преобразований Лоренца ранга 1/2.

Аналогично уравнению Клейна — Гордона — Фока § 25 уравнение Дирака приводит к уравнению непрерывности:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\psi^+\psi=\operatorname{div} c\psi^+\vec{\alpha}\psi. \tag{26.8}$$

Введем ψ^+ — матрицу-строку, сопряженную матрице-столбцу ψ. Исходя из уравнения (26.1) имеем

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t}=\psi^+\hat{H}^+=c\,(\hat{\vec{p}}^*\psi^+\vec{\alpha}^+)+mc^2\psi^+\beta^+. \qquad (26.9)$$

Умножим теперь уравнение (26.1) на ψ^+, а (26.9) — на ψ и найдем разность полученных выражений:

$$i\hbar\left(\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\right)=c\psi^+(\vec{\alpha}\,\hat{\vec{p}})\,\psi+mc^2\psi^+\beta\psi-c\psi\,(\hat{\vec{p}}^*\psi^+\alpha^+)-mc^2\psi\psi^+\beta^+. \qquad (26.10)$$

Если учесть явный вид матриц $\vec{\alpha}$ и β, то соотношение (26.10) преобразуется в уравнение непрерывности (26.8).

Величина $\psi^+\psi$ существенно положительна, и в этом отношении нет препятствий для толкования ее как плотности вероятности положения частицы в пространстве (как это было в случае уравнения Клейна в § 25). Однако многокомпонентность ψ-функции приводит к выражению для $\psi^+\psi$ в виде суммы четырех слагаемых:

$$\psi^+\psi=\psi_1^*\psi_1+\psi_2^*\psi_2+\psi_3^*\psi_3+\psi_4^*\psi_4. \qquad (26.11)$$

В общем случае этой величине нельзя дать прямого толкования плотности вероятности для координат микрочастицы. И лишь в нерелятивистском пределе, как это будет показано далее, возможно описание частицы, близкое к тому, что имело место для решения уравнения Шредингера.

26.3. Частицы и античастицы, спины частиц и теория Дирака. Испытываем в качестве решения уравнения Дирака

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}+mc^2\beta)\,\psi \qquad (26.12)$$

плоскую монохроматическую волну, снабженную матричным сомножителем:

$$\psi=ue^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}-Et)}, \qquad (26.13)$$

где u — некоторая, не зависящая от координат $\vec{r}$ и времени t одностолбцовая матрица; соответственно ψ — четырехкомпонентная функция. Таким образом, предполагается, что имеется свободная частица с массой m и с импульсом $\vec{p}$. Волновую функцию ψ для нее отыскиваем в виде (26.13), определяя параметры u и E.

Подстановка (26.13) в уравнение (26.12) дает равенство

$$Eu=(c\vec{\alpha}\vec{p}+mc^2\beta)\,u. \qquad (26.14)$$

Для нахождения u выразим четырехрядные матрицы $\vec{\alpha}$, β через двухрядные матрицы $\vec{\sigma}$, которые встречались ранее, в § 13, под названием матриц Паули. Одновременно заменим четырехрядный столбец u на два двухрядных:

$$u=\begin{pmatrix}\omega\\ \omega'\end{pmatrix}.$$

В результате получим

$$E\begin{pmatrix}\omega\\ \omega'\end{pmatrix}=\left\{c\begin{pmatrix}0 & \vec\sigma\\ \vec\sigma & 0\end{pmatrix}\vec p+mc^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\omega\\ \omega'\end{pmatrix}. \tag{26.15}$$

Равенство (26.15), прочитанное по строкам для двухрядных матриц, приводит к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}(E-mc^2)\,\omega-c\vec\sigma\vec p\omega'=0,\\ -c\vec\sigma\vec p\omega+(E+mc^2)\,\omega'=0.\end{aligned}\right\} \tag{26.16}$$

Отличные от нуля решения получаются, если определитель системы обращается в нуль:

$$E^2-m^2c^4-c^2(\vec\sigma\vec p)^2=0.$$

Отсюда определяем энергию частицы:

$$E_{1,2}=\pm\varepsilon, \tag{26.17}$$

где

$$\varepsilon=c\sqrt{p^2+m^2c^2}.$$

В результате, как и в § 25, мы приходим к двум типам решений для свободных частиц:

$$\psi_{(+)}=u_1e^{\frac{i}{\hbar}(\vec p\vec r-\varepsilon t)},\quad \psi_{(-)}=u_2e^{\frac{i}{\hbar}(\vec p\vec r+\varepsilon t)}. \tag{26.18}$$

Решения (26.18) интерпретируем как зарядово-сопряженные состояния частицы и античастицы — электрона и позитрона.

