получите уравнения для двухрядных спиновых функций в выражении

$$u=\begin{pmatrix}\omega\\ \omega'\end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$E\omega=c\vec{\sigma}\vec{p}\omega'+mc^2\omega,$$
$$E\omega'=c\vec{\sigma}\vec{p}\omega-mc^2\omega'.$$

§ 28. ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ И ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

28.1. Понятие о внутренней симметрии и ее нарушении. Знакомя читателя с началами релятивистской квантовой теории (гл. IX), мы подчеркивали, что здесь существенно изменяется смысл волновой функции. Волновое поле ψ описывает такие свойства свободной элементарной частицы, как импульс, спин, четность, но не положение ее в пространстве.

В этой связи характерна спиновая функция — сомножитель при координатной (см. § 26, п. 3). Она не зависит от координат микрочастицы и является матрицей-столбцом, дающим ответ на вопрос о величине модуля и проекции спина. Но известно, что элементарные частицы обладают рядом не принимаемых нами ранее в расчет параметров, в частности изотопическим спином, странностью или гиперзарядом и др. Оказывается, что описание ряда внутренних свойств элементарных частиц, таких, как масса, изоспин, странность и др., возможно по общей схеме применения операторов и волновых функций, если добавить к координатной части, кроме спинового, дополнительный матричный множитель.

Современный метод теоретического изучения свойств элементарных частиц основан на сопоставляемых каждому виду частиц волновых полях, понятии о внутренней симметрии и ее нарушении. Чтобы уяснить новые идеи этого метода, начнем с того, что хорошо известно, но осветим это известное под необычным, необходимым нам для дальнейшего, углом зрения.

Стационарные состояния атома водорода определяются параметрами протона и электрона и взаимодействием между ними. Взаимодействие складывается из нескольких последовательно убывающих частей. Главная — притяжение электрона к ядру с потенциальной энергией $\widehat{U}_0=-\varkappa\frac{e^2}{r}$. Много меньше энергия взаимодействия спинового магнитного момента электрона с магнитным полем атома, оператор которого можно обозначить через $\widehat{V}$. (Остальные слагаемые не принимаем во внимание.)

Пусть проведен расчет энергии атома в некотором стационарном состоянии с учетом только основного взаимодействия $\widehat{U}_0$, получено значение E_0. В таком случае в принципе можно определить массу атома как системы, состоящей из ядра и электронов:

$$m_{\text{а}}=\left(m_{\text{я}}+m_{\text{э}}+\frac{E_0}{c^2}\right).$$

(В данном случае $E_0 < 0$ и масса атома меньше суммы масс ядра и электрона.)

При расчете игнорировалось магнитное взаимодействие, поэтому энергия атома от ориентации спина электрона не зависит. Последнее важное для нас обстоятельство можно выразить в следующей форме: внутреннее взаимодействие в системе обладает симметрией (внутренняя симметрия) относительно состояний с разной ориентацией спинов. Все такие различные стационарные состояния есть состояния с одной и той же энергией и массой системы.

А теперь учтем магнитное взаимодействие $\widehat{V}$. Оно нарушает внутреннюю симметрию атома, заключающуюся в независимости $\widehat{U}_0$ от ориентации спина, так как дает вклады — поправки к энергии E_0, величина которой зависит от этой ориентации. Например, могут получиться две поправки ε_1 и ε_2, а в многоэлектронных атомах — ε_1, ε_2, ε_3 и т. д. Уровень энергии атома оказывается разделенным на подуровни. Несколько близких линий составляют *мультиплет* в энергетическом спектре атома.

Если произвести расчет массы атома, то соответственно получим несколько близких значений:

$$m_i = \left(m_я + m_э + \frac{E_0}{c^2} + \frac{\varepsilon_i}{c_2} \right).$$

Образование мультиплета масс системы, состоящей из ядра и электронов, в терминах симметрии взаимодействия и ее нарушения можно выразить так: симметрия основной части взаимодействия, формирующего состояние системы, нарушена, что и привело к спектру — мультиплету масс вместо одного значения массы.

