собственные (внутренние) значения четности, не связанные с движением частиц в пространстве. Так, например, электронам, нейтронам, протонам следует приписать внутреннюю четность $+1$, а пи-мезонам и позитронам — четность -1. Фотоны же могут иметь ту и другую четность.

В классической физике понятие о четности состояния не рассматривается в связи с тем, что изменение направления осей координат не приводит в силу применяемого там способа описания движений и взаимодействий к новой сохраняющейся величине. В кваитовой механике понятие о четности возникает в связи с описанием состояния с помощью ψ-функции, а закон сохранения четности наряду с законами сохранения энергии, импульса, момента импульса оказывается связанным с фундаментальными свойствами пространства.

Рассматривая условный выбор либо «правой», либо «левой» систем, нет никаких оснований ожидать, что от этого выбора могут зависеть свойства изучаемых физических объектов — замкнутых систем микрочастиц. Однако возможен и другой взгляд на преобразования инверсии: можно предположить, что существуют два вида пространства — «правое» и «левое», не эквивалентные друг другу; связь между ними отражена в формулах инверсии осей координат. В таком случае гамильтонианы необязательно коммутируют с оператором инверсии и четность может не сохраняться. В 1956 г. было обнаружено, что процессы распада ядер и элементарных частиц, происходящие за счет слабого взаимодействия, происходят с нарушением закона сохранения четности. В настоящее время экспериментально подтверждено, что четность сохраняется в электромагнитных и сильных взаимодействиях и не сохраняется в слабых. Но до сих пор не вполне ясно, обусловлено ли нарушение закона сохранения четности только фундаментальными свойствами пространства и времени или связано с другими причинами.

Методические указания и рекомендации

1. В третьей главе объединены, по существу, два различных вопроса: математический аппарат и общие теоремы квантовой механики, изложенные на его основе.

По теории операторов кратко сообщаются самые необходимые сведения. Их можно при желании расширить, пользуясь литературой (например, [3], [5], [11]).

Важную роль играют аксиомы или постулаты квантовой механики, так как они устанавливают соответствие между идеальными математическими и реальными физическими объектами — функциями и операторами, с одной стороны, и системами микрочастиц, измеримыми величинами, физическими явлениями — с другой. Необходимо подчеркнуть модельный характер применяемых для математического описания реальных систем функций состояния, операторов величин и разобрать отображение реальных объектов на математические.

Непосредственная связь физической величины с числовым множеством значений ее в классической физике нередко приводит к отождествлению физического свойства с количественной характеристикой. Отсутствие прямой связи между числом и величиной в квантовой механике может быть понято только при углублении общего понятия о физической величине.

Операторы координаты и импульса постулированы. Это сделано с целью упрощения и придания важному материалу необходимой для первоначального изучения вопроса компактности. Однако обращаем внимание лектора и читателя на возможное обоснование выбора этих операторов, связанное с толкованием ψ-функции и определением среднего (см. пример 8.9).

Следует иметь в виду, что в главе не помещены все сведения по математическому аппарату, нужному для изучения программного материала: изложение стало бы слишком тяжеловесным и оторванным от физического содержания. Поэтому некоторые математические вопросы рассматриваются далее в курсе по мере необходимости, а в третьей главе аппарат применяется для изучения законов изменения и сохранения величин с течением времени. Помимо прикладного предназначения математические вопросы весьма содержательны в познавательном отношении. Установить возможно полнее связь классической механики с квантовой — значит прояснить много трудных мест квантовой механики, углубить понимание исходных принципов всей физики.

Законы сохранения изложены в связи со свойствами пространства и времени. Такой подход (углубленный уровень) осуществлялся в рамках лагранжева формализма в классической механике (см. ч. I, § 23). В квантовой механике с помощью операторов изложение особенно лаконично. Однако и здесь § 9, пп. 5 и 6 относятся к углубленному уровню.

II. При изучении материала рекомендуется иллюстрировать теоретические положения примерами, опираясь на конкретный материал второй главы (некоторые примеры даны в тексте). Студентам полезно самим составлять примеры. Для успешного усвоения материала надо выполнить и упражнение к главе.

