весному электромагнитному излучению, так как для фотонов имеет место иная связь между энергией и импульсом, чем для обыкновенных частиц. Поэтому вычислим термодинамические характеристики излучения другим способом.

Внутренняя энергия фотонного газа равна

$$U = \rho V = \sigma V T^4.$$

Далее, используя уравнение Гиббса — Гельмгольца (12.16), найдем свободную энергию:

$$F = U + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V. \qquad (24.5)$$

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right) = \frac{1}{T}\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{F}{T^2},$$

преобразуем формулу (24.5) к виду

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right) = -\frac{U}{T^2}.$$

Это уравнение легко решается:

$$F = -T\int_0^T \frac{U}{T^2}\,dT + g(V)\,T. \qquad (24.6)$$

При $T = 0$ должно быть: $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S = 0$. Поэтому произвольная функция $g(V) = 0$. Вычисляя интеграл (24.6), получаем:

$$F = -\frac{1}{3}\sigma V T^4.$$

Затем из термодинамических соотношений (12.7) следует:

$$S = \frac{4}{3}\sigma V T^3; \quad P = \frac{1}{3}\sigma T^4. \qquad (24.7)$$

Последняя формула есть термическое уравнение состояния для электромагнитного излучения.

Задачи к главе VI

6.1. Найти среднее число частиц в квантовом состоянии α без учета принципа тождественности.

Решение.

Если все частицы различны, то состояние подсистемы, состоящей из всех частиц, находящихся α-м квантовом состоянии, зависит от того, какие именно n частиц из N возможных попали в данное состояние. При фиксированном n подсистема имеет C_N^n различных состояний, что равно числу выборок, которыми можно взять n различных частиц из общего числа N. Значения n могут быть любыми в пределах от 0 до N (практически до бесконечности).

Воспользуемся формулой (15.7). В нашем случае $\varepsilon = n\varepsilon_\alpha$ и $\Omega(\varepsilon, n) = C_N^n$.

Отсюда

$$\bar{n}_\alpha = kT \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sum_{n=0}^{N} C_N^n e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{kT} n} = kT \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{kT} n}.$$

Во всех членах, заметно отличных от нуля, $n \ll N$. (Предполагается, что $e^{\mu/kT} \ll 1$.) Если применить приближенную формулу Стирлинга (П. 10), то при $n \ll N$; $N \gg 1$,

$$\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{kT} n} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

где

$$x = N e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{kT}}.$$

Отсюда

$$\bar{n}_\alpha = N e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{kT}}. \tag{1}$$

Если с помощью распределения (1) вычислить химический потенциал, как, впрочем, и любую другую термодинамическую функцию, то не получится правильной зависимости от числа частиц N. К подобной ошибке приводит использование классического канонического распределения (7.20), формула которого найдена без учета тождественности частиц.

6.2. Показать, что квантовое распределение (21.8) переходит в распределение Максвелла — Больцмана при условии применимости классической статистики.

Решение.

Допустим, что выполняется критерий (21.11). Тогда законно применение формулы (21.8) и следующего из нее распределения (21.9). Химический потенциал определяется формулой (21.10). Таким образом,

$$dn(\varepsilon) = \frac{N}{\xi V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\zeta(\varepsilon).$$

(Для одноатомного идеального газа $\xi = 1$, $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, а $d\zeta(\varepsilon)$ найдем из соотношения 4.7):

$$d\zeta(\varepsilon) = \frac{dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Вероятность обнаружить частицу в точке с координатами x, y и z и имеющей проекции импульса p_x, p_y и p_z равна

$$dW = \frac{1}{V\,(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z.$$

Это и есть распределение Максвелла — Больцмана (17,1) с вычисленным нормировочным множителем (при $U = 0$).

6.3. Показать, что для бозонного газа химический потенциал при уменьшении температуры монотонно растет.

Решение.

