

является оператором проекции спина. Собственные значения оператора  $\hat{S}_z$  известны. Поскольку

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то проекция спина на ось  $Oz$  принимает значения:  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . Собственными для операторов  $\hat{S}_z$  и  $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$  являются функции

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие им значения  $S_z$  таковы:  $\frac{\hbar}{2}$ ,  $-\frac{\hbar}{2}$ ,  $\frac{\hbar}{2}$ ,  $-\frac{\hbar}{2}$ .

Нетрудно также найти модуль спина:

$$S = \frac{\hbar \sqrt{3}}{2}.$$

Если электрон и позитрон рассматриваются в отдельности, то удобнее пользоваться двухрядными матрицами:

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с собственными функциями (26.23).

Полезно заметить, что в общем случае спиновые функции  $u$  — четырехрядные матрицы.

Свободное волновое поле, соответствующее электронам и позитронам, выражается линейной суперпозицией решений (26.18), где спиновые множители есть матрицы (26.20):

$$\psi = A_1 u_1 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - \epsilon t)} + A_2 u_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} + \epsilon t)}. \quad (26.25)$$

Волновая функция (26.25) несет информацию о квантах поля — электронах и позитронах, их импульсах, энергиях, спинах.

## § 27. КВАНТОВАННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

**27.1. Представление электромагнитного поля в виде системы гармонических осцилляторов.** В самом начале курса квантовой механики были введены важные формулы для энергии и импульса квантов электромагнитного поля:

$$\epsilon = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (27.1)$$

Однако последовательную квантовую теорию электромагнитного поля мы до сих пор не рассматривали. Подход к электромагнитному полю как совокупности квантовых осцилляторов, обсуждавшийся выше, в § 22, раскрыл физическую идею квантования поля, но математически не был разработан. Поэтому продолжим сейчас анализ воп-

роса о квантованном поле и познакомимся с элементами квантовой электродинамики.

Квантовая электродинамика тесно связана с исходной для нее математической процедурой квантования макроскопических характеристик электромагнитного поля. Эта процедура основывается на принципе соответствия между классической и квантовой физикой, дополненном некоторыми новыми постулативными положениями. В нашем курсе изучение квантовой электродинамики ограничивается знакомством с квантованием поля.

В классической электродинамике свободное электромагнитное поле описывается волновым уравнением для векторного потенциала (см. ч. III, § 4):

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (27.2)$$

Векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  находятся с помощью соотношений

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } A. \quad (27.3)$$

Энергия и импульс электромагнитного поля выражаются через напряженность  $\vec{E}$  и индукцию  $\vec{B}$  с помощью формул

$$W = \frac{1}{2} \int \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV, \quad (27.4)$$

$$\vec{p} = \int [\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}] dV. \quad (27.5)$$

Мы будем рассматривать поле в кубе с ребром  $L$ , которое может быть как угодно большим. На векторный потенциал накладывается условие периодичности:

$$\vec{A}(x+L, y+L, z+L) = \vec{A}(x, y, z). \quad (27.6)$$

Такой прием позволяет без уменьшения общности рассуждений применять разложение полевых величин в ряды Фурье вместо интегралов Фурье, что упрощает выкладки.

Разложим векторный потенциал  $\vec{A}$  (в кубе  $L$ ) в обобщенный ряд Фурье по функциям  $e^{\pm i\vec{k}\vec{r}}$ , где  $\vec{k}$  назовем волновым вектором. Из условия (27.6) следует

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_1, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_2, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_3, \quad n_{1,2,3} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Кроме того, учтем, что электромагнитное поле поперечно, т. е. вектор  $\vec{A}$  перпендикулярен вектору  $\vec{k}$ . Вводя два единичных вектора поляризации  $\vec{l}_{\alpha\vec{k}}$ , где  $\alpha = 1, 2$ , перпендикулярные  $\vec{k}$  и друг другу, запишем разложение:

$$\vec{A} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\vec{k}} \vec{l}_{\alpha\vec{k}} (A_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} + A_{\vec{k}\alpha}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}}). \quad (27.7)$$

(Благодаря комплексному сопряжению слагаемых в круглых скоб-

как вектор  $\vec{A}$  всегда действителен, как это и должно быть для электромагнитного поля.)