Полезно проконтролировать усвоение в поиске ответов на следующие вопросы:

— Дайте определение ортонормированной системы функций. Определите δ-функцию и назовите ее основные свойства. Укажите правило вычисления коэффициентов Фурье. Дайте определение оператора, линейности операторов, самосопряженности. Приведите примеры сложения и умножения операторов. Запишите операторное уравнение для собственных функций и назовите все входящие в него математические символы. Дайте определение собственной функции оператора, собственного значения. Приведите примеры собственных функций и собственных значений. Сформулируйте (и выпишите вместе) постулаты, связывающие математический аппарат квантовой механики с физическими объектами. Обсудите физический смысл ситуации, при которой величина не имеет определенного значения. Дайте математическое описание этой ситуации.

Объясните, что происходит при реальном измерении в таком случае.

— Запишите операторы производных по времени для координаты, импульса при заданном $\widehat{H}$ и дайте трактовку соответствующих уравнений. Выведите теоремы Эренфеста и дайте качественный анализ их содержания. Назовите законы сохраиения в квантовой механике и условия, в которых они выполняются. Проанализируйте связь между законами сохранения и уравнением Шредингера, с одной стороны, симметриями пространства-времени — с другой. Найдите непосредственно по функциям состояния четность состояний частицы в потенциальной яме и гармонического осциллятора. Рассчитайте четность кванта, испускаемого при переходе между соседними уровнями для ямы, для осциллятора.

Упражнение III

1. Покажите, что оператор интегрирования является линейным.

2. Покажите, что сумма и произведение линейных операторов являются линейными операторами.

3. Покажите, что $[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y]=i\hbar L_z$, где

$$\widehat{L}_x=-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\widehat{L}_y=-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right),\ \widehat{L}_z=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

4. Найдите квадрат оператора:

$$\widehat{A}=x+\frac{d}{dx}.$$

Ответ: $\widehat{A}^2=x^2+x\frac{d}{dx}+\frac{d^2}{dx^2}+1.$

5. Найдите собственные значения и собственные функции оператора: $\widehat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$, где φ — угол вращения вокруг оси Oz.

Указание. Однозначность собственных функций требует выполнения равенства $f(\varphi+2\pi)=f(\varphi)$.

Ответ. $L_z=m\hbar$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots, f_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$.

6. Покажите для случая невырожденных собственных значений, что коммутирующие операторы имеют общие собственные функции.

Решение. Дано $\widehat{A}\widehat{B}=\widehat{B}\widehat{A}$. Пусть $\widehat{A}\varphi=a\varphi$. (1)

Требуется доказать, что $\widehat{B}\varphi=b\varphi$.

Для доказательства умножим на оператор $\widehat{B}$ обе стороны равенства (1):

$$\widehat{B}(\widehat{A}\varphi)=\widehat{B}(a\varphi).$$

Используя коммутативность операторов и линейность оператора $\widehat{B}$, получаем

$$\widehat{A}(\widehat{B}\varphi)=a(\widehat{B}\varphi).$$

Сравнивая с (1), видим, что функции φ и $\widehat{B}\varphi$ должны совпадать с точностью до постоянного множителя. Отсюда $\widehat{B}\varphi=b\varphi$, что и требовалось доказать.

7. Покажите, что сумма самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор.

8. Покажите, что произведение самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор, если операторы коммутируют.

9. Покажите, что система функций

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

является ортонормированной на интервале $[-\pi,\ \pi]$.

10. Покажите, что разложение в ряд по системе функций φ_n предыдущей задачи эквивалентно разложению в тригонометрический ряд Фурье.

11. Разложите в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} A, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$$

по системе собственных функций задачи 9. Вычислите сумму ряда в точках 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$.

Указание. Для вычисления суммы используйте разложение

$$\operatorname{arctg} y=1-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5-\ldots$$

Ответ. $f(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{\sin(2s+1)x}{2s+1}$.

12. Покажите, что

$$\int|f(x)-\sum_n C_n\varphi_n(x)|^2dx=\int|f|^2dx-\sum_n|C_n|^2,$$

где φ_n — ортонормированная система функций; сумма $\sum\limits_n C_n\varphi_n(x)$ — разложение в ряд функции $f(x)$.

Замечание. Если $\int|f(x)-\sum\limits_n C_n\varphi_n(x)|^2dx=0$, то говорят, что ряд $\sum\limits_n C_n\varphi_n(x)$ сходится в *среднем* к функции $f(x)$. Соотношение

$$\int|f|^2dx=\sum_n|C_n|^2$$

называется условием замкнутости системы функций φ_n. Оно в рассматриваемых нами случаях эквивалентно условию полноты.

13. Нормируйте на δ-функцию собственные функции оператора проекции импульса $\hat{p}_x$ (см. выражение (8.2)).

Указание. Используйте формулу $\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}dx$.