Химический потенциал для квантовых идеальных газов неявно задан формулой (23.1). В нашем случае

$$N = aV \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1}.$$

Продифференцируем это выражение по T при постоянных N и V.

$$0 = -aV \int_0^\infty \left[-\frac{\varepsilon-\mu}{kT} - \frac{1}{kT}\frac{\partial\mu}{\partial T}\right] F(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

где

$$F(\varepsilon) = \frac{x\sqrt{\varepsilon}}{(x-1)^2}; \qquad x = e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\mu}{\partial T} = -\frac{1}{T}\, \frac{\int_0^\infty (\varepsilon-\mu) F(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\int_0^\infty F(\varepsilon)\, d\varepsilon}.$$

Для идеального Бозе-газа $\mu \leqslant 0$. Поэтому $\frac{\partial\mu}{\partial T} < 0$.

6.4. Определить зависимость энергии электронного газа от температуры вблизи абсолютного нуля.

Решение.

Энергия электронного газа выражается формулой (22.2) со знаком «+» перед единицей:

$$U = aV \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}.$$

Произведем в этом выражении однократное интегрирование по частям:

$$U = aV\left\{\left[\frac{2}{5}\frac{\varepsilon^{5/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}\right]_0^\infty + \frac{2}{5kT}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\varepsilon^{5/2} d\varepsilon}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1\right)^2}\right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю. Во втором слагаемом перейдем к новой переменной интегрирования $x = \frac{\varepsilon-\mu}{kT}$. После подстановки получаем:

$$U = \frac{2aV}{5}\int_{-\frac{\mu}{kT}}^{\infty} (\mu + xkT)^{5/2}\, \frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}.$$

При температурах, близких к абсолютному нулю, $\mu \approx \mu(0)$ и

$$U = \frac{2aV}{5}\mu_0^{5/2}\int\limits_{-\mu_0/kT}^{\infty}\left(1 + \frac{kT}{\mu_0}x\right)^{5/2}\frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}; \quad \mu_0 = \mu(0).$$

Предполагается, что отношение $\frac{kT}{\mu_0} \ll 1$. Кроме того, функция

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

заметно отлична от нуля только в области $|x| \leqslant 1$. Поэтому первый множитель в подынтегральной функции можно разложить в ряд и ограничиться первыми тремя членами разложения:

$$\left(1 + \frac{kT}{\mu_0}x\right)^{5/2} \approx 1 + \frac{5}{2}\frac{kT}{\mu_0}x + \frac{15}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}x\right)^2.$$

Тогда

$$U = \frac{2aV}{5}\mu_0^{5/2}\left\{\int\limits_{-\frac{\mu_0}{kT}}^{\infty} f(x)\,dx + \frac{5kT}{2\mu_0}\int\limits_{-\frac{\mu_0}{kT}}^{\infty} xf(x)\,dx + \frac{15}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\int\limits_{-\frac{\mu_0}{kT}}^{\infty} x^2 f(x)\,dx\right\}.$$

При $T \to 0$ нижний предел можно заменить на $-\infty$. Первый интеграл в фигурных скобках вычислить нетрудно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x dx}{(e^x+1)^2} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = 1.$$

Второе слагаемое содержит интеграл от нечетной функции в интервале $(-\infty, \infty)$ и поэтому равно нулю. Третий интеграл равен

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2 e^x dx}{(e^x+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Как было показано ранее, $\mu_0 = \varepsilon_F$ и $\frac{2}{5}aV\mu_0^{5/2} = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$ [см. (23.6)]. Отсюда получаем:

$$U = \frac{3}{5}N\varepsilon_F\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$

Найденное выражение качественно правильно передает зависимость энергии от температуры при $T \to 0$. Более точный расчет учитывает изменение химического потенциала при уменьшении температуры и приводит к формуле (23.11), указанной в основном тексте.

6.4. Показать с помощью второго начала термодинамики, что плотность энергии равновесного электромагнитного излучения не зависит от материала и формы стенок полости.

Решение.