Поскольку выражение (27.7) является решением уравнения поля (27.2), то коэффициенты разложения  $A_{\vec{k}\alpha}$  должны удовлетворять равенству, получающемуся при подстановке (27.7) в (27.2):

$$\frac{\partial A_{\vec{k}\alpha}}{\partial t} + ick A_{\vec{k}\alpha} = 0. \quad (27.8)$$

Решая дифференциальное уравнение (27.8), получаем

$$A_{\vec{k}\alpha} = A_{\vec{k}\alpha}^{(0)} e^{-ickt}, \quad (27.9)$$

где  $A_{\vec{k}\alpha}^{(0)}$  — постоянные числа. Совокупность величин  $A_{\vec{k}\alpha}$  определяет поле в любой точке пространства в некоторый фиксированный момент времени, а с учетом (27.9) — в любой момент времени  $t$ .

В самом деле, подставляя выражения (27.9) в ряд (27.7) и вводя обозначение  $ck = \omega$ , получим разложение векторного потенциала поля по плоским волнам:

$$\vec{I}_{\alpha\vec{k}} A_{\vec{k}\alpha}^{(0)} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{I}_{\alpha\vec{k}} A_{\vec{k}\alpha}^{*(0)} e^{-i(\vec{k}\vec{r} + \omega t)},$$

рассматривавшееся в ч. III, § 4 как решение волнового уравнения.

Временная зависимость  $\vec{A}$  в формуле (27.7) в явном виде отсутствует: она перенесена с уравнения (27.2) на уравнение (27.8). Это предпринято для новых интерпретаций величин  $A_{\vec{k}\alpha}$  и уравнения (27.8).

Выразим основные измеримые характеристики поля через величины  $A_{\vec{k}\alpha}$ :

$$\vec{E} = ic \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \vec{I}_{\alpha\vec{k}} k (A_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - A_{\vec{k}\alpha}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}}), \quad (27.10)$$

$$\vec{B} = i \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} [\vec{k} \vec{I}_{\alpha\vec{k}}] (A_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - A_{\vec{k}\alpha}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}}), \quad (27.11)$$

$$W = 2 \frac{L^3}{\mu_0} \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} k^2 A_{\vec{k}\alpha} A_{\vec{k}\alpha}^*, \quad (27.12)$$

$$\vec{p} = 2 \frac{L^3}{\mu_0 c} \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} k \vec{k} A_{\vec{k}\alpha} A_{\vec{k}\alpha}^*. \quad (27.13)$$

При расчете энергии и импульса использовалась для каждой проекции формула

$$\int_0^L e^{i(k_a - k'_a)x} dx = L \delta_{k_a k'_a}.$$

Выполним замену параметров  $A_{\vec{k}\alpha}$  на новые параметры  $a_{\vec{k}\alpha}$  (смысл их выяснится из дальнейшего):

$$A_{\vec{k}\alpha} = \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar c}{2kL^3}} a_{\vec{k}\alpha}. \quad (27.14)$$

С помощью подстановки (27.14) могут быть преобразованы выражения для всех полевых характеристик. В частности, имеем

$$W = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}^* + a_{\vec{k}\alpha}^* a_{\vec{k}\alpha}), \quad (27.15)$$

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \vec{k}}{2} (a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}^* + a_{\vec{k}\alpha}^* a_{\vec{k}\alpha}), \quad (27.16)$$

где  $\omega = ck$ .

Для интерпретации полученных выражений полевых величин через параметры  $a_{\vec{k}\alpha}$  и  $a_{\vec{k}\alpha}^*$  рассмотрим формулу энергии классического гармонического осциллятора (см. § 6):

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (27.17)$$

Выполним подстановки, сводящие это выражение к сумме (27.15):

$$\xi = x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega m}} p, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + i\eta), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - i\eta). \quad (27.18)$$

Получим

$$\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^* + a^*a). \quad (27.19)$$

Величины  $a$  и  $a^*$ , определяемые соотношениями (27.18), могут быть выбраны в качестве новых переменных вместо  $p$  и  $x$  для описания движения механического осциллятора, как это видно из формулы (27.19).