14. Покажите, что система собственных функций оператора $\widehat{L}_z$ является ортонормированной, а сам оператор — самосопряженным (см. задачи 5 и 9).

15. Система находится в состоянии, описываемом волновой функцией $\psi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\varphi$, где φ — угол вращения вокруг оси Oz. Определите, с какой вероятностью измерение даст различные значения проекции момента импульса L_z (см. задачу 5).

Ответ. $L_z=m\hbar$, $W_m=0$ при $m\neq\pm1$, а $W_{\pm1}=\frac{1}{2}$.

16. Пользуясь операторами координаты и импульса, определите среднее значение этих величин для осциллятора с функцией состояния (6.19).

17. Повторите вывод формулы (8.7), предполагая спектр оператора $\hat{A}$ непрерывным.

18. Объясните, почему невозможны состояния с определенным вектором момента импульса (см. задачу 3).

19. Возможны ли состояния с определенным модулем момента импульса и его проекции на ось Oz?

Указание. Используйте данные задачи 3 к главе III и задачи 11 к главе IV.

20. Запишите квантовое уравнение движения для гармонического осциллятора.

Ответ. $m\ddot{\hat{x}}=-\omega^2\hat{x}$.

21. Запишите преобразование инверсии в сферических координатах.

Ответ. $r\to r'=r$, $\theta\to\theta'=\pi-\theta$, $\varphi\to\varphi'=\varphi+2\pi$.

22. Выведите соотношения неопределенностей (4.8), используя основные положения квантовой механики.

Решение.

Будем характеризовать неопределенность в значении какой-либо величины a средним квадратичным отклонением:

$$\delta a=\sqrt{\overline{(a-\bar{a})^2}}=\sqrt{\overline{a^2}-(\bar{a})^2}.$$

Найдем δx и δp_x. Без ограничения общности можно положить $\bar{x}=0$ и $\bar{p}=0$. (Это достигается подходящим выбором системы отсчета.) Согласно формуле (8.7)

$$\overline{x^2}=\int\psi^*x^2\psi dx,\ \overline{p^2}=\int\psi^*(\hat{p}_x^2)\psi dx=-\hbar^2\int\psi^*\frac{d^2\psi}{dx^2}dx.$$

Возьмем теперь очевидное неравенство

$$\int\left|\alpha x\psi+\beta\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx\geqslant 0, \qquad (1)$$

где α и β — любые действительные числа.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\left|\alpha x\psi+\beta\frac{d\psi}{dx}\right|^2=\alpha^2x^2\psi^*\psi+\alpha\beta x\frac{d}{dx}(\psi^*\psi)+\beta^2\frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\psi}{dx}. \qquad (2)$$

Используя соотношение (2), представим неравенство (1) в виде

$$A\alpha^2 - B\alpha\beta + C\beta^2 \geqslant 0, \qquad (3)$$

где

$$A = \int x^2 |\psi|^2 \, dx = \overline{x^2},$$

$$B = -\int x \frac{d}{dx} (\psi\psi^*) \, dx,$$

$$C = \int \frac{d\psi^*}{dx} \frac{d\psi}{dx} \, dx$$

Интегрируя по частям, получим

$$B = -x\psi^*\psi \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int \psi^*\psi dx = 1,$$

$$C = \psi^* \frac{d\psi}{dx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2} \, dx - \int \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2} \, dx = \frac{1}{\hbar^2} \overline{p_x^2}.$$

Для выполнения неравенства (3) при любых α и β необходимо и достаточно, чтобы

$$4AC \geqslant B^2.$$

Отсюда

$$\delta x \delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

ГЛАВА IV. АТОМ ВОДОРОДА И ВОДОРОДОПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ

Основная область применений квантовой механики — строение и свойства вещества на атомно-молекулярном уровне, происходящие там процессы, излучение и поглощение света. Поэтому центральная задача теории — задача об атоме вещества. Для простейшего атома — атома водорода — получается исчерпывающее решение. Изучение его не только даст нам конкретную информацию о данном атоме, но и вооружит сведениями, нужными для изучения других, более сложных атомов. Но начать придется с дополнения сведений о математическом аппарате, нужном для исследования свойств атомов.

§ 10. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

10.1. Свойства оператора момента импульса и его проекций. Одной из важнейших величин, характеризующих вращательное движение макроскопических тел, является момент импульса. Еще большее значение он приобретает в квантовой механике, особенно в физике атомов и молекул, где часто момент импульса отдельных частиц или систем имеет определенные значения наряду с энергией.