

мы стреляем по мишени с равной вероятностью попасть в любую точку. На мишени есть зона, которая, скажем, в  $2^{10^{19}}$  раз превосходит по площади все остальные. Ясно, что в нее и будут попадать практически все пули.

Вернемся к термодинамической вероятности. Если одна из двух независимых систем может находиться в любом из  $\Omega_1$  микросостояний, а вторая — в любом из  $\Omega_2$  микросостояний, то число микросостояний объединенной системы равно  $\Omega_1\Omega_2$ . Поэтому для нее  $W_T = W_T^1 W_T^2$ . Таким образом, термодинамическая вероятность мультипликативна для независимых систем.

В расчетах удобнее применять аддитивную величину, каковой является логарифм  $W_T$ . Величина

$$S = k \ln W_T \quad (6.10)$$

называется энтропией системы,  $k$  — постоянная Больцмана. Она равна  $k = 1,380622 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  (см. § 16.2).

При переходе к непрерывному спектру величин необходимо говорить об интервале состояний системы. Так, энтропия для полосы энергий шириной  $\Delta E$  определяется формулой

$$S_{\Delta E} = k \ln \Delta W_T = k \ln \frac{d\Omega}{dE} \Delta E,$$

где  $\Omega(E)$  — число состояний при всех энергиях от 0 до  $E$ . Учитывая объем ячейки в фазовом пространстве, приходящийся на одно квантовое состояние, имеем:

$$\Omega(E) = \frac{\Gamma(E)}{(2\pi\hbar)^f}$$

и

$$S_{\Delta E} = k \ln \frac{d\Gamma}{dE} \frac{\Delta E}{(2\pi\hbar)^f}.$$

В классической статистике для заданной энергии системы полагают:

$$S_{\text{кл}} = k \ln \frac{d\Gamma}{dE} + \text{const.} \quad (6.11)$$

Поэтому энтропия  $S_{\text{кл}}$  всегда определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Предоставленная самой себе замкнутая система будет переходить от менее вероятных состояний к более вероятным макроскопическим состояниям, пока не достигнет наиболее вероятного, равновесного состояния. В то же время будет расти энтропия системы. В равновесии она имеет максимум.

## § 7. КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

### 7.1. Вывод канонического распределения из микроканонического

Каноническое распределение может быть выведено из микроканонического.

Поскольку каноническое распределение определяет вероятности состояний квазинезависимых подсистем как частей некоторой замкнутой системы, то задача ставится следующим образом:

— Дана замкнутая система. Она находится в состоянии статистического равновесия.

— Любая квазинезависимая часть данной системы, имеющая постоянные внешние параметры и число частиц, может быть исследуемой системой. О ней говорят, что она помещена в термостат. Роль термостата играет совокупность всех других подсистем.

— Требуется найти функцию статистического распределения для системы в термостате. Это и будет каноническое распределение.

Выбор исследуемой системы в значительной степени произволен. Это может быть как макроскопическое тело, так и небольшая группа частиц. По сравнению с ней термостат представляет собой объект относительно больших размеров.

Рассмотрим ряд состояний, в которых исследуемая система имеет энергию  $\epsilon$ , а термостат —  $(E - \epsilon)$ . Если  $\Omega(\epsilon)$  — число состояний системы,  $\Omega_T(E - \epsilon)$  — термостата, то число состояний всей сложной системы с указанным разделением энергии между обеими ее частями равно

$$\Omega_c(\epsilon, E - \epsilon) = \Omega(\epsilon) \Omega_T(E - \epsilon).$$

Согласно микроканоническому распределению вероятность осуществления состояний, при которых энергия системы равна  $\epsilon$ , а термостата —  $(E - \epsilon)$ , пропорциональна  $\Omega_c(\epsilon, E - \epsilon)$ . Следовательно, вероятность обнаружения системы в состоянии с энергией  $\epsilon$ , согласно (6.9), оказывается равной

$$W(\epsilon) = \text{const } \Omega(\epsilon) \Omega_T(E - \epsilon). \quad (7.1)$$

