Наконец, если важен только порядок величины неопределенностей Δx и Δp_x, ΔE и Δt, то пишут просто

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar, \quad \Delta E \Delta t \sim \hbar.$$

Методические указания и рекомендации

I. Первая и вторая главы курса являются пропедевтическими. В первой главе вводятся на элементарном уровне квантово-механические понятия и законы, а во второй они применяются к решению простейших задач. Математический аппарат излагается в третьей главе, после чего возникает возможность решения основных задач и систематического изложения курса. Такая структура диктуется трудностями, которые встречают неподготовленные слушатели, если лекции начинаются с изложения абстрактного математического формализма квантовой механики. При принятом построении удается иллюстрировать математический аппарат на разобранных ранее простых задачах.

Однако при желании лектор может изменить порядок изучения курса. Во всяком случае, материал первой главы должен быть знаком студентам по курсу общей физики; их внимание нужно сосредоточить на функции состояния, особенно на ее вероятностно-статистической трактовке, а также на уравнении Шредингера и разделении переменных в нем. Для самостоятельного чтения рекомендуются книги [4, 12, 13, 17, 18] из списка литературы в конце курса, а также можно использовать учебники [2, 3, 8, 10, 21]. По вопросу об измерениях в микромире можно отослать студентов к литературе [2, 9, 17, 18, 19, 21].

II. При изучении материала первой главы читателю полезно ответить на вопросы, выполнить следующие упражнения:

— Назовите проблемы, которые не смогла разрешить классическая физика. Укажите теоретические и экспериментальные работы, инициировавшие возникновение квантовой механики.

— Обсудите корпускулярно-волновой дуализм микрочастиц: почему ни модель «материальная точка», ни модель «плоская волна» неадекватны микрочастице?

— Дайте математическое определение волновой функции и назовите ее свойства. Сформулируйте положения, раскрывающие физический смысл волновой функции. Сформулируйте принцип суперпозиции состояний и примените его к мысленному дифракционному эксперименту.

— Запишите уравнение Шредингера для микрочастицы в потенциальном поле и охарактеризуйте его математические особенности и особенности решений.

— Обсудите особенности стационарного состояния частицы в потенциальном поле.

— Разберитесь в вероятностной трактовке закона сохранения числа частиц.

— Запишите функцию состояния свободной частицы через параметры E и p. Сравнивая ее с выражением для плоской волны в параметрах ω и k, получите формулы де Бройля.

— Всесторонне обсудите соотношения неопределенностей для координат и проекций импульса. Проанализируйте связь между классической и квантовой механикой, опираясь на волновой пакет и соотношения неопределенностей.

— Укажите, чем отличается толкование соотношения неопределенности энергия-время от толкования неравенств Гейзенберга (4.8).

Упражнение I

1. Вспомните связь энергии и импульса релятивистской частицы. Пользуясь формулой Планка для энергии кванта электромагнитного поля, найдите выражение для импульса фотона.

2. Рассчитайте импульс фотона видимого света ($\lambda=5\cdot10^{-7}$ м) и сравните его с импульсом молекулы водорода, взятым при комнатной температуре ($v=1\,700$ м/с).

Ответ $p_м/p_ф=2\,000$.

3. Рассчитайте длину волны де Бройля для электрона, разогнанного разностью потенциалов в 100 В.

Ответ. $\lambda=10^{-10}$ м.

4. Вычислите длину волны де Бройля дробинки массой 1 г при скорости движения 300 м/с.

5. С помощью соотношений неопределенностей оцените порядок величины энергии электрона в атоме водорода. (Радиус атома принять равным $5\cdot10^{-11}$ м.)

6. Оцените порядок величины энергии нуклона в ядре атома ($r\sim10^{-15}$ м)

7. Покажите с помощью соотношений неопределенностей, что электроны не могут входить в состав ядер атомов.

8. Найдите спектр волновых чисел k дебройлевских плоских монохроматических волн, суперпозиция которых образует волновую функцию

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{ik_0x}, & -a\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

Ответ.

$$\psi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(k)\,e^{ikx}dk,\quad C(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,e^{ikx}dx=2a\,\frac{\sin a(k_0-k)}{a(k_0-k)}.$$

Отсюда $|k_0-k|\leqslant\frac{\pi}{a}$.

9. Найдите с помощью условия квантования (1.12) уровни энергии гармонического осциллятора. (Так называется частица, движущаяся в поле: $U=\frac{bx^2}{2}$.)

Ответ. $\varepsilon_n=\hbar\omega n$, $\omega=\sqrt{\frac{b}{m}}$.

10. С помощью полуклассической теории Бора вычислите энергию ионизации ионов He^+ и Li^{++}.

Ответ. 54 эВ, 122 эВ.

11. Найдите с помощью полуклассической теории Бора уровни энергии и радиусы стационарных орбит электрона в ионе He^+, в системе электрон — позитрон (позитроний).

Указание. Воспользуйтесь формулами (1.11) и (1.11a). Массу электрона замените приведенной массой системы.

12. Состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией вида

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\, P(\theta)\, e^{im\varphi},$$

где r, θ и φ — сферические координаты, а m — квантовое число, принимающее значения 0, ± 1, ± 2, ... Найдите плотность потока вероятности.

Указание. Воспользуйтесь выражением для оператора набла в сферических координатах:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

и формулами (2.3) и (3.15).

Ответ. $\vec{j} = \frac{\hbar m}{\mu} \frac{|\psi|^2}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi$,

где μ — масса электрона.

13. С помощью условия квантования (1.12) выведите соотношение (1.10).

Указание. Учтите, что при движении частицы в центрально-симметричном поле сохраняется момент импульса. Кроме того, переменные r, θ и φ разделяются.

14. Покажите, что частоты линий в спектре атомарного водорода, соответствующие переходам между уровнями энергии с $n \gg 1$, близки к классическим: $\omega_k = k\omega_0$, $k = 1, 2, \ldots$

Решение.

Классический электрон излучает на частоте обращения ω_0 и кратных ей частотах. В квантовом случае

$$\omega_k = \frac{R_y}{\hbar} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+k)^2} \right],$$

где $k = 1, 2, \ldots$ Если $n \gg k$, то

$$\frac{1}{(n+k)^2} \approx \frac{1}{n^2} \left(1 - 2\frac{k}{n} \right)$$

и

$$\omega_k = \frac{2R_y}{\hbar n^3} k$$

Циклическая частота обращения: $\omega_0 = \frac{v}{r}$.

Используя условие квантования $mvr = \hbar n$ и соотношение $r = an^2$, имеем

$$\omega_0 = \frac{2R_y}{\hbar n^3},$$

что и доказывает предположение.