Сравнивая формулы (27.19) и (27.15), имеем основание уподобить электромагнитное поле бесконечной совокупности гармонических осцилляторов. Соответственно совокупности гармонически зависящих от времени переменных  $a_{\vec{k}\alpha}$  и  $a_{\vec{k}\alpha}^*$  можно взять в качестве нормальных координат электромагнитного поля (см. ч. I, § 26).

Итак, макроскопическое электромагнитное поле можно рассматривать как систему с бесконечным числом степеней свободы. Каждой степени свободы соответствует монохроматическое гармоническое колебание. Все полевые величины выражаются через нормальные координаты системы:  $a_{\vec{k}\alpha}$  и  $a_{\vec{k}\alpha}^*$ .

Такая интерпретация поля позволяет перекинуть мост между классическим и квантовым описаниями поля.

**27.2. Квантовые электромагнитные поля.** Если заменить теперь совокупность классических осцилляторов в выражении (27.15) на квантовые осцилляторы, то мы перейдем к квантовому электромагнитному полю. Основная физическая идея — постулат квантования поля — именно в этом и состоит: *квантовое поле уподобляется системе квантовых осцилляторов, каждый из которых соответствует гармонической составляющей макроскопического поля с волновым вектором  $\vec{k}$  и поляризацией  $\alpha$  в разложении (27.7)*. Поэтому стационарные состояния осцилляторов определяют стационарное состояние поля, дискретные уровни энергии осцилляторов соответствуют возбуждениям, или квантам поля. Энергия и импульс кванта определяются формулами (27.1), а число квантов каждого сорта  $(\vec{k}, \alpha)$  — квантовым числом  $n_{\vec{k}\alpha}$ , задающим состояние соответствующего осциллятора.

Исходя из этих положений, мы можем сразу написать формулу для энергии стационарных состояний электромагнитного поля:

$$W = \sum_{\alpha} \sum_k \hbar \omega_k \left( n_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right), \quad (27.20)$$

где величины  $n_{\vec{k}\alpha}$  принимают значения 0, 1, 2, 3, ...

Однако ни функций состояния, ни квантовых уравнений для поля, ни способа получения значений других параметров квантового поля (например, напряженности  $\vec{E}$ , индукции  $\vec{B}$ ) мы пока что не имеем. Математическая процедура квантования поля и направлена на заполнение этих пробелов.

Прежде всего уравнение Максвелла в форме (27.2) для векторного потенциала поля  $\vec{A}(x, t)$  можно рассматривать как *истинное квантово-релятивистское уравнение, а потенциал — как функцию состояния электромагнитного поля в координатном представлении*. Разложение (27.7) есть общее решение квантово-релятивистского уравнения для стационарного случая.

Отделение координатной зависимости в функции состояния от временной приводит к динамическому уравнению (27.8) для величин  $A_{\vec{k}\alpha}$ .

Подчеркнем, что речь идет о *функции состояния поля*, а не отдельной частицы и смысл ее раскрывается не в определении местоположения микрочастицы в пространстве, а в определении важнейших параметров поля — его энергии, импульса, векторов напряженности и индукции — с учетом квантовых особенностей или микроструктуры поля.

Но координатное представление функции состояния для квантового поля неудобно, ибо, как об этом говорилось ранее, в § 25, п. 1, локализация фотона в определенной точке пространства невозможна. Поскольку поле полностью описывается величинами  $a_{\vec{k}\alpha}$  и  $a_{\vec{k}\alpha}^*$  (по ним можно восстановить вид разложения (27.7)), эти величины можно принять за новые переменные функции состояния вместо старых  $\vec{r}$  и  $t$ . Такое выражение функции состояния называется импульсным представлением. Оно достигается перечислением всех величин  $a_{\vec{k}\alpha}$ ,  $a_{\vec{k}\alpha}^*$ , помещаемых либо в матрицу-столбец:

$$|a_{\vec{k}\alpha}\rangle = \begin{pmatrix} a_{\vec{k}_1\alpha} \\ a_{\vec{k}_2\alpha} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (27.21)$$

либо в матрицу-строку:

$$\langle a_{\vec{k}\alpha}| = (a_{\vec{k}_1}^*, a_{\vec{k}_2}^*, \dots), \quad (27.22)$$

причем  $|a_{\vec{k}\alpha}\rangle^+ = \langle a_{\vec{k}\alpha}|$ .