Далее перенесем полученные результаты с атомов на элементарные частицы. Мы исходим из предложения, что элементарная частица есть система, параметры которой формируются за счет внутреннего взаимодействия. Основная часть взаимодействия обладает некоторой симметрией, так что, например, состояния системы, описываемые волновыми функциями n и p, по отношению к этому взаимодействию эквивалентны, массы частиц n и p одинаковы. Но еще имеется меньшее, нарушающее симметрию, взаимодействие. Оно приводит к небольшому различию масс системы в состояниях n и p.

Ведущая идея современной теории элементарных частиц и состоит в том, что их группы рассматриваются как состояния одной и той же системы-частицы, близкие благодаря симметрии внутреннего взаимодействия, но и различные за счет нарушения этой симметрии другим взаимодействием (или частью основного). Эта идея внутренней симметрии и ее нарушения оказалась особенно плодотворной в поисках единых начал для объяснения всего многообразия элементарных частиц.

Проявление внутренней симметрии в мире известных элементарных частиц можно установить путем сравнения их параметров. Для этого надо усмотреть в многообразии частиц группы — мультиплеты, близкие по массе. Обратимся к адронам.

Прежде всего бросается в глаза близость масс протона и нейтрона:

$$m_p = 938{,}280 \text{ МэВ}, \quad m_n = 939{,}573 \text{ МэВ}.$$

Учитывая совпадающие значения спина и четности $\left(\frac{1}{2}^+\right)$, барионного и других квантовых чисел, кроме электрического заряда, можно говорить о дублете протон — нейтрон.

Аналогично выделяются: триплет мезонов π^+, π^0, π^- (0^-), дублет мезонов K^+, K^0 (0^-), триплет барионов Σ^+, Σ^0, Σ^- $\left(\frac{1}{2}^+\right)$ и другие мультиплеты с небольшим числом частиц и близкими массами.

Существуют и более обширные группы, так называемые *супермультиплеты*. Важнейший октет барионов, в который входят уже упомянутые дублет нуклонов и триплет сигма-гиперонов, таков:

$$\Sigma^+,\ \Sigma^0,\ \Sigma^-,\ \Lambda,\ p,\ n,\ \Xi^-,\ \Xi^0\left(\frac{1}{2}^+\right). \tag{28.1}$$

Есть декуплет барионов:

$$\Delta^{++},\ \Delta^+,\ \Delta^0,\ \Delta^-,\ \overset{*}{\Sigma}{}^+,\ \overset{*}{\Sigma}{}^0,\ \overset{*}{\Sigma}{}^-,\ \overset{*}{\Xi}{}^-,\ \Xi^0,\ \Omega^-\left(\frac{3}{2}^+\right), \tag{28.2}$$

а также октет мезонов:

$$\pi^+,\ \pi^0,\ \pi^-,\ K^+,\ K^0,\ K^-,\ \tilde{K}^0,\ \eta \tag{28.3}$$

и некоторые другие.

Массы частиц в супермультиплетах различаются значительно больше. Например, в декуплете (28.2) они от 1000 до 2000 МэВ. Тем не менее налицо объединение, которое можно отнести к некоторой внутренней симметрии. Адроны в мультиплете надо считать разными состояниями одной и той же частицы-системы.

Объединение частиц в мультиплеты и супермультиплеты на языке квантовой механики объясняется в рамках концепции внутренней симметрией и ее нарушением следующим образом: основное взаимодействие, обусловливающее состояние адрона, обладает некоторой симметрией, выраженной в соответствующем преобразовании. (Преобразование отнюдь не относится к координатам и времени и не является лоренцовым.) Состояние описывается функциями, в общем случае называемыми *спинорами* этого преобразования и имеющими вид одностолбцовых матриц, аналогичных спиновым. Например, для дублетов они двухрядны:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{28.4}$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 — комплексные числа, а $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базисные состояния дублета.