Нормируем найденное распределение. Сумма по всем возможным значениям  $\epsilon$

$$\sum_{\epsilon} \Omega_c(\epsilon, E - \epsilon)$$

дает число всех состояний комплекса — системы и термостата. Поэтому нормированное на единицу распределение вероятностей (7.1) имеет вид

$$W(\epsilon) = \frac{\Omega(\epsilon) \Omega_T(E - \epsilon)}{\sum_{\epsilon} \Omega(\epsilon) \Omega_T(E - \epsilon)}. \quad (7.2)$$

Но полученное соотношение требует расчета как состояний системы, так и термостата, а последний нас не интересует. Чтобы устранить термостат, запишем выражение для  $\Omega_T$  через экспоненту:

$$\Omega_T(E - \epsilon) = e^{\sigma(E - \epsilon)}.$$

(Поскольку  $\Omega_T \geq 1$ , это всегда возможно.) Допустим, что энергия

системы значительно меньше энергии термостата. Это позволяет разложить вспомогательную функцию  $\sigma(E - \epsilon)$  в ряд Тейлора. При всех состояниях сложной системы имеет место неравенство  $\epsilon \ll E$ . Ограничиваясь линейным членом, получим:

$$\Omega_{\tau} \approx e^{\sigma(E)} e^{-\frac{\epsilon}{\theta}}, \quad (7.3)$$

где

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial E}. \quad (7.4)$$

Подставив (7.3) в (7.2), приходим к более удобной и практически столь же точной формуле:

$$W(\epsilon) = \frac{\Omega(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{\theta}}}{\sum_{\epsilon} \Omega(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{\theta}}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\epsilon}{\theta}} \Omega(\epsilon). \quad (7.5)$$

Это и есть каноническое распределение для квантовой системы. Теперь для расчета вероятностей необходимо знать допустимые квантовые состояния и уровни энергии одной исследуемой системы. Взаимодействие с термостатом проявляется лишь в наличии постоянного параметра  $\theta$ , называемого статистической температурой.

Каноническое распределение нормировано на единицу, так что

$$\sum_{\epsilon} W(\epsilon) = 1,$$

причем роль нормировочного множителя играет сумма, стоящая в знаменателе формулы распределения

$$Z = \sum_{\epsilon} \Omega(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{\theta}}. \quad (7.6)$$

Она называется статистической суммой и необходима при расчете термодинамических характеристик системы. Переменная суммирования  $\epsilon$  пробегает все значения, которые разрешены для энергии подсистемы.

Рассмотрим график канонического распределения (см. рис. 6). Ход кривой определяется двумя функциями — сомножителями  $\Omega(E)$  и экспонентой  $e^{-E/\theta}$ <sup>1</sup>. Первый из них для любой макроскопической системы, имеющей большое число степеней свободы, быстро растет при увеличении энергии. Напротив, второй — экспоненциальный — множитель быстро убывает с ростом энергии. Наличие двух противоположным образом изменяющихся сомножителей приводит к тому, что кривая распределения имеет характерную колоколообразную форму с максимумом в точке  $E = E_{н,в}$ , где  $E_{н,в}$  — наиболее вероятное значе-

<sup>1</sup> Мы изменили обозначение энергии системы.

ние энергии. Функции  $\Omega(E)$  и  $e^{-E/\theta}$  резко возрастают или убывают при малом изменении энергии. Благодаря этому максимум канонического распределения оказывается весьма острым. Общий ход кривой  $W(E)$  практически невозможно изобразить на чертеже ни в каком масштабе. Это почти  $\delta$ -функция от энергии, что отмечалось в § 6.2 при сопоставлении канонического и микроканонического распределений.

Вероятность состояния с  $E = E_{н,в}$  практически равна 1, а вероятность всех других состояний — 0. Отсюда следуют приближенные равенства

$$\bar{E} \approx E_{н,в} \quad (7.7)$$

и

$$\bar{L} \approx L(E_{н,в}) \approx L(\bar{E}). \quad (7.8)$$

Формально данные выражения могут быть получены следующим образом. При расчетах средних значений по формуле (5.4) с помощью распределения (7.5) в суммах можно брать только одно, но самое большое слагаемое, соответствующее  $E_{н,в}$ :

$$\sum_E \Omega(E) e^{-\frac{E}{\theta}} \approx \Omega(E_{н,в}) e^{-\frac{E_{н,в}}{\theta}}, \quad (7.9)$$

$$\sum_E L(E) \Omega(E) e^{-\frac{E}{\theta}} \approx L(E_{н,в}) \Omega(E_{н,в}) e^{-\frac{E_{н,в}}{\theta}}. \quad (7.10)$$

Соотношения (7.7) и (7.8) справедливы и при использовании классического распределения (6.7) (см. § 14.2).

