образом, отдавать и получать энергию и тем самым участвовать в тепловых процессах могут только те частицы, энергия которых лежит в зоне $\varepsilon_F \pm kT$. Как можно показать, число таких частиц n' в объеме 1 см^3 приблизительно равно

$$n' \approx \frac{3}{2} \frac{N}{V} \frac{kT}{\varepsilon_F},$$

где N — общее число электронов в металле. За счет этих n' электронов энергия электронного газа в целом становится зависящей от температуры по закону

$$U = \frac{3}{5} N\varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right] \quad (23.11)$$

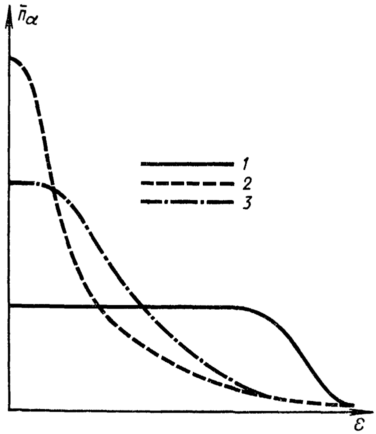

Рис. 29 Условный график распределений: *1* — Ферми, *2* — Бозе и *3* — Больцмана

(см. задачу 6.3). При Т $\sim$ 300 К отношение $\frac{kT}{\varepsilon_F} \sim 5 \cdot 10^{-2}$ и n' будет порядка нескольких процентов от $\frac{N}{V}$. Поэтому вклад электронов в общую теплоемкость металлов пренебрежимо мал. Нетрудно видеть, что при $T \to 0$ теплоемкость электронного газа стремится к нулю.

В заключение произведем качественное сравнение трех распределений. На рисунке 29 дан общий вид зависимости $\bar{n}_\alpha$ от энергии частицы при температурах, близких к абсолютному нулю, для газа Ферми, газа Бозе и газа Максвелла — Больцмана. Ход кривых достаточно наглядно отображает качественные различия трех распределений. При больших энергиях вид всех трех функций примерно одинаков. Для распределения Бозе характерно преобладание частиц в нижних энергетических состояниях по сравнению с распределением Больцмана. Для распределения Ферми $\bar{n}_\alpha \approx 1$ при $\varepsilon < \varepsilon_F$.

§ 24. РАВНОВЕСНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

24.1. Особенности фотонов и фотонного газа

По современным представлениям электромагнитное излучение представляет собой совокупность своеобразных микрочастиц — фотонов. Свойства фотонов существенно отличаются от свойств микрочастиц вещества, которые мы до сих пор рассматривали.

Все фотоны движутся со скоростью, равной скорости света в вакууме. Масса покоя фотона равна нулю. Тем не менее каждый квант света — фотон — имеет определенную энергию и импульс, которые связаны соотношением $\varepsilon = pc$, характерным для релятивистских объектов, движущихся со световой или близкой к световой скоростью. Экспериментальные и теоретические данные показывают, что при излучении или поглощении фотона момент импульса любой атомной системы изменяется на число, кратное постоянной Планка $\hbar$. Это означает, что фотоны имеют целочисленный спин, т. е. являются бозонами. Кроме того, оказывается, что спин фотонов может иметь не три, а две различные ориентации: по направлению импульса и в противоположном направлении. Из сказанного ясно, что фотоны можно различать по энергии, импульсу и проекции спина.

Фотоны фактически не взаимодействуют друг с другом. Поэтому совокупность фотонов внутри некоторого объема представляет собой идеальный газ. Установление равновесия в этой системе происходит особым путем — через взаимодействие со стенками полости. Вещество стенок непрерывно излучает и поглощает кванты электромагнитного поля, так что общее их число в полости не сохраняется. Равновесие наступает, когда стенки излучают (в среднем) столько же фотонов любого сорта, сколько поглощают. При этом внутри объема устанавливается определенное распределение частиц по энергиям.

Число квантовых состояний фотона, приходящееся на интервал энергии $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$, можно найти теми же средствами, которые были использованы для обычных частиц. Этот расчет сделан в задаче 2.3.

В состоянии равновесия электромагнитное излучение в полости описывается теми же термодинамическими параметрами, что и обычный газ: объемом, температурой, энергией, энтропией и другими величинами. Излучение оказывает давление на стенки, так как фотоны обладают импульсом. Температура равновесного фотонного газа совпадает с температурой стенок.

Число фотонов внутри полости все время хаотически изменяется. Однако среднее значение числа частиц внутри объема в условиях равновесия должно быть постоянным. Теоретически его можно найти с помощью методов термодинамики. В переменных T, V и N характеристической функцией для системы является свободная энергия. В состоянии равновесия этот термодинамический потенциал имеет минимум. Поэтому при заданных T и V макроскопическая характеристика — число частиц (а статистически — его среднее значение) — определяется из условия экстремальности

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,\,V} = 0.$$

Отсюда следует важный вывод. Согласно определению (13.6)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu.$$

Таким образом, химический потенциал фотонного газа в состоянии равновесия равен нулю (см. также задачу 7.9). Для бозонов нуль есть наибольшее возможное значение μ. Это означает, что фотонный газ вырожден при любых температурах.

