получаем невозможность построения вечного двигателя с КПД, равным единице (третьего рода).

Поскольку при любом равновесном процессе приближения к абсолютному нулю получается в пределе одна и та же постоянная S_0, постольку следует вывод: энтропия систем по мере приближения к абсолютному нулю перестает зависеть от всех параметров, кроме температуры. Как отражение этого факта две кривые на рисунке 19 при малых T сливаются в одну. Математически сделанное утверждение выражается формулой

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_T = 0,$$

где a — любая характеристика системы.

Как следствие отсюда получаем определенные сведения о поведении ряда величин при очень низких температурах (см. задачу 3.13). В сущности, в этом и заключается основное физическое значение третьего начала.

В заключение следует заметить, что вывод о стремлении энтропии к нулю справедлив для равновесных процессов. Для тел в неравновесном состоянии энтропия отлична от нуля и при самых низких температурах. Однако недостижимость абсолютного нуля остается в силе и для этого случая. Последовательная статистическая теория поведения макроскопических систем при $T \to 0$ встречает некоторые трудности, связанные с тем, что при низких температурах число эффективных степеней свободы становится малым, а поэтому возможны большие флуктуации. Преодоление этих затруднений связывается с дальнейшим развитием квантовой теории твердых и жидких тел.

Задачи к главе III

3.1. Процесс, в котором постоянна теплоемкость, называется политропическим. Найти уравнение политропы в переменных P и V для идеального газа.

Указание. Воспользоваться первым началом термодинамики и уравнением Клапейрона.

Ответ. $PV^n = \text{const}$, где $n = \dfrac{C_P - C}{C_V - C}$.

3.2. Найти работу политропического процесса.

Ответ. $A = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{R}{1-n}\Delta T$.

3.3. Найти связь между изобарическим коэффициентом теплового расширения α_P, изотермическим коэффициентом сжимаемости β_T и термическим коэффициентом изменения давления при постоянном объеме K_V. По определению

$$\alpha_P = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P;\ \beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T;\ K_V = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

Решение.

В произвольном процессе

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP.$$

При изохорическом процессе $dV = 0$ и

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT_V + \left(\frac{dV}{\partial P}\right)_T dP_V.$$

Отсюда

$$\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = -\frac{dP_V}{dT_V} = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

и

$$\alpha_P = \beta_T K_V P.$$

3.4. Найти связь теплоемкостей C_P и C_V для любой простой системы.

Решение.

По первому началу термодинамики

$$\delta Q = dU + PdV$$

или

$$CdT = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + PdV.$$

При изохорическом процессе имеем:

$$C_V\, dT_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT_V.$$

Отсюда

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.$$

При изобарическом процессе

$$C_P dT_P = \left(\frac{\partial U}{dV}\right)_T dV_P + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT_P + PdV_P.$$

Отсюда

$$C_P - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{dV}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

3.5. Согласно механике скорость звука в однородной среде равна

$$C = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}},$$

где ε — модуль упругости, ρ — плотность. Найти скорость звука в идеальном газе. Разрежения и сжатия газа при распространении звуковой волны считать происходящими адиабатически.

Указание.

$$\varepsilon_{\text{ад}} = \frac{1}{\beta_{\text{ад}}};\ \beta_{\text{ад}} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{\text{ад}}.$$

Ответ.

$$C = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}};\ \gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

3.6. Найти элементарную работу поляризации диэлектрика, связанную с движением зарядов, создающих поле.

Решение.

Рассмотрим систему, состоящую из плоского конденсатора, у которого пространство между обкладками заполнено диэлектриком (рис. 20). Соединим обкладки проводником и дадим бесконечно малому заряду dq перейти с одной пластины на другую. При этом будет совершена работа по перемещению заряда:

$$\delta A = -\Delta\varphi dq,$$

причем

$$\Delta\varphi = El,$$

где E — напряженность поля, l — расстояние между обкладками. Пусть заряд конденсатора будет q, а площадь обкладок — S, тогда электрическая индукция равна

$$D = \sigma = \frac{q}{S}.$$

При изменении заряда изменяется и индукция:

$$dD = \frac{dq}{S}.$$

Отсюда

$$\delta A = -lSEdD.$$

Работа, отнесенная к единице объема диэлектрика, равна

$$\delta \breve{A} = -EdD.$$

Обобщение формулы на произвольную неоднородную среду есть

$$\delta \breve{A} = -\vec{E}d\vec{D}.$$

3.7. Вычислить энтропию идеального газа, исходя из формулы (10.3).

Ответ.

$$S = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln T + R \ln V\right) + \text{const}.$$

3.8. Показать, что при смешивании двух равных масс горячей и холодной воды энтропия возрастает. Теплоемкость воды считать постоянной.

3.9. Записать основное термодинамическое равенство для системы «однородный диэлектрик в однородном электрическом поле».

3.10. На рисунке 21 изображена система, состоящая из двух объемов: V_1 и V_2, соединенных каналом, в котором размещена газовая турбина. В объемах находится одна и та же масса газа, но при разных температурах T_1 и T_2 соответственно. Весь

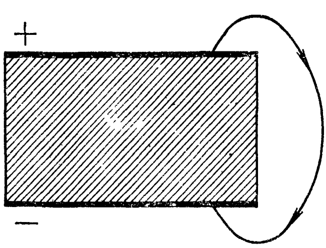

Рис. 20

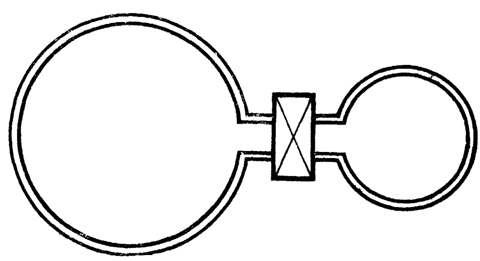

Рис. 21

комплекс адиабатически изолирован. Определить максимальную работу, которая может быть совершена после открытия канала. Газ считать идеальным.

Ответ.

$$A_{\max} = \nu C_V (T_1 + T_2 - 2T); \; T = \sqrt{T_1 T_2} \left[\frac{\sqrt{V_1 V_2}}{V_1 + V_2} \right]^{\gamma - 1}; \; \gamma = \frac{C_P}{C_V};$$

ν — число молей газа, первоначально находившееся в каждом сосуде.

3.11. Показать, что машина Карно имеет максимальный КПД из всех тепловых двигателей, работающих в данном интервале температур.

3.12. Выразить количество теплоты, полученное системой при нагревании, через числа заполнения состояний n_i, связать его с изменением энтропии.

Решение.

При постоянных внешних параметрах квантовые состояния подсистем остаются прежними, но число подсистем в каждом состоянии изменяется:

$$\delta Q = \sum_i \varepsilon_i \delta n_i,$$

причем

$$\sum_i \delta n_i = 0.$$

Соответствующее изменение энтропии согласно данным задачи 2.10 равно

$$dS = -k \sum_i \ln n_i \delta n_i.$$

Подставляя сюда значения n_i найденные в задаче 2.11, получаем:

$$dS = k\beta \sum_i \varepsilon_i \delta n_i.$$

При $\beta = \frac{1}{kT}$ это соотношение переходит в известное равенство $\delta Q = TdS$.

3.13. Используя соотношения (12.8) и (12.12), выяснить поведение коэффициентов α_P и K_V при $T \to 0$ (см. также задачу 3.3).