Основным положением статистической физики является постулат микроканонического распределения. Из него следует каноническое распределение, которое обычно и применяется в теоретических и практических исследованиях.

Связь статистического и термодинамического описания системы основывается на формуле Больцмана $S = k \ln W_T$.

Поведение неравновесных систем изучается с помощью формулы Больцмана. При этом неравновесная система представляется как совокупность равновесных квазинезависимых подсистем.

### *Задачи к главе II*

**2.1.** Найти уравнение фазовой траектории: а) для точки, совершающей гармонические колебания вдоль оси $Ox$ по закону $x = a \cos \omega t$; б) для точки, свободно падающей в однородном поле тяготения.

Ответ. а) эллипс $\dfrac{p^2}{m^2a^2\omega^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1$;

б) парабола $p = -m\sqrt{2g(h-x)}$ (ось $Ox$ направлена вверх, $h$ — начальная высота, $g$ — ускорение силы тяжести).

**2.2.** Найти объем фазового пространства, соответствующего всем возможным состояниям релятивистского движения свободной материальной точки, при энергиях, не превышающих $\varepsilon$.

Ответ.

$$g(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2c^2\right)^{3/2}.$$

**2.3.** Найти число квантовых состояний фотона в интервале энергий от $\varepsilon$ до $\varepsilon + d\varepsilon$.

Решение.

Фотон рассматривается как релятивистская частица, масса которой $m = 0$. Из решения задачи 2.2 следует, что фазовый объем $dg(\varepsilon)$, приходящийся на состояния в указанном интервале энергий, равен

$$dg(\varepsilon) = \frac{4\pi V \varepsilon^2}{c^3} d\varepsilon.$$

Используя формулу (4.8), получаем:

$$d\zeta(\varepsilon) = \frac{V\varepsilon^2}{\pi^2\hbar^3c^3} d\varepsilon.$$

(Учтены две возможные ориентации спина.)

**2.4.** Найти объем фазового пространства, приходящийся на одно квантовое состояние одномерного гармонического осциллятора.

Решение.

Фазовое пространство двумерно. Согласно данным задачи 2.1 всем состояниям движения с энергией, меньшей $\varepsilon$, соответствует площадь эллипса с полуосями $\dfrac{1}{\omega}\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{m}}$ и $\sqrt{2\varepsilon m}$. (Напомним, что энергия классическо о осциллятора связана с амплитудой формулой $\varepsilon = \dfrac{m\omega^2a^2}{2}$.) Отсюда объем фазового пространства, приходящийся на все состояния с энергией от 0 до $\varepsilon$, равен

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega}.$$

Используя правило квантования энергии осциллятора

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right);\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

получаем искомый объем $\tau$:

$$\tau = \frac{2\pi\hbar}{1 - \dfrac{\hbar\omega}{2\varepsilon}}.$$

При $\varepsilon >> \hbar\omega$ $\tau \approx 2\pi\hbar$ (рис. 8, где выделены зоны, приходящиеся на различные квантовые состояния).

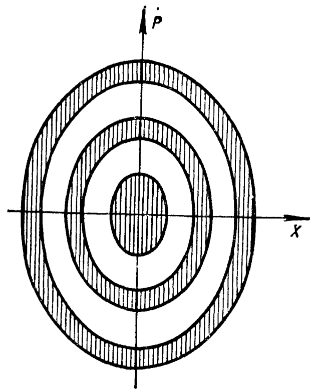

Рис. 8

**2.5.** Показать, что наиболее вероятным является состояние газа с равномерным распределением частиц по двум половинам объема.

Решение.

Каждая молекула имеет равную 1/2 вероятность оказаться в левой или правой половине сосуда. Вероятность того, что $n$ конкретных молекул находятся слева, а $(N - n)$ остальных — справа, равна $\frac{1}{2^N}$.

Вероятность того, что любые $n$ молекул окажутся слева, а остальные $(N - n)$ — справа, получится умножением $\frac{1}{2^N}$ на число способов, которыми можно выбрать указанные $n$ частиц:

$$W(n) = C_N^n \frac{1}{2^N} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!\,2^N}.$$

Это выражение имеет максимум при $n = N/2$.