24.2. Формула Планка

Распределение фотонов по состояниям должно описываться формулой Бозе (21.6) с $\mu = 0$.

$$\bar{n}_\alpha = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha}{kT}} - 1}.$$

Число частиц, приходящееся на интервал энергий от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$, равно

$$dn(\varepsilon) = \frac{V\varepsilon^2 d\varepsilon}{\pi^2\hbar^3c^3\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right)}.$$

Все эти частицы, вместе взятые, обладают энергией dE:

$$dE = \varepsilon dn(\varepsilon) = \frac{V\varepsilon^3 d\varepsilon}{\pi^2\hbar^3c^3\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right)}.$$

Известно, что фотону с энергией ε ставится в соответствие некоторое электромагнитное поле частотой $\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}$. При переходе от корпускулярной модели света к волновой вместо dE говорят, соответственно, об энергии $dE(\omega)$, отнесенной к интервалу частот $d\omega$. Очевидно,

$$dE(\omega) = \frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \qquad (24.1)$$

Введем спектральную плотность энергии излучения $\rho(\omega, T)$, которая определяет энергию электромагнитного поля, приходящуюся на интервал частот $d\omega$ в единице объема полости:

$$dE(\omega) = V\rho(\omega, T)\,d\omega. \qquad (24.2)$$

Из сравнения формул (24.1) и (24.2) следует:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \qquad (24.3)$$

Это и есть формула Планка. Впервые в физике введя представление о дискретных уровнях энергии атомных систем и квантовом характере излучения и поглощения света, Планк получил эту формулу в 1900 г. Этот год считается начальным для квантовой физики.

Формула для спектральной плотности энергии допускает прямую экспериментальную проверку. Она с высокой точностью подтверждается на опыте, что в настоящее время рассматривается как одно из доказательств правильности основных идей статистической физики и квантовых представлений о природе света.

Характерно, что спектральная плотность согласно (24.3) зависит только от частоты и температуры и не зависит от формы и материала стенок полости. (Это можно вывести и непосредственно из второго начала термодинамики.) Интегральная плотность энергии будет зависеть только от температуры:

$$\rho(T) = \int_0^\infty \rho(\omega, T)\, d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Заменяя в интеграле переменную интегрирования и подставляя $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$, получаем:

$$\rho(T) = \frac{(kT)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Последний интеграл равен $\frac{\pi^4}{15}$. В результате приходим к известному закону Стефана — Больцмана:

$$\rho = \sigma T^4, \tag{24.4}$$

где

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3}.$$

Как будет показано в задаче 6.7, плотность энергии равновесного электромагнитного излучения равна испускательной способности (светимости) абсолютно черного тела, умноженной на $\frac{4}{c}$. Исследуя экспериментально излучение черного тела, можно осуществить проверку формулы Планка и других следующих из нее соотношений, например закона Стефана — Больцмана или закона Вина. С другой стороны, сравнивая излучение какого-нибудь естественного или искусственного источника света с излучением абсолютно черного тела, получаем возможность измерить его температуру по светимости, или по распределению энергии в спектре, или по положению точки максимума функции распределения интенсивности излучения в зависимости от частоты света. Этим методом были измерены температуры звезд, обнаружено реликтовое электромагнитное излучение — свидетель ранней стадии начала расширения нашей части Вселенной. Законы равновесного электромагнитного излучения находят также многочисленные применения в технике.

24.3*. Термодинамические функции и уравнение состояния фотонного газа

Формулы для термодинамических функций квантовых идеальных газов, найденные в § 22, непосредственно не применимы к равновесному электромагнитному излучению, так как для фотонов имеет место иная связь между энергией и импульсом, чем для обыкновенных частиц. Поэтому вычислим термодинамические характеристики излучения другим способом.

Внутренняя энергия фотонного газа равна

$$U = \rho V = \sigma V T^4.$$

Далее, используя уравнение Гиббса — Гельмгольца (12.16), найдем свободную энергию:

$$F = U + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V. \tag{24.5}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right) = \frac{1}{T}\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{F}{T^2},$$

преобразуем формулу (24.5) к виду

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right) = -\frac{U}{T^2}.$$

Это уравнение легко решается:

$$F = -T\int_0^T \frac{U}{T^2}\,dT + g(V)\,T. \tag{24.6}$$

При $T = 0$ должно быть: $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S = 0$. Поэтому произвольная функция $g(V) = 0$. Вычисляя интеграл (24.6), получаем:

$$F = -\frac{1}{3}\sigma V T^4.$$

Затем из термодинамических соотношений (12.7) следует:

$$S = \frac{4}{3}\sigma V T^3;\quad P = \frac{1}{3}\sigma T^4. \tag{24.7}$$

Последняя формула есть термическое уравнение состояния для электромагнитного излучения.

Задачи к главе VI

6.1. Найти среднее число частиц в квантовом состоянии α без учета принципа тождественности.

Решение.

Если все частицы различны, то состояние подсистемы, состоящей из всех частиц, находящихся α-м квантовом состоянии, зависит от того, какие именно n частиц из N возможных попали в данное состояние. При фиксированном n подсистема имеет C_N^n различных состояний, что равно числу выборок, которыми можно взять n различных частиц из общего числа N. Значения n могут быть любыми в пределах от 0 до N (практически до бесконечности).

Воспользуемся формулой (15.7). В нашем случае $\varepsilon = n\varepsilon_\alpha$ и $\Omega(\varepsilon, n) = C_N^n$.