## 7.2. Статистическая температура

По определению статистическая температура  $\Theta$  есть макроскопическая величина, и она является характеристикой равновесной макроскопической системы — термостата. Заметим, что  $\Theta > 0$ , иначе с ростом энергии системы вероятность состояния неограниченно возрастала бы, что физически невозможно. Покажем, что этот параметр может служить указателем наличия или отсутствия равновесия двух макроскопических систем.

Пусть системы (термостаты)  $A$  и  $B$  имеют значения статистической температуры, равные  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно. Распределения вероятностей для подсистем, их составляющих, имеют вид для системы  $A$ :

$$W_1(\epsilon) = \frac{1}{Z_1(\theta_1)} e^{-\frac{\epsilon}{\theta_1}} \Omega_1(\epsilon),$$

для системы  $B$ :

$$W_2(\epsilon) = \frac{1}{Z_2(\theta_2)} e^{-\frac{\epsilon}{\theta_2}} \Omega_2(\epsilon).$$

Пусть какая-нибудь подсистема I из системы A взаимодействует с некоторой подсистемой II из системы B. Обе находящиеся в контакте подсистемы образуют одну объединенную подсистему. Если последняя оказывается в состоянии статистического равновесия, то распределение вероятностей для ее состояний будет каноническим, т. е. выразится формулой

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{Z(\theta)} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \Omega(\varepsilon). \quad (7.11)$$

Закон распределения вероятностей для состояний объединенной подсистемы может быть найден и другим путем. При слабом взаимодействии подсистемы I и II являются квазинезависимыми. Применяя теорему умножения вероятностей, вычислим вероятность того, что одна из них обладает энергией  $\varepsilon_1$ , а другая —  $\varepsilon_2$ :

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{Z_1(\theta_1) Z_2(\theta_2)} e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta_1}} e^{-\frac{\varepsilon_2}{\theta_2}} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon_2).$$

Теперь найдем вероятность того, что энергия объединенной подсистемы равна  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} W(\varepsilon) &= \sum_{\varepsilon_1} W(\varepsilon_1, \varepsilon - \varepsilon_1) = \sum_{\varepsilon_1} \frac{1}{Z_1(\theta_1) Z_2(\theta_2)} e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta_1}} e^{-\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\theta_2}} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon - \varepsilon_1) = \\ &= \frac{1}{Z_1(\theta_1) Z_2(\theta_2)} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta_2}} \sum_{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right)} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Чтобы распределения 7.11 и 7.12 тождественно совпадали, необходимо выполнение равенства  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Действительно, при совпадении статистических температур выражение (7.12) переходит в (7.11), поскольку

$$\sum_{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right)} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon - \varepsilon_1) = \sum_{\varepsilon_1} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon - \varepsilon_1) = \Omega(\varepsilon) \quad (7.13)$$

и

$$\begin{aligned} Z_1(\theta_1) Z_2(\theta_2) &= Z_1(\theta) Z_2(\theta) = \sum_{\varepsilon_1} \Omega_1(\varepsilon_1) e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta}} \sum_{\varepsilon_2} \Omega_2(\varepsilon_2) e^{-\frac{\varepsilon_2}{\theta}} = \\ &= \sum_{\varepsilon_1} \sum_{\varepsilon_2} e^{-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\theta}} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon_2) = \sum_{\varepsilon} \sum_{\varepsilon_1} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon - \varepsilon_1) = \\ &= \sum_{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \sum_{\varepsilon_1} \Omega_1(\varepsilon_1) \Omega_2(\varepsilon - \varepsilon_1) = \sum_{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \Omega(\varepsilon) = Z(\theta). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Если  $\theta_1 \neq \theta_2$ , то выражение (7.11) не совпадает с (7.12), и, следовательно, равновесие в объединенной подсистеме отсутствует.