Число строк функции или число базисных функций совпадает с числом частиц в мультиплете. Так, для дублета протон — нейтрон их две, для триплета π-мезонов — три и т. д. Базисные функции выражают отдельные частицы мультиплета, например:

$$p \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (28.5)$$

(Функция обозначена тем же символом, что и частица.) Они являются элементами некоторого линейного пространства, преобразующегося матрицей U подобно тому, как геометрические векторы преобразуются матрицей направляющих косинусов углов поворота осей координат, скаляры и векторы уравнения Клейна — матрицей Лоренца, а спиноры Дирака — производной от нее матрицей.

Далее нужно принять в расчет внутреннее взаимодействие, определяющее параметры частиц мультиплета. Оно выражается в теории через оператор Гамильтона, состоящий из главной и дополнительной частей:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}.$$

Первое слагаемое не изменяется при преобразовании матрицы U, т. е. обладает симметрией по отношению к преобразованию U; является инвариантом преобразования. Поэтому основная часть энергии (массы) частиц, определяемая первым слагаемым, одинакова для всех базисных состояний. Это, например, одинаковые для дублета величины E_p, E_n.

А вот второе слагаемое, $\widehat{V}$, такой симметрией не обладает и дает различные вклады в энергию: ε_p, ε_n.

Таким образом, с учетом нарушения симметрии массы протона и нейтрона не равны: $m_p \neq m_n$.

Преобразование, отражающее внутреннюю симметрию частиц относительно основного взаимодействия, несет в себе важную информацию о мультиплете — числе его компонент, сохраняющихся величинах, параметрах, различающих отдельные состояния. В современной теории элементарных частиц найдено несколько таких преобразований, соответствующих реальным мультиплетам.

28.2. Унитарные симметрии. Изотопический спин. Чтобы учесть внутреннюю симметрию элементарной частицы, следует ввести дополнительный сомножитель в ее волновую функцию. Это уже делалось выше для учета спина. Теперь продолжаем детализацию состояния свободной частицы, включив в рассмотрение не только ее движение в пространстве, четность и спин, но и некоторые внутренние параметры:

$$\psi = \varphi(x, y, z, t)\, u\xi. \qquad (28.6)$$

Здесь u — спиновая функция, задающая модуль и ориентацию спина, а ξ — функция, описывающая внутреннее состояние частицы, по которой можно будет определить новые параметры ее состояния.

Ниже мы рассматриваем функцию ξ отдельно, независимо от первых сомножителей. Ставим основную задачу — отыскать для функции ξ преобразование U, отражающее внутреннюю симметрию. Вместе с ним определяется и вид ξ.

Считая U линейным преобразованием, имеем дело с некоторыми квадратными матрицами — число столбцов равно числу строк, зависит от некоторых комплексных параметров α.

С математической точки зрения совокупность преобразований $U(\alpha)$ является группой. Мы не сможем здесь опираться на теорию групп, что, вообще говоря, в этой области физики необходимо. Но групповую терминологию используем.

В соответствии с общей концепцией описания микросистем с помощью волновых функций информация о физическом состоянии — об измеряемых параметрах — дается квадратом модуля волновой функции, в примере дублетов — величиной

$$\tilde{\xi}\xi=(\xi_1^*, \xi_2^*)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\xi_1^*\xi_1+\xi_2^*\xi_2. \tag{28.7}$$

Эта величина должна быть инвариантом отыскиваемого преобразования. Матрица U должна обладать свойством, вытекающим из инвариантности произведения (28.7):

$$\tilde{\xi}'\xi'=\tilde{\xi}U^+\cdot U\xi=\tilde{\xi}\xi,$$

откуда

$$U^+U=1, \tag{28.8}$$

где U^+ получена из матрицы U заменой строк на столбцы и комплексным сопряжением элементов.