Нетрудно найти и квантовое уравнение поля в импульсном представлении. Выполняя в уравнении (27.8) подстановку (27.14), получаем для величин  $a_{\vec{k}\alpha}$ :

$$i\hbar \frac{\partial a_{\vec{k}\alpha}}{\partial t} = c p_k a_{\vec{k}\alpha}.$$

Отсюда следует и уравнение для функций состояния:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a_{\vec{k}\alpha}\rangle = c p_k |a_{\vec{k}\alpha}\rangle. \quad (27.23)$$

Уравнение (27.23) имеет вид уравнения Шредингера с гамильтонианом:

$$\hat{H} = c p_k,$$

выражающим оператор энергии отдельного фотона через его импульс  $p_k$ .

Поэтому уравнение (27.23) называют уравнением Шредингера для фотона. Однако роль его в квантовой теории поля несравненно скромнее, нежели роль уравнения Шредингера для нерелятивистской частицы: теперь из уравнения только и вытекает гармоническая зависимость функции состояния от времени. Решая уравнение (27.23), получаем

$$|a_{\vec{k}\alpha} > = |a_{\vec{k}\alpha}^{(0)} > e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_k t}, \quad (27.24)$$

где  $\varepsilon_k = c p_k$ , а  $a_{\vec{k}\alpha}^{(0)}$  — всевозможные комплексные числа. Различные их комбинации задают различные состояния поля независимо от уравнения (27.23).

Новое представление распространяется не только на функции состояния, но и на другие характеристики поля, которые в квантовой теории выражаются через соответствующие операторы.

Начнем с энергии. Оператор энергии электромагнитного поля получим по принципу соответствия из формулы (27.15), заменяя в ней величины  $a_{\vec{k}\alpha}$  и  $a_{\vec{k}\alpha}^*$  операторами  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}$  и  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+$ :

$$H_{\text{поля}} = \sum_{\alpha} \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} (\hat{a}_{\vec{k}\alpha} \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+ + \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+ \hat{a}_{\vec{k}\alpha}). \quad (27.25)$$

Вид и свойства операторов  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}$  и  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+$  нам пока что неизвестны. Можно только сказать, что это квадратные матрицы с бесконечным числом элементов, выраженных через переменные  $a_{\vec{k}\alpha}$  и  $a_{\vec{k}\alpha}^*$ . С учетом соотношений (27.24) заключаем, что мы имеем дело с операторами, гармонически зависящими от времени.

Чтобы установить свойства операторов  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}$  и  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+$ , сопоставим формулу энергии стационарного состояния квантового поля (27.15) с гамильтонианом (27.25). Гамильтониан поля должен для функций стационарных состояний иметь собственные значения (27.20):

$$\hat{H} |a_{\vec{k}\alpha} > = W |a_{\vec{k}\alpha} > ,$$

или в подробной записи:

$$\left\{ \sum_{\alpha} \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} (\hat{a}_{\vec{k}\alpha} \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+ + \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+ \hat{a}_{\vec{k}\alpha}) \right\} |a_{\vec{k}\alpha} > = \left\{ \sum_{\alpha} \sum_k \hbar \omega_k \left( \hat{n}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right\} |a_{\vec{k}\alpha} > .$$

Равенство будет выполняться, если операторы  $\hat{a}$  обладают следующими свойствами:

$$[\hat{a}_{\vec{k}\alpha}, \hat{a}_{\vec{k}'\alpha'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (27.26)$$

а произведение операторов:

$$\hat{n}_{\vec{k}\alpha} = \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^+ \hat{a}_{\vec{k}\alpha} \quad (27.27)$$