Итак, если привести в контакт две равновесные системы при  $\theta_1 = \theta_2$ , то получится тоже равновесная объединенная система. В противном случае (при  $\theta_1 \neq \theta_2$ ) она окажется неравновесной. Отсюда видно, что физическая характеристика равновесных систем  $\theta$  обладает всеми свойствами термодинамической температуры и поэтому должна быть однозначно с ней связана<sup>1</sup>. Такую связь можно установить. Рассматривая термостат как изолированную макросистему, следует

<sup>1</sup> Понятие термодинамической температуры известно из общего курса физики. См. также § 8.3.

отождествлять энергию  $E$  с внутренней энергией  $U$ . Соотношение (7.4) тогда может быть записано так:

$$\frac{1}{\theta} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right)_{\lambda},$$

где производная берется при постоянных внешних параметрах системы. Согласно формуле Больцмана (6.10)

$$\Omega = e^{\frac{1}{k} S}$$

и, следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{k} S; \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{\lambda}.$$

Воспользуемся формулой из термодинамики

$$\left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{\lambda} = \frac{1}{T}$$

[см. (12.13)]. Таким образом, величина  $\theta$  пропорциональна температуре термостата:

$$\theta = kT. \quad (7.15)$$

Подставим в формулу канонического распределения (7.5) выражение (7.15). Получим

$$W(\varepsilon) = \frac{\Omega(\varepsilon) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\sum_{\varepsilon} \Omega(\varepsilon) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}. \quad (7.16)$$

В каноническое распределение явным образом входит температура. Благодаря этому легко устанавливается связь между статистическим и термодинамическим описанием одного и того же объекта. Это обуславливает его широкое применение в задачах статистической физики.

Каноническое распределение (в рамках классической физики) было получено Гиббсом в 1901 г.

Следует заметить, что термодинамической системе с заданной температурой в статистической физике фактически соответствуют два различных объекта. Во-первых, это замкнутая система, состоящая из многих подсистем и находящаяся в равновесии. Во-вторых, это незамкнутая система, взаимодействующая с термостатом. В первом случае температура, как и любой термодинамический параметр, является усредненной характеристикой внутреннего движения, значение которой определено с точностью до малых флуктуаций. Во втором случае температура системы считается фиксированной и, поскольку имеет место термодинамическое равновесие, она равна температуре термостата.

Флуктуации тем меньше, чем больше система. Это и обуславливает возможность создания термостата, т. е. тела, температура которого должна сохраняться неизменной. В системе, состоящей из небольшого числа частиц, понятие температуры становится неопределенным, и оно полностью теряет смысл, если применять его к отдельной частице.

Рассмотрим систему, состоящую из двух квазинезависимых подсистем. Пусть для нее справедливо каноническое распределение.

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{Z(\theta)} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \Omega(\varepsilon). \quad (7.17)$$

На основании формул (7.12), (7.13), (7.14) пишем:

$$W(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon_1} W(\varepsilon_1) W_2(\varepsilon - \varepsilon_1) = \sum_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon} W_1(\varepsilon_1) W_2(\varepsilon_2),$$

причем

$$W_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{Z_1(\theta)} e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta}} \Omega_1(\varepsilon_1); \quad W_2(\varepsilon_2) = \frac{1}{Z_2(\theta)} e^{-\frac{\varepsilon_2}{\theta}} \Omega_2(\varepsilon_2),$$

и, следовательно, распределения для частей системы имеют тот же вид (7.17), что и для всей системы в целом. Данный вывод непосредственно обобщается на системы, состоящие из любого числа квазинезависимых подсистем.

При изучении свойств газов в классической статистике в качестве квазинезависимых подсистем допустимо рассматривать отдельные частицы. Тогда указанное правило позволяет найти закон распределения частиц по энергиям: он имеет тот же вид, что и каноническое распределение при заданной температуре системы. В этом смысле каноническое распределение можно применять и к отдельным частицам. Температура, как параметр распределения, остается характеристикой макроскопического объекта. Она описывает состояние всего газа в целом.

### 7.3. Каноническое распределение в квантовой и классической областях. Квазиклассическое приближение

Установим связь между каноническими распределениями (7.16) и (6.7). Для этого выполним переход от квантового распределения к классическому.