Матрицы, удовлетворяющие равенству (28.8), называются унитарными. Оказывается, что внутренние симметрии отражены в унитарных преобразованиях.

Конкретизируем вид двухрядной унитарной матрицы U:

$$U=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — параметры, принимающие комплексные значения.

Унитарность дает три уравнения, связывающие параметры:

$$a^*a+c^*c=1,\ b^*b+d^*d=1,\ a^*b+c^*d=0.$$

Для дальнейших рассуждений постоянный множитель, который может стоять перед всеми элементами матрицы U, существенным не является. Поэтому его следует подобрать, максимально упрощая матрицу U. Требуют, чтобы определитель матрицы был равен 1, что дает четвертое уравнение: $ad-bc=1$. В таком случае матрицу U называют *унимодулярной.*

Итак, матрица U зависит от трех вещественных параметров, которые можно выбрать по-разному. Совокупность матриц образует группу преобразований SU (2) для двухрядных спиноров ξ, определяемых через базисные с помощью формулы (28.5).

Можно подводить первые итоги. Если адрон есть система, обладающая симметрией $SU(2)$ по отношению к сильному взаимодействию, а электромагнитное взаимодействие нарушает эту симметрию, то существуют дублеты адронов, в которых частицы с различными электрическими зарядами обладают близкими, но различными массами. Такие дублеты действительно существуют, и мы их уже называли. Это дублет протон — нейтрон, дублет K-мезонов и др. Но это еще не все, что может дать анализ унитарной симметрии. Очень существенно, что этот анализ приводит к новой величине — квантовому числу, характеризующему частицу в мультиплете; она названа *изотопическим спином*, так как с формально-математической стороны аналогична обычному спину.

Так, для унитарных дублетов изотопическому спину следует приписать полуцелое значение:

$$T=\frac{1}{2}, \tag{28.9}$$

тогда возможные значения его проекции на некоторую выделенную ось (ей присваивают индекс 3) принимают два значения:

$$T_3=\pm\frac{1}{2}. \tag{28.10}$$

Поэтому унитарный дублет — это частица (система) с изотопическим спином $\frac{1}{2}$, проекция которого не влияет на сильное взаимодействие: состояния $T_3=\frac{1}{2}$ и $T_3=\frac{1}{2}$ различны с учетом электромагнитного взаимодействия. Это две разные частицы.

Анализ спектра масс элементарных частиц приводит к изотопическим триплетам и квадруплетам, для которых соответственно $T=1$, $T_3=-1$; 0,1 и $T=\frac{3}{2}$, $T_3=-\frac{3}{2}$,

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Имеются и синглеты — частицы без изотопических близнецов. Для них $T=0$.

28.3. Группа преобразований SU (2). Приведем в общих чертах математический анализ группы $SU(2)$ в связи с физическим применением, о котором говорилось выше.

Для конкретного выбора параметров, т. е. выбора матриц U, прибегают к следующему приему. Матрицу записывают в экспоненциальной форме, имея в виду обобщение формулы Эйлера:

$$U=e^{i\Sigma\alpha_k\tau_k}. \qquad (28.11)$$

Здесь α_k — вещественные параметры, а τ_k — новые матрицы (с тем же числом элементов, что и у матрицы U), носящие название *генераторов* преобразования U. Для бесконечно малых $\alpha=\varepsilon$ имеем разложение в ряд:

$$U=I+i\sum_k \varepsilon_k\tau_k. \qquad \mathbf{(28.12)}$$

Чтобы U была унитарной матрицей, τ должны быть эрмитовыми, т. е.

$$\tau_k^+=\tau_k, \qquad (28.13)$$

и с нулевым следом.

