Все величины, входящие в формулу (27.9), известны или могут быть измерены. В свое время это соотношение послужило для точных измерений постоянной Больцмана, а через нее — и постоянной Авогадро. (Существуют и другие способы вывода формулы (27.9), а через нее и фундаментального соотношения (27.7). Один из них рассмотрен в задаче (7.5).)

Задачи к главе VII

7.1. Найти флуктуацию числа частиц квантового идеального газа в произвольном квантовом состоянии.

Решение.

Для нахождения δ_n применим формулу (25 6) к распределениям Больцмана (21.8), Бозе (21.6) и Ферми (21.5) Получаем соответственно:

$$\delta_n = \sqrt{\bar{n}},$$
$$\delta_n = \sqrt{\bar{n}(1+\bar{n})}, \qquad (1)$$
$$\delta_n = \sqrt{\bar{n}(1-\bar{n})}.$$

7.2. Найти флуктуацию энергии равновесного электромагнитного излучения, приходящуюся на интервал частот $\Delta\omega$.

Решение.

Энергия электромагнитного поля, приходящаяся на интервал частот $\Delta\omega$, согласно (24.1) равна

$$\Delta E = \frac{V\hbar\omega^3\Delta\omega}{\pi^2c^3(f-1)}; \; f = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

С помощью (25.2) находим флуктуацию:

$$\delta_{\Delta E} = \sqrt{\frac{V\hbar^2 f\omega^4\Delta\omega}{\pi^2c^3(f-1)^2}}.$$

Это выражение представим в виде

$$\delta_{\Delta E} = \sqrt{\hbar\omega\Delta E + \frac{(\Delta E)^2\pi^2c^3}{V\omega^2\Delta\omega}}.$$

В области больших частот ($\hbar\omega >> kT$) можно оставить под корнем лишь первое слагаемое. Ему можно дать чисто корпускулярное толкование. Пусть Δn — среднее число фотонов с частотой между ω и $\omega + \Delta\omega$. Тогда $\Delta E = \hbar\omega\Delta n$,

$$\delta_{\Delta E} = \hbar\omega\delta_{\Delta n} = \hbar\omega\sqrt{\Delta n},$$

что совпадает с формулой (1) задачи 7.1 при $\Delta n << 1$.

При малых частотах под корнем доминирует второе слагаемое, а первым можно пренебречь:

$$\delta_{\Delta E} \approx \sqrt{\frac{(\Delta E)^2\pi^2c^3}{V\omega^2\Delta\omega}}.$$

Второе слагаемое соответствует волновым представлениям о природе света.

7.3. Объяснить на примере пружинных весов влияние флуктуаций на точность измерения.

Решение.

Современные высокочувствительные измерительные приборы позволяют регистрировать явление того же масштаба, что и флуктуации, вызываемые движением молекул в самом приборе. Если ожидаемое значение физической величины F меньше или порядка среднеквадратичной флуктуации, т. е. $|F|<\delta_F$, то однократное измерение не позволяет судить о том, каково же на самом деле значение F. Прибор регистрирует тепловой фон, а не измеряемую величину F. В этом смысле говорят о естественном пределе чувствительности измерительных приборов.

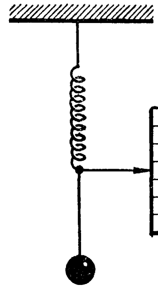

Рис. 36

Некоторое повышение точности достигается за счет многократных измерений. Действительно, если прибор регистрирует только собственные хаотические тепловые движения в механизме, то среднее значение его показаний будет равно нулю. Если же к тепловому фону добавить внешнее воздействие, то