Уровни энергии квантовой системы дискретны, в классической физике энергия — непрерывная величина. Рассмотрим узкий интервал энергий от  $E$  до  $E + \Delta E$ . Вероятность обнаружения системы в одном из состояний внутри интервала согласно (7.16) равна

$$\Delta W(E) = \frac{e^{-\frac{E}{kT}} \Delta \Omega(E)}{\sum_E e^{-\frac{E}{kT}} \Delta \Omega(E)}.$$

При этом предполагается, что во всех точках между  $E$  и  $E + \Delta E$  экспонента  $e^{-E/kT}$  имеет приблизительно одно и то же значение. Практически всегда уровни энергии макроскопических систем расположены настолько тесно друг к другу, что энергию можно считать непрерывно изменяющейся величиной. Это позволяет перейти к бесконечно малым интервалам энергии и суммирование заменить интегрированием. Обозначая в данном случае через  $\Omega(E)$  число состояний при всех энергиях от 0 до  $E$ , получаем

$$dW(E) = \frac{e^{-\frac{E}{kT}} d\Omega(E)}{\int e^{-\frac{E}{kT}} d\Omega(E)}$$

Далее с помощью соотношения (4.8) находим  $d\Omega(E)$ .

$$d\Omega(E) = \frac{d\Gamma(E)}{(2\pi\hbar)^f} = \frac{d\Gamma}{dE} \frac{dE}{(2\pi\hbar)^f}.$$

Тогда

$$dW(E) = \frac{e^{-\frac{E}{kT}} \frac{d\Gamma}{dE} dE}{\int e^{-\frac{E}{kT}} \frac{d\Gamma}{dE} dE}. \quad (7.18)$$

Это и есть классическое каноническое распределение.

Здесь оно записано как распределение вероятностей для энергии системы. Плотность вероятности выражается формулой

$$\rho(E) = \frac{e^{-\frac{E}{kT}} \frac{d\Gamma}{dE}}{\int e^{-\frac{E}{kT}} \frac{d\Gamma}{dE} dE}.$$

Стоящий в знаменателе интеграл обеспечивает нормировку на единицу плотности вероятности для значений энергии системы. Отметим также, что в согласии с классическим определением энтропии (6.11) вместо числа состояний  $\Omega(E)$  в формулу распределения (7.18) входит величина  $\frac{d\Gamma}{dE}$ .

Запишем выражение (7.18) в виде

$$dW = \frac{e^{-\frac{E}{kT}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{E}{kT}} d\Gamma}. \quad (7.19)$$

Взятое в таком виде, классическое каноническое распределение определяет вероятность того, что фазовая точка, отображающая состояние системы, попадает в элемент объема фазового пространства  $d\Gamma$ . Это равносильно тому, что обобщенные координаты и обобщенные импульсы системы примут одновременно значения, лежащие в соответствующих интервалах  $(q, q + dq)$  и  $(p, p + dp)$ , а энергия станет равной  $E(q, p)$ . Поэтому соотношение (7.19) совпадает с ранее полученной формулой (6.7).

Выделяя зависимость всех величин от переменных  $q$  и  $p$ , представим распределение (7.19) в виде

$$dW(q, p) = \frac{1}{I} e^{-\frac{E(q, p)}{kT}} dq dp, \quad (7.20)$$

где

$$I = \int e^{-\frac{E(q, p)}{kT}} dq dp. \quad (7.21)$$



Статистический интеграл  $I$  играет в классической статистике ту же роль, что и статистическая сумма  $Z$  в квантовой статистике.

Классические распределения (7.18), (7.19) и (7.20) имеют ограниченную применимость. (Критерий, устанавливающий, в каких пределах законно использование классической статистической физики, будет дан в § 21.4.) В этом они уступают строгим квантовым соотношениям. Однако вычисления по квантовым формулам часто оказываются слишком сложными. Поэтому в конкретных расчетах часто применяются приближенные квазиклассические выражения.