**2.6.** Найти вид функции $W(n)$ предыдущей задачи вблизи максимума.

Указание. Использовать приближенную формулу Стирлинга (П.10).

Ответ.

$$W(x) \approx W(0)e^{-\frac{x^2}{a}}\ \left(a = \frac{N}{2};\ x = n - a;\ |x| << a\right).$$

**2.7.** Дана система из $N$ квазинезависимых частиц с полуцелым спином. Требуется найти состояние с наиболее вероятным значением суммарной проекции спина системы на $Oz$.

Указание. Использовать решение задачи 2.5.

Ответ. $S_z = 0$.

**2.8.** Записать классическое каноническое распределение для идеального газа. Исследовать вид распределения вблизи точки максимума.

Решение.

На основании формул (7.18) и (3.12) имеем:

$$dW(E) = \bar{f}(E)\,dE,$$

$$f(E) = \text{const}\ E^{\frac{3N}{2}-1}\,e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Запишем функцию $f(E)$ в виде

$$f(E) = e^{\varphi(E)},$$

$$\varphi(E) = \text{const} + \left(\frac{3N}{2} - 1\right)\ln E - \frac{E}{kT}.$$

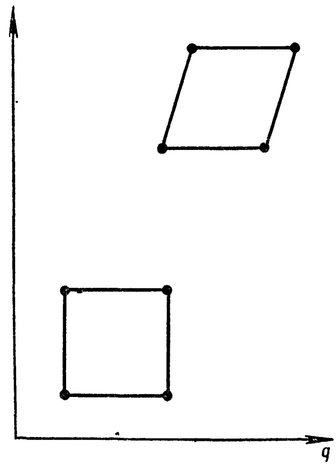

Рис. 9

Обозначим точку максимума через $E_0$. Вблизи точки максимума

$$\varphi(E) \approx \varphi(E_0) + \varphi'(E_0)(E - E_0) + \frac{1}{2}\varphi''(E_0)(E - E_0)^2,$$

причем $\varphi'(E_0) = 0$.

Вычислив $\varphi''(E_0)$, получаем возможность представить $f(E)$ в окрестности точки $E_0$ в виде

$$f(E) \approx \text{const}\, e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2kTE_0}}.$$

**2.9.** Найти фазовые траектории одномерного движения материальных точек в однородном поле тяготения. Проиллюстрировать справедливость теоремы Лиувилля.

Указание. Начальные положения изображающих точек расположить по сторонам квадрата (рис. 9).

**2.10.** Макросистема состоит из $N$ независимых подсистем. Квантовые состояния подсистем обозначаются индексом $i$. Записать выражение для энтропии через значения чисел $n_i$, задающих число подсистем в каждом квантовом состоянии.

Решение.

$N$ подсистем можно распределить по $m$ состояниям при заданных $n_i$ числом способов, равным

$$\frac{N!}{n_1!\, n_2! \,\ldots\, n_m!}$$

(см. «Приложение»). Используя формулу Больцмана (6.10) и приближенную формулу Стирлинга (П.10), получаем при $n_i \gg 1$:

$$S = k\left[N \ln N - \sum_{i=1}^{m} n_i \ln n_i\right].$$

**2.11.** Найти значения чисел $n$ (см. предыдущую задачу) в состоянии равновесия.

Решение.

Ищем максимум энтропии при дополнительных условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = N; \quad \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i n_i = E. \tag{1}$$

Условие максимума

$$\delta S = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} \delta n_i (\ln n_i + 1) = 0. \tag{2}$$

Из наложенных условий (1) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} \delta n_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \delta n_i = 0. \tag{3}$$

Умножая равенства (3) на произвольные постоянные множители $\alpha$ и $\beta$ и складывая с равенством (2), имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta n_i (\ln n_i + \alpha + \beta\varepsilon_i) = 0.$$

Отсюда

$$n_i = \text{const}\, e^{-\beta\varepsilon_i}.$$

Это не что иное, как каноническое распределение.