Возвращаясь к системе линейных однородных уравнений (26.16), рассматриваем ее при $E_1=\varepsilon$ и $E_2=-\varepsilon$. В таком случае находятся два решения:

$$\left.\begin{aligned}\omega=-\frac{c\vec\sigma\vec p}{\varepsilon+mc^2}\,\omega',\\ \omega'=\frac{c\vec\sigma\vec p}{\varepsilon+mc^2}\,\omega.\end{aligned}\right\} \tag{26.19}$$

Введем теперь конкретное обозначение для постоянных матриц-столбцов ω:

$$\omega=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix},\quad \omega'=\begin{pmatrix}C_3\\ C_4\end{pmatrix},$$

а также выберем направление оси Oz по импульсу свободной частицы. После вычислений скалярных произведений в формуле (26.19) и подстановок в матрицу u имеем для нее два решения:

$$u_1=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_1\dfrac{cp_z}{\varepsilon+mc^2}\\ -C_2\dfrac{cp_z}{\varepsilon+mc^2}\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}-C_3\dfrac{cp_z}{\varepsilon+mc^2}\\ C_4\dfrac{cp_z}{\varepsilon+mc^2}\\ C_3\\ C_4\end{pmatrix} \tag{26.20}$$

Матрица u_1 относится к электрону, а u_2 — к позитрону. Итак, решения (26.18) выражают состояния электрона и позитрона. Это четырехкомпонентные спиноры, описывающие спиновое состояние частиц.

Рассмотрим приближенное решение для квазирелятивистского случая. Тогда $p_z \ll mc$, $\varepsilon \ll mc^2$ и $\frac{cp_z}{\varepsilon + mc^2} \simeq 0$. Поэтому матрицы u_1 и u_2 имеют вид знакомых нам спиновых функций (см. § 13):

$$u_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}. \qquad (26.21)$$

Подведем итог. Найденные решения (26.18) уравнения Дирака для свободной квазирелятивистской частицы являются (если отбросить нули в матрицах-столбцах (26.21)) двухкомпонентными функциями, так как содержат сомножители — одностолбцовые матрицы:

$$u_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}. \qquad (26.22)$$

Так выявилась дополнительная степень свободы для состояний частицы с заданными характеристиками m и $\vec{p}$. Она учитывается спиновой функцией u.

Требуя выполнения условия нормировки спиновых функций:

$$u_1^+ u_1 = u_2^+ u_2 = 1,$$

получим

$$C_1^* C_1 + C_2^* C_2 = 1, \quad C_3^* C_3 + C_4^* C_4 = 1,$$

что позволяет выбрать базисные спиновые функции электрона и позитрона в виде

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (26.23)$$

Если воспользоваться введенными в § 13 операторами $\hat{S}$ и $\hat{S}_z$, то легко убедиться, что в состояниях со спиновыми функциями $u_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $u_2\left(\frac{1}{2}\right)$ полуцелый спин электрона или позитрона направлен по оси Oz, совпадающей с направлением импульса, а в состояниях со спиновыми функциями $u_1\left(-\frac{1}{2}\right)$, $u_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ спин направлен против оси. В более общем случае состояний со спиновыми функциями (26.21) вероятность той или иной ориентировки спина электрона определяется соответственно величиннами $C_1^* C_1$, $C_2^* C_2$, позитрона — $C_3^* C_3$, $C_4^* C_4$.

Рассмотрим оператор

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \vec{p},$$

где $\vec{\sigma}$ — векторное обозначение двухрядных матриц Паули.

Этот оператор коммутирует с оператором $\hat{H}$ (26.2). Для свободного движения импульс сохраняется, следовательно, сохраняется и второй множитель, оператор которого

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad (26.24)$$

является оператором проекции спина. Собственные значения оператора $\widehat{S}_z$ известны. Поскольку

$$\widehat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то проекция спина на ось Oz принимает значения: $\pm\frac{\hbar}{2}$. Собственными для операторов $\widehat{S}_z$ и $\widehat{S}^2=\widehat{S}_x^2+\widehat{S}_y^2+\widehat{S}_z^2$ являются функции

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие им значения S_z таковы: $\frac{\hbar}{2}$, $-\frac{\hbar}{2}$, $\frac{\hbar}{2}$, $-\frac{\hbar}{2}$.

Нетрудно также найти модуль спина:

$$S=\frac{\hbar\sqrt{3}}{2}.$$

Если электрон и позитрон рассматриваются в отдельности, то удобнее пользоваться двухрядными матрицами:

$$\widehat{\vec{S}}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}, \quad \widehat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \widehat{S}^2=\frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с собственными функциями (26.23).

Полезно заметить, что в общем случае спиновые функции u — четырехрядные матрицы.

Свободное волновое поле, соответствующее электронам и позитронам, выражается линейной суперпозицией решений (26.18), где спиновые множители есть матрицы (26.20):

$$\psi=A_1u_1e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}-\varepsilon t)}+A_2u_2e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}+\varepsilon t)}. \tag{26.25}$$

Волновая функция (26.25) несет информацию о квантах поля — электронах и позитронах, их импульсах, энергиях, спинах.

§ 27. КВАНТОВАННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

27.1. Представление электромагнитного поля в виде системы гармонических осцилляторов. В самом начале курса квантовой механики были введены важные формулы для энергии и импульса квантов электромагнитного поля:

$$\varepsilon=\hbar\omega, \quad \vec{p}=\hbar\vec{k}. \tag{27.1}$$

Однако последовательную квантовую теорию электромагнитного поля мы до сих пор не рассматривали. Подход к электромагнитному полю как совокупности квантовых осцилляторов, обсуждавшийся выше, в § 22, раскрыл физическую идею квантования поля, но математически не был разработан. Поэтому продолжим сейчас анализ воп-