есть оператор, собственные значения которого в стационарных состояниях поля образуют последовательность чисел:  $n=0, 1, 2, 3, \dots$

В самом деле, используя свойство (27.26) и определение (27.27), вместо обсуждаемого равенства имеем

$$\left\{ \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left( \hat{n}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right\} |a_{\vec{k}\alpha}\rangle = \left\{ \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left( n_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right\} |a_{\vec{k}\alpha}\rangle.$$

Оператор  $\hat{n}_{\vec{k}\alpha}$  носит название оператора числа квантов поля. (Понятно, что он действует в функции состояния на переменные с индексами  $\vec{k}$  и  $\alpha$ .) Таким образом, стационарные состояния поля есть состояния поля с определенным числом квантов каждого сорта ( $\vec{k}$ ,  $\alpha$ ).

Переходя к импульсному представлению, запишем операторы других величин, характеризующих поле:

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} \left( \hat{n}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right), \quad (27.28)$$

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar c}{2L^3}} \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \frac{l_{\alpha\vec{k}}}{\sqrt{k}} (\hat{a}_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}}), \quad (27.29)$$

$$\hat{\vec{E}} = ic \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar c}{2L^3}} \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \frac{k l_{\alpha\vec{k}}}{\sqrt{k}} (\hat{a}_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}}), \quad (27.30)$$

$$\hat{\vec{B}} = i \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar c}{2L^3}} \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \frac{|\vec{k} l_{\alpha\vec{k}}|}{\sqrt{k}} (\hat{a}_{\vec{k}\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}}). \quad (27.31)$$

Анализируя формулу (27.28), замечаем, что в стационарных состояниях импульс поля принимает определенные значения и, как и энергия, от времени не зависит. Что же касается векторного потенциала поля  $\vec{A}$ , напряженности  $\vec{E}$  и индукции  $\vec{B}$ , то из формул (27.29) ... (27.31) видно, во-первых, зависимость этих величин от времени, содержащаяся согласно соотношениям (27.24) в операторах  $\hat{a}$ . Во-вторых, поскольку  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}$  и  $\hat{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}$  не коммутируют между собой, эти величины не коммутируют с  $\hat{n}_{\vec{k}\alpha}$ . Следовательно, в стационарных состояниях поле не имеет определенной напряженности и индукции, т. е. поле с определенным числом квантов не может быть однозначно охарактеризовано векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Последняя ситуация характерна, конечно, для микроскопических проявлений поля, когда число квантов невелико. В макроскопических полях с огромным числом квантов разброс собственных значений операторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  невелик по сравнению с их абсолютными величинами, поэтому практически измеряется и фигурирует в теории среднее значение векторов:

$$\vec{E}_{\text{макр}} = \langle \vec{E}_{\text{квант}} \rangle, \quad \vec{B}_{\text{макр}} = \langle \vec{B}_{\text{квант}} \rangle. \quad (27.32)$$

На основе формул (27.32) классическая электродинамика предстает как предельный усредненный случай квантовой электродинамики. Поскольку соотношения между квантовыми средними повторяют соотношения между соответствующими операторами, становится

понятной правомерность замены величин в формулах классической физики их операторами при переходе к квантовой (принцип соответствия). Процедура квантования связана, таким образом, с правильным выбором — постулированием — квантовых операторов  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{n}$ .

Далее в теории они широко применяются во всех задачах. В нашем курсе конкретный вид этих операторов не потребовался. Интересующихся можно отослать к фундаментальным курсам [5], [8], [10], [11].

На этом закончим краткий экскурс в квантовую теорию полей элементарных частиц. Мы остановились перед самым важным: взаимодействием полей между собой. Как уже говорилось ранее (см. § 23, п. 4 и § 24, п. 3), основной метод изучения взаимодействия полей состоит в следующем: во втором (или высших) приближении нестационарной теории возмущений рассчитывается вероятность переходов в системе квантовых полей. При этом начальные и конечные состояния полей и есть свободные стационарные состояния с известными функциями. Оператор взаимодействия строится с учетом требований релятивистской инвариантности и вида взаимодействия.

