принимает значения от $\frac{1}{2} v_{н.в}$ до $2v_{н.в}$. Заметим, что при любых температурах имеется некоторое число очень быстрых или очень медленных частиц.

С ростом температуры график распределения становится более пологим (рис. 4), возрастает относительное число быстрых частиц, поэтому высота максимума снижается и он смещается вправо, в сторону больших скоростей, однако площадь под кривой сохраняет свое значение (она равна 1).

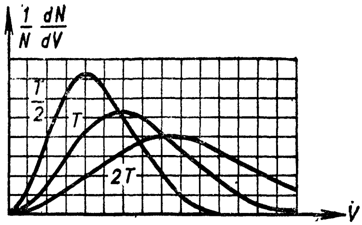

Рис. 4 Максвелловское распределение при разных температурах

График распределения для проекции скорости изображен на рисунке 3, *б*. Кривая построена только для положительных значений v_x. Ветвь при отрицательных значениях проекции скорости симметрична указанной на рисунке. Как легко видеть, $\overline{v_x} = 0$. Этот результат есть следствие того, что оба направления движения являются равновероятными.

Распределение Максвелла неоднократно и очень тщательно проверялось экспериментально. Опыт подтверждает правильность изложенных выше положений молекулярно-кинетической теории. Таким образом, метод исследования, рассмотренный в данном параграфе, оказался весьма эффективным. Однако он пригоден для изучения только идеального газа. В истории развития науки вслед за молекулярно-кинетической теорией были выработаны методы статистической физики, пригодные для изучения любых макроскопических систем. Основы этих методов были заложены в работах Дж. Гиббса.

Задачи к главе I

1.1. Все значения величины x в интервале от a до b являются равновероятными. Записать выражение для плотности вероятности и найти $\overline{x}$, $\overline{x^2}$, δ_x.

1.2. Найти вероятность выпадения 10 очков при одновременном бросании двух игральных костей.

Ответ: 1/12.

1.3. Воспользовавшись формулами из «Приложения», нормировать гауссовское распределение вероятностей (1.4) и вычислить δ_x.

1.4. Материальная точка совершает гармонические колебания, которые описываются уравнением $x = a \cos \omega t$. Найти вероятность ее обнаружения на отрезке от x до $x + dx$.

Решение.

Вероятность $dW(x)$ обнаружения точки на бесконечно малом отрезке dx оси Ox определяется отношением времени ее пребывания на этом отрезке dt к полупериоду колебаний как интервалу времени, за которое она проходит хотя бы раз все возможные положения:

$$dW(x) = \frac{dt}{T/2}.$$

Как известно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Что касается dt, то оно равно

$$dt = \frac{dx}{v}.$$

Вычислим скорость точки:

$$v = |\dot{x}| = a\omega \mid \sin \omega t \mid = \omega\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Таким образом,

$$dW(x) = \frac{dx}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

1.5. Найти число молекул воздуха в объеме 1 см^3 при нормальных условиях, в 1 см^3 воды и число атомов в объеме 1 см^3 твердого тела, плотность которого $5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ. $3 \cdot 10^{19}$, $3 \cdot 10^{22}$, $1 \cdot 10^{23}$ (1/см^3).

1.6. Вычислить среднее значение относительной скорости двух молекул идеального газа.

Решение.

Запишем вероятность того, что одна молекула имеет скорость $\vec{v}_1$, а вторая $\vec{v}_2$. По теореме умножения вероятностей с помощью (2.6) находим

$$dW(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta(v_1^2 + v_2^2)}\, dv_{1x}dv_{1y}v_{1z}dv_{2x}dv_{2y}dv_{2z}. \qquad (1)$$

Согласно (2.11)

$$\beta = m/2\kappa T. \qquad (2)$$

Как известно из механики, движение системы из двух частиц всегда может быть сведено к движению центра масс этой системы и относительному движению частиц по отношению друг к другу. Положение центра масс определяется формулой

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

(при $m_1 = m_2 = m$). Скорость центра масс равна

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Если ввести вектор расстояния между частицами $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, то скорость относительного движения второй частицы по отношению к первой равна

$$\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Так как $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ однозначно связаны с $\vec{v}$ и $\vec{u}$, то вероятность иметь скорость центра масс, равную $\vec{v}$, и относительную скорость, равную $\vec{u}$, оказывается такой же, как вероятность того, что молекулы обладают скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Чтобы получить распределение вероятностей для скоростей $\vec{v}$ и $\vec{u}$, достаточно в формуле (1) перейти к переменным v_x, v_y, v_z и u_x, u_y, u_z. Прежние и новые переменные связаны соотношениями

$$v_{1x} = v_x - \frac{1}{2}u_x; \qquad v_{2x} = v_x + \frac{1}{2}u_x;$$

$$v_{1y} = v_y - \frac{1}{2}u_y; \qquad v_{2y} = v_y + \frac{1}{2}u_y;$$

$$v_{1z} = v_z - \frac{1}{2}u_z; \qquad v_{2z} = v_z + \frac{1}{2}u_z.$$

Вычислим якобиан преобразования [см. (П. 1)]:

$$\frac{\partial (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})}{\partial (v_x, v_y, v_z, u_x, u_y, u_z)} = 1.$$

Кроме того, заметим, что

$$v_1^2 + v_2^2 = 2v^2 + \frac{1}{2}u^2.$$

Отсюда

$$dW(\vec{v}, \vec{u}) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(2v^2 + \frac{1}{2}u^2\right)} dv_x dv_y dv_z du_x du_y du_z.$$

Найденное выражение представляет собой произведение двух распределений вероятности:

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-2\beta v^2} dv_x dv_y dv_z \tag{3}$$

для скорости центра масс и

$$dW(\vec{u}) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\beta u^2}{2}} du_x du_y du_z$$

для относительной скорости, что отражает независимость этих двух величин: при заданной скорости $\vec{v}$ может быть любое значение $\vec{u}$.

Если учесть определение постоянной β [см. (2)], то формально мы имеем два распределения Максвелла: для частицы со скоростью $\vec{v}$ и удвоенной массой и для частицы со скоростью $\vec{u}$ и массой, равной $\frac{m}{2}$. Физически полученный результат совершенно закономерен. Если бы обе частицы были жестко связаны, то для скорости такой системы распределение Максвелла имело бы вид (3). С другой стороны, относительное движение есть самостоятельная степень свободы системы двух частиц. И его всегда можно свести к движению второй частицы относительно неподвижной первой, если ее массу принять равной приведенной массе системы

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}.$$

Без дополнительных выкладок мы получим среднее значение относительной скорости $\bar{u}$, если в формуле для средней скорости по распределению Максвелла (2.15) положим $m = \mu$. Тогда $\bar{u} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} = \bar{v}\sqrt{2}$,

где $\bar{v}$ — средняя скорость теплового движения молекул.