На рисунке 30 представлены два объема. Допустим, что каждая из систем нахо-

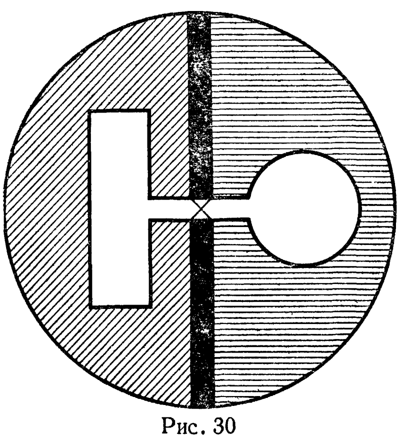

Рис. 30

дится в равновесии, а их температуры одинаковы. Если плотность энергии в полостях различна, то при соединении равновесие нарушится. Излучение будет переходить из объема с большей плотностью в объем с меньшей. В последней системе стенки станут получать больше энергии и их температура повысится (в другой полости соответственно понизится). Самопроизвольно возникнет разность температур, а это запрещено вторым началом термодинамики. Следовательно, допущение о различной плотности энергии неверно.

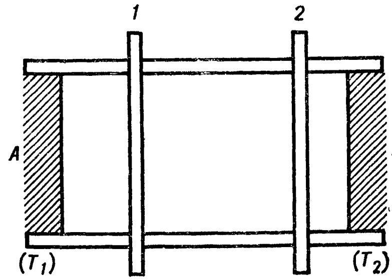

Рис. 31

Что справедливо для интегральной плотности, верно и для спектральной. Доказательство можно повторить дословно, если предположить, что в месте соединения полостей находится фильтр, пропускающий излучение только в определенном интервале частот.

6.5. Методами термодинамики доказать существование давления света.

Решение.

Рассмотрим два черных тела A и B с температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), соединенные между собой цилиндром с зеркальными стенками (рис. 31). В цилиндре имеются подвижные поршни *1* и *2* тоже с зеркальными стенками. Удалим второй поршень, оставив первый у самой поверхности тела A. Весь объем цилиндра наполнится равновесным излучением тела B. Вплотную к телу B вставим поршень *2*, а поршень *1* вынем из цилиндра. Если затем поршень *2* передвинуть от тела B к телу A, то все излучение, бывшее в цилиндре, поглотится телом A, а цилиндр вновь заполнится излучением тела B. Вставим поршень *1* у тела B, вынув поршень *2*, передвинем поршень *1* к телу A. Снова энергия, излученная B, поглотится A.

Таким способом мы берем энергию от тела B и отдаем телу A. Повторяя процедуру, можно перенести любое количество энергии от холодного тела B горячему телу A. В результате разность температур будет только увеличиваться. По второму началу термодинамики это может быть только при совершении работы. Передвижение поршня связано с совершением работы, если излучение производит давление на поршень.

6.6. Доказать закон Кирхгофа об отношении испускательной способности к поглощательной.

Решение.

В условиях равновесия излучение в полости однородно и изотропно. На каждый участок стенок за одинаковое время в расчете на единицу площади приходится одна и та же энергия. Любой элемент поверхности излучает столько же энергии, сколько поглощает.

Обозначим через $I_{\text{пад}}$ интенсивность падающего излучения. Энергия, излученная в единицу времени с единицы площади, называется испускательной способностью вещества стенок. Она обозначается — $I_{\text{исп}}$. Через $I_{\text{погл}}$ и $I_{\text{отр}}$ обозначим энергию поглощенную и отраженную стенкой. Отношения

$$A = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}}; \quad B = \frac{I_{\text{погл}}}{I_{\text{пад}}}$$

характеризуют отражательную и поглощательную способности вещества.

Для абсолютно черного тела $A = 0$. Обозначим его испускательную способность через L. В условиях равновесия при непрозрачных стенках

$$I_{\text{пад}} = I_{\text{погл}} + I_{\text{отр}}; \quad I_{\text{погл}} = I_{\text{исп}}; \quad A + B = 1.$$

Применяя эти формулы один раз к черному участку стенки, а другой раз к произвольному, получим:

$$L = \frac{I_{\text{исп}}}{B},$$

причем эта величина не зависит от материала стенок.

