тромагнитное поле с помощью введения специальных переменных можно представить как совокупность бесконечного числа осцилляторов с различными частотами и направлениями колебаний. При переходе к квантовому описанию поля возбуждение осциллятора до n-го уровня рассматривается как появление n частиц с энергией $\hbar\omega$ каждая. Эти частицы и есть фотоны. Состояние поля задается через указание числа фотонов определенных частот, направлений движения и поляризаций. При таком описании оператор $\hat{n}$ играет роль оператора числа частиц данного сорта. Операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ называются соответственно операторами рождения и уничтожения фотонов. Они необходимы для описания взаимодействия поля с частицами и в других случаях, когда изменяется состояние поля.

В соответствии с этим языком энергетическое представление можно назвать представлением чисел заполнения (квантовых состояний отдельных частиц). Переход к такому описанию системы называется вторичным квантованием.

Аналогичный подход используется при изучении квантовых полей любой природы и многих других вопросов. Например, колебания кристаллической решетки также можно свести к рассмотрению системы гармонических осцилляторов. Здесь возбуждение кванта колебаний толкуется как появление особой квазичастицы — фонона. Через указание числа фононов в различных возможных для них состояниях можно передать любое квантовое состояние всей системы колеблющихся атомов в решетке.

Упражнение X

1. Покажите, что $(AB)^+=B^+A^+$.

Решение.

Пусть

$$B|y\rangle=|z\rangle. \tag{1}$$

Тогда

$$\langle x|AB|y\rangle=\langle x|A|z\rangle=\langle z|A^+|x\rangle^*.$$

Допустим

$$A^+|x\rangle=|f\rangle. \tag{2}$$

Тогда

$$\langle z|A^+|x\rangle^*=\langle z|f\rangle^*=\langle f|z\rangle.$$

Учитывая (1) и (2), имеем

$$\langle f|z\rangle=\langle f|B|y\rangle=\langle y|B^+|f\rangle^*=\langle y|B^+A^+|x\rangle^*.$$

Таким образом,

$$\langle x|AB|y\rangle=\langle y|B^+A^+|x\rangle^*,$$

но, с другой стороны,

$$\langle x|AB|y\rangle=\langle y|(AB)^+|x\rangle^*.$$

2. Покажите, что $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3. Покажите, что собственные значения самосопряженного оператора — действительные числа. (При доказательстве использовать дираковские обозначения векторов в линейных векторных пространствах.)

4. Покажите, что собственные векторы эрмитова оператора, принадлежащие разным собственным значениям, являются ортогональными друг другу. (Использовать дираковские обозначения для векторов.)

5. Найдите волновую функцию стационарного состояния частицы в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками в импульсном представлении.

Решение.

В координатном представлении согласно данным § 5. п. 2.

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}.$$

В импульсном представлении состояние частицы описывается матрицей-столбцом с непрерывно изменяющимся параметром $c_n(p)$. Элемент матрицы $c_n(p)$ есть коэффициент разложения:

$$\psi_n(x)=\int c_n(p)\,\varphi_p(x)\,dp,$$

где $\varphi_p(x)$ — собственная функция оператора импульса в координатном представлении:

$$\varphi_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

По правилам разложения функций в интеграл Фурье

$$c_n(p)=\int_0^a \varphi_p^*(x)\,\psi_n(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi a\hbar}}\int_0^a e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\sin\frac{\pi n x}{a}\,dx.$$

После вычислений получаем

$$c_n(p)=\frac{n\sqrt{\pi a}}{(\pi n)^2-\left(\frac{pa}{\hbar}\right)^2}\left[1-(-1)^n e^{-\frac{ipa}{\hbar}}\right].$$

6. Запишите волновые функции свободного движения в импульсном представлении.

Решение.

Оператор Гамильтона для свободного движения коммутирует с оператором импульса, поэтому волновая функция свободного движения есть собственная функция оператора импульса. В импульсном представлении это будет матрица-столбец $\delta(p-p')$.

7. Покажите, что унитарное преобразование не изменяет значений скалярных произведений векторов.

Решение.

Пусть U — унитарный оператор: $U^{-1} = U^{+}$. Допустим, что $|a> = U|x>$, $|b> = U|y>$. Найдем скалярное произведение $<a|b>$:

$$<a|b> = <x|U^{+}U|y> = <x|y>$$

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЧТЕНИЯ

1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: ГИФМЛ, 1959.
2. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
3. Давыдов А. С. Квантовая механика.— М.: ГИФМЛ, 1963.
4. Данин Д. С. Нильс Бор.— М.: Молодая гвардия, 1978.
5. Дирак П. Принципы квантовой механики.— М.: Наука, 1979.
6. Иродов И. Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике.— М.: Атомиздат, 1976.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика: Курс теоретической физики.— М.: ГИФМЛ, 1963.— Т. III.
8. Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. Курс теоретической физики.— М.: ГИФМЛ, 1962.— Т. II.
9. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.— М.: Наука, 1972.
10. Матвеев А. Н. Квантовая механика и строение атома.— М.: Высшая школа, 1965.
11. Мессиа А. Квантовая механика.— М.: Наука, 1978.— Т. I, II.
12. Мякишев Г. Я. Динамические и статистические закономерности в физике.— М.: Наука, 1973.
13. Пономарев Л. И. Под знаком кванта.— М.: Советская Россия, 1984.
14. Программы школ (классов) с углубленным теоретическим и практическим изучением физики (VIII—XI классы) // Физика в школе.— 1987.— № 1.
15. Рунов Н. Н. Строение атомов и молекул.— М.: Просвещение, 1987.
16. Серова Ф. Г., Янкина А. А. Сборник задач по теоретической физике.— М.: Просвещение, 1979.
17. Тарасов Л. В. Основы квантовой механики.— М.: Высшая школа, 1978.
18. Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М. Фейнмановские лекции по физике.— М.: Мир, 1967.— Т. VIII, IX
19. Физика микромира (Серия «Маленькая энциклопедия»).— М.: Советская энциклопедия, 1980.
20. Хелзен Ф., Мартин А. Кварки и лептоны.— М.: Мир, 1987.
21. Шпольский Э. В. Атомная физика.— М.: Наука, 1974.— Т. I, II