Например, в расчете рассеяния фотонов на электронах (эффект Комптона) задано известными функциями начальные состояния однофотонного и одноэлектронного полей. Конечные состояния этих полей также свободные стационарные, но в функциях включены всевозможные значения энергии и импульса обеих частиц, допустимые законами сохранения. Рассчитываются вероятности различных переходов, вероятности получения в результате взаимодействия нового фотона с различными значениями импульса и энергии. (Интересующимся можно порекомендовать специальную литературу, например [1].)

## У п р а ж н е н и е IX

1. Выведите уравнения Дирака (26.5) для всех четырех составляющих спинора  $\Psi$  из матричной формы (26.1).

2. Получите уравнение непрерывности в дираковской теории.

У к а з а н и е. Уравнение Дирака умножить слева на  $\Psi^+$ , а комплексно-сопряженное — справа на  $\Psi$  и вычесть почленно. Окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^+ \Psi) = c \nabla \cdot (\Psi^+ \vec{\alpha} \Psi)$$

3. Рассмотрите развернутые выражения для плотности вероятности и плотности потока вероятности:

$$\vec{j} = c \Psi^+ \vec{\alpha} \Psi.$$

4. Получите развернутое выражение для  $\nabla \cdot \vec{j}$ .

5. Используя матричные уравнения для спинорных функций:

$$Eu = [c \vec{\alpha} \vec{p} + mc^2 \beta] u,$$



получите уравнения для двухрядных спиновых функций в выражении

$$u = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega' \end{pmatrix}.$$

О т в е т.

$$\begin{aligned} E\omega &= c\vec{\sigma}\vec{p}\omega' + mc^2\omega, \\ E\omega' &= c\vec{\sigma}\vec{p}\omega - mc^2\omega'. \end{aligned}$$

## § 28. ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ И ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

**28.1. Понятие о внутренней симметрии и ее нарушении.** Знакомя читателя с началами релятивистской квантовой теории (гл. IX), мы подчеркивали, что здесь существенно изменяется смысл волновой функции. Волновое поле  $\psi$  описывает такие свойства свободной элементарной частицы, как импульс, спин, четность, но не положение ее в пространстве.

В этой связи характерна спиновая функция — сомножитель при координатной (см. § 26, п. 3). Она не зависит от координат микрочастицы и является матрицей-столбцом, дающим ответ на вопрос о величине модуля и проекции спина. Но известно, что элементарные частицы обладают рядом не принимаемых нами ранее в расчет параметров, в частности изотопическим спином, странностью или гиперзарядом и др. Оказывается, что описание ряда внутренних свойств элементарных частиц, таких, как масса, изоспин, странность и др., возможно по общей схеме применения операторов и волновых функций, если добавить к координатной части, кроме спинового, дополнительный матричный множитель.

Современный метод теоретического изучения свойств элементарных частиц основан на сопоставляемых каждому виду частиц волновых полях, понятии о внутренней симметрии и ее нарушении. Чтобы уяснить новые идеи этого метода, начнем с того, что хорошо известно, но осветим это известное под необычным, необходимым нам для дальнейшего, углом зрения.

Стационарные состояния атома водорода определяются параметрами протона и электрона и взаимодействием между ними. Взаимодействие складывается из нескольких последовательно убывающих частей. Главная — притяжение электрона к ядру с потенциальной энергией  $\hat{U}_0 = -\kappa \frac{e^2}{r}$ . Много меньше энергия взаимодействия спинового магнитного момента электрона с магнитным полем атома, оператор которого можно обозначить через  $\hat{V}$ . (Остальные слагаемые не принимаем во внимание.)

Пусть проведен расчет энергии атома в некотором стационарном состоянии с учетом только основного взаимодействия  $\hat{U}_0$ , получено значение  $E_0$ . В таком случае в принципе можно определить массу атома как системы, состоящей из ядра и электронов:

$$m_a = \left( m_{\text{я}} + m_{\text{э}} + \frac{E_0}{c^2} \right).$$