Теперь нетрудно выбрать генераторы τ_k; можно воспользоваться ранее встречающимися матрицами в формулах (13.10):

$$\tau_1=\sigma_x,\ \tau_2=\sigma_y,\ \tau_3=\sigma_z. \qquad (28.14)$$

Вид преобразований найден:

$$U=e^{i\alpha\tau_1}e^{i\beta\tau_2}e^{i\gamma\tau_3}, \qquad (28.15)$$

где α, β, γ — вещественные независимые параметры.

С помощью разложения в ряд, учитывая (28.14), (28.15) можно записать в виде произведения трех сомножителей:

$$U_1=\begin{pmatrix}\cos\alpha & i\sin\alpha\\ i\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad U_2=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix},\quad U_3=\begin{pmatrix}e^{i\gamma} & 0\\ 0 & e^{-i\gamma}\end{pmatrix}. \qquad (28.16)$$

Мы нашли исходные в SU (2) преобразования; остается лишь придавать параметрам α, β, γ непрерывно изменяющиеся значения, чтобы получить любую матрицу из группы. Эти преобразования порождают также ряд других, носящих название непроводимых представлений группы $SU(2)$. Прежде всего, согласно формуле (28.7) имеется скаляр преобразований:

$$A=\tilde{\xi}\xi,$$

величина, не изменяющаяся при преобразовании $\xi'=U\xi$, т. е.

$$A'=A. \qquad (28.17)$$

Это — скалярное представление группы. Соответствующие частицы имеют нулевой изоспин.

Исходный двухстрочный спинор ξ называют спинором первого ранга (скаляр — нулевого). Спиноры высших рангов получаются в результате прямых произведений спиноров первого ранга. Так, для получения элементов спинора второго ранга нужно взять все попарные произведения двух спиноров ξ и η, обозначаемые $\xi\times\eta$:

$$T_{ik}=\xi_i\eta_k. \qquad (28.18)$$

Формула преобразования спинора второго ранга очевидна:

$$T'_{ik}=\sum_n\sum_m U_{in}U_{km}T_{nm}.$$

Она может быть записана с меньшим числом индексов, если ввести новую матрицу — прямое произведение $U\times U$:

$$T'_i=\sum_k (U\times U)_{ik}T_k. \qquad (28.19)$$

Далее все физические приложения спиноров связаны с выделением таких групп элементов T_k, которые преобразуются в (28.19) независимо от остальных частью матрицы $U\times U$. Это так называемые *неприводимые* представления группы.

Важный в нашем анализе спинор второго ранга, или вектор, получается следующим образом:

$$F_i^k = \xi^k \eta_i \quad (\xi^k = \xi_k^*). \tag{28.20}$$

Это квадратная матрица:

$$F = \begin{pmatrix} \xi^1\eta_1 & \xi^1\eta_2 \\ \xi^2\eta_1 & \xi^2\eta_2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь очевидным равенством

$$F_i^k = \frac{1}{2}\,\delta_i^k \mathrm{Sp}F + \left(F_i^k - \frac{1}{2}\,\delta_i^k \mathrm{Sp}F\right),$$

где $\mathrm{Sp}F = \xi^2\eta_1 + \xi^2\eta_2$ — след матрицы, а δ_i^k — единичная матрица, имеем разложение на два слагаемых:

$$F = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\,(\xi^1\eta_1 = \xi^2\eta_2) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\xi^1\eta_1 - \xi^2\eta_2), & \xi^1\eta_2 \\ \xi^2\eta_1, & \frac{1}{2}(\xi^2\eta_2 - \xi^1\eta_1) \end{pmatrix}.$$

Таким образом из F выделился скаляр преобразований — первое слагаемое, а второе слагаемое — матрица с нулевым следом — содержит три независимых элемента и может быть записано в виде столбца, а также через базисные спиноры:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{28.21}$$

Осталось найти, какой частью матрицы $U^+ \times U$ преобразуется спинор (28.21). Поскольку слагаемые в спиноре второго ранга

$$F = A + B$$

преобразуются независимо, матрица должна иметь блочный вид:

$$U^+ \times U = \begin{pmatrix} U_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}. \tag{28.22}$$

Если такой вид ей придан, разбиение на неприводимые представления завершено: скаляр преобразуется с помощью U_{00} (можно положить 1), а вектор B — трехрядной матрицей U^3, зависящей, как и исходная U^2, от трех параметров.