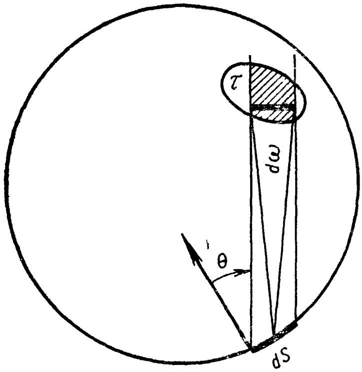

Рис. 32

Все указанные соотношения между величинами справедливы как для полного состава излучения, так и для любого интервала частот. В последнем случае под I следует понимать спектральную интенсивность излучения (падающего, поглощенного и т. д.).

6.7. Установить связь плотности энергии равновесного излучения с испускательной способностью абсолютно черного тела.

Решение.

Вследствие изотропии равновесного излучения исходящий из каждого элемента объема полости непрерывный поток энергии является одинаковым по интенсивности для всех направлений. Убыль энергии в элементе объема компенсируется встречными потоками. Если взять излучающий объем на границе со стенкой полости, то отсюда следует вывод, что от каждого участка стенки исходит излучение, и притом равномерно во все стороны. Это излучение содержит как испущенный, так и отраженный свет. Но черная стенка не отражает света. Следовательно, испускаемое черным телом излучение является изотропным. Любой элемент поверхности абсолютно черного тела в любом направлении испускает один и тот же световой поток. Поэтому яркость абсолютно черного тела не зависит от направления и является функцией только температуры. Свяжем ее с плотностью энергии равновесного излучения.

Рассмотрим рисунок 32. По определению яркости элемент поверхности стенки полости dS излучает под углом θ к нормали в элемент телесного угла $d\omega$ поток энергии, равный

$$d\Phi = BdS \cos \theta d\omega. \qquad (1)$$

Здесь B — яркость, $d\Phi$ — поток энергии.

Этот поток пронизывает малый объем τ, произвольно взятый внутри полости. Из общего количества энергии излучения, ежесекундно проходящего через τ, в каждый момент времени определенная часть содержится внутри объема τ. Для потока (1) это есть величина

$$dE' = \frac{l}{c}\, d\Phi,$$

где l — диаметр объема τ в заданном направлении, c — скорость света.

Телесный угол $d\omega$ равен

$$d\omega = \frac{d\Sigma}{r^2},$$

где $d\Sigma$ — сечение трубки, пересекающей объем τ, r — расстояние от площадки dS до τ. Произведение $ld\Sigma$ есть бесконечно малая часть объема τ. Обозначим ее через $d\tau$. Теперь для dE' получаем:

$$dE' = \frac{B}{c}\,\frac{dS\cos\theta}{r^2}\, d\tau. \qquad (2)$$

Энергия dE'', которая содержится во всем объеме τ за счет излучения элемента dS, найдется путем суммирования выражений типа (2) по всему объему τ. Вследствие малости τ угол Θ и расстояние r в формуле (2) будем считать постоянными. В результате суммирования имеем

$$dE'' = \frac{B\tau}{c}\,\frac{dS\cos\theta}{r^2}. \qquad (3)$$

Отношение

$$\frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

есть телесный угол $d\Omega$, под которым виден элемент dS из центра объема τ. Если необходимо найти всю энергию, находящуюся в τ, то нужно проинтегрировать выражение (3) по всей площади стенки:

$$E_\tau = \frac{B\tau}{c}\oint\frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{B\tau}{c}\int\limits_0^{4\pi} d\Omega = \frac{4\pi}{c}B\tau.$$

С другой стороны, $E_\tau = \rho\tau$. Отсюда

$$B = \frac{c}{4\pi}\rho.$$

Испускательная способность абсолютно черного тела с точки зрения фотометрии есть его светимость L. Для равномерно излучающих по всем направлениям источников света $L = \pi B$. Таким образом,

$$L = \frac{c}{4}\rho. \tag{4}$$

Пользуясь законом Стефана — Больцмана (24.4), можно записать

$$L = \frac{c\sigma}{4}T^4.$$

Если в формулу (4) подставить спектральную плотность энергии (24.3), то получим распределение интенсивности излучения в спектре абсолютно черного тела.