Например, в формуле статистической суммы (7.6)

$$Z = \sum_E \Omega(E) e^{-E/kT}$$

суммирование заменяется интегрированием:

$$Z = \int e^{-E/kT} d\Omega(E).$$

Причем  $d\Omega(E)$  находится с помощью какой-нибудь из формул (4.8), (4.10), (4.13). В частности, квазиклассическое соотношение

$$Z = \frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}} \int e^{-E/kT} dqdp \quad (7.22)$$

будет использовано ниже при изучении свойств газов.

Статистическая сумма (7.22) отличается от статистического интеграла (7.21) только постоянным множителем  $\frac{1}{N! (2\pi\hbar)^{3N}}$ . Однако без него нельзя получить во всех отношениях корректных выражений для термодинамических характеристик системы.

#### 7.4. Сводка основных понятий и принципов статистической физики

Статистическая система состоит из огромного числа квазинезависимых подсистем, слабо взаимодействующих между собой. Система рассматривается как замкнутая, подсистемы — как квазизамкнутые.

Микросостояние системы задается как механическое состояние всех ее микрочастиц, т. е. как совокупность  $3N$  пар значений координат  $q_i$  и импульсов  $p_i$ . Для квантовых систем указываются квантовые состояния всех подсистем.

Статистическое распределение определяет вероятность нахождения системы в различных микросостояниях:

$$W_i = W(\epsilon_i); \quad dW = \rho(q, p) d\Gamma,$$

а вместе с тем средние значения величин как параметров макросостояния:

$$\bar{L} = \sum_i L W_i; \quad \bar{L} = \int \rho L d\Gamma.$$

Статистическое равновесие достигается самопроизвольно. Оно отличается постоянством функции статистического распределения во времени. Ему соответствует максимальная термодинамическая вероятность.

Основным положением статистической физики является постулат микроканонического распределения. Из него следует каноническое распределение, которое обычно и применяется в теоретических и практических исследованиях.

Связь статистического и термодинамического описания системы основывается на формуле Больцмана  $S = k \ln W_T$ .

Поведение неравновесных систем изучается с помощью формулы Больцмана. При этом неравновесная система представляется как совокупность равновесных квазинезависимых подсистем.

### Задачи к главе II

2.1. Найти уравнение фазовой траектории: а) для точки, совершающей гармонические колебания вдоль оси  $Ox$  по закону  $x = a \cos \omega t$ ; б) для точки, свободно падающей в однородном поле тяготения.

О т в е т. а) эллипс  $\frac{p^2}{m^2 a^2 \omega^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ ;

б) парабола  $p = -m\sqrt{2g(h-x)}$  (ось  $Ox$  направлена вверх,  $h$  — начальная высота,  $g$  — ускорение силы тяжести).

2.2. Найти объем фазового пространства, соответствующего всем возможным состояниям релятивистского движения свободной материальной точки, при энергиях, не превышающих  $\epsilon$ .

О т в е т.

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi}{3} V \left( \frac{\epsilon^2}{c^2} - m^2 c^2 \right)^{3/2}.$$

2.3. Найти число квантовых состояний фотона в интервале энергий от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ .

Р е ш е н и е.

Фотон рассматривается как релятивистская частица, масса которой  $m = 0$ . Из решения задачи 2.2 следует, что фазовый объем  $dg(\epsilon)$ , приходящийся на состояния в указанном интервале энергий, равен

$$dg(\epsilon) = \frac{4\pi V \epsilon^2}{c^3} d\epsilon.$$

Используя формулу (4.8), получаем:

$$d\zeta(\epsilon) = \frac{V \epsilon^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} d\epsilon.$$

(Учтены две возможные ориентации спина.)

2.4. Найти объем фазового пространства, приходящийся на одно квантовое состояние одномерного гармонического осциллятора.

Р е ш е н и е.

Фазовое пространство двумерно. Согласно данным задачи 2.1 всем состояниям движения с энергией, меньшей  $\epsilon$ , соответствует площадь эллипса с полуосями  $\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}$  и  $\sqrt{\frac{2\epsilon m}{\omega}}$ . (Напомним, что энергия классического осциллятора связана с амплитудой формулой  $\epsilon = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$ .) Отсюда объем фазового пространства, приходящийся на все состояния с энергией от 0 до  $\epsilon$ , равен

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi\epsilon}{\omega}.$$