Векторам унитарного линейного пространства соответствуют частицы с изотопическим спином $T = 1$. Это обсуждавшиеся ранее триплеты.

Чтобы в некоторой мере завершить разговор о группе SU (2), вернемся к очень важному понятию генератора преобразования. Такие генераторы τ_1, τ_2, τ_3 были написаны нами для исходной матрицы U^2. Они имеют место и для ее производных, например для U^3. Выбор τ не однозначен, но подчинен общим для группы ограничениям. Так, в случае SU (2)

$$\tau_1\tau_2 - \tau_2\tau_1 = 2i\tau_3,$$

а величина

$$\tau^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$$

является инвариантом того или иного представления группы и характеризует мультиплет частиц в целом.

Для векторного представления стандартный выбор генераторов таков:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{28.83}$$

А теперь перейдем от математики к физике, т. е. свяжем генераторы группы SU (2) с операторами новой физической величины, характеризующей мультиплет в целом и частицы в качестве симметричных состояний в мультиплете. Это изотопический спин, причем его проекции опеределяются формулами

$$\widehat{T}_1=\frac{1}{2}\tau_1,\ \widehat{T}_2=\frac{1}{2}\tau_2,\ \widehat{T}_3=\frac{1}{2}\tau_3. \qquad (28.24)$$

Отсюда следует квадрат модуля:

$$\widehat{T}^2=\widehat{T}_1^2+\widehat{T}_2^2+\widehat{T}_3^2=\sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathrm{I}. \qquad (28.25)$$

Пользуясь операторными уравнениями $\widehat{T}_1\xi=T_1\xi$ и т. д., легко находим для базисных функций дублета значения проекций изоспина. Если $\xi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, то $T_3=\frac{1}{2}$; если $\xi=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, то $T_3=-\frac{1}{2}$, модуль изоспина в этих состояниях одинаков: $T=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для векторного представления (28.23) имеем:

$$\widehat{T}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\tau_1,\ \widehat{T}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\tau_2,$$
$$\widehat{T}_3=\tau_3,\ \widehat{T}^2=2\mathrm{I}.$$

Отсюда следуют проекции изоспина триплета (для базисных его функций):

$$B_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ T_3=-1,$$

$$B_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ T_3=0,$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ T_3=1$$

при общем квадрате модуля $T=\sqrt{2}$. Таков, в частности, триплет π-мезонов $\pi=\begin{pmatrix}\pi^-\\\pi^0\\\pi^+\end{pmatrix}$ и другие триплеты.

28.4. Понятие о SU(3)-симметрии. Изотопический спин как параметр, характеризующий внутренние свойства частицы, прочно вошел в теорию: он указывается для адронов вместе с их зарядом, массой, спином, четностью. Для сильных взаимодействий изоспин системы — величина аддитивная и строго сохраняющаяся в замкнутой системе; электромагнитные нарушают сохранение модуля изоспина замкнутой системы (проекция сохраняется). Слабое взаимодействие происходит с нарушением изоспина.

Но изотопическим спином внутренние параметры элементарных частиц не исчерпываются.

В названных выше супермультиплетах массы различаются более значительно, нежели в изотопических. Это указывает на иную, не электромагнитную природу нарушения внутренней симметрии системы, порождающей мультиплет: взаимодействие относится к сильному. Кроме того, супермультиплеты не укладываются в структуру спиноров $SU(2)$. Естественным представляется для анализа этой новой симметрии использовать в качестве исходной трехрядную унитарную матрицу U, преобразующую трехкомпонентные спиноры q.

В матричной форме преобразование имеет вид:

$$q'=Uq; \qquad (28.26)$$

инвариантом для него служит скаляр:

$$\tilde{q}q=q^+q,\ \tilde{q}q=q_1^*q_1+q_2^*q_2+q_3^*q_3. \qquad (28.27)$$

Отсюда, в частности, следует, что наряду со спинором следует рассматривать комплексно-сопряженную матрицу-строку:

$$\tilde{q}=(q_1^*,\ q_2^*,\ q_3^*), \qquad (28.28)$$

преобразующуюся матрицей U^+:

$$\tilde{q}'=\tilde{q}U^+. \qquad (28.29)$$

Теперь волновую функцию q следует сопоставить некоторому исходному триплету элементарных частиц, а $\tilde{q}$ — триплету античастиц. Другие мультиплеты получаются по методике, упомянутой ранее в связи с изотопическими. Надо находить все парные произведения компонент исходных спиноров q и $\tilde{q}$ и выделять из них совокупности, преобразующиеся только друг через друга. Это неприводимые представления $SU(3)$. Матрица их преобразования является частью новой матрицы $U^+ \times U$. Выясним отдельные вопросы, касающиеся числа элементов в супермультиплете.

Скаляр преобразований $SU(3)$ — формула (28.27) — соответствует синглету — одной частице без семейства подобных.

Исходные спиноры q и $\tilde{q}$ соответствуют триплетам.

Далее надо рассматривать попарные произведения q и $\tilde{q}$, затем тройные произведения и т. д. и выделять из них самостоятельные части. Число элементов в каждой такой части будет соответствовать возможному супермультиплету.

С помощью теории групп установлена последовательность этих чисел. Включая уже рассмотренные синглет и базисный триплет, имеем 1, 3, 6, 8, 10, 15, 24, 27, 35 и т. д.

Далее нужно попытаться отождествить их с реальными супермультиплетами элементарных частиц. Здесь идея симметрии дополняется кварковой моделью. *Триплет играет особую роль: его компоненты называемые кварками, оказываются составляющими частями всех частиц, а не одним из семейств.* Кварки выступают в качестве истинно элементарных частиц, тогда как все адроны не элементарны, а являются составными частицами. На этом пути из возможных мультиплетов отбираются лишь следующие: 1, 8, 10. Они действительно обнаруживаются в природе и получают свое объяснение, подобно изотопическому спину, например такие параметры, как страниость и гиперзаряд; делаются некоторые заключения о спектре масс в мультиплете.

Приложение I

Сингулярная дельта-функция Дирака

1. $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1, \quad a \leqslant 0 \leqslant b$$

определение δ-функции.

2. $\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$, $a \leqslant 0 \leqslant b$, или $\int_c^d f(x)\,\delta(x-\alpha)\,dx = f(\alpha)$, $c \leqslant \alpha \leqslant d$ — основное свойство δ-функции.

3. $\lim_{\alpha\to\infty} \dfrac{\sin \alpha x}{\pi x} = \delta x$

одно из аналитических выражений δ-функции.

4. $\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \delta(x)$.

5. $\delta(-x) = \delta(x)$, $\quad x\delta(x) = 0$, $\quad \delta'(-x) = -\delta'(x)$, $\quad x\delta'(x) = -\delta(x)$, $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$ — важные свойства δ-функции.

6. $\delta(x, y, z) \equiv \delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$ — трехмерное обобщение δ-функции.

7. $\int F(\vec{r})\,\delta(\vec{r})\,d\vec{r} = F(0)$, $\int \vec{F}(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{a})\,d\vec{r} = \vec{F}(\vec{a})$ — основное свойство трехмерной δ-функции.

8. $\delta(\vec{r}) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{r}$ — разложение δ-функции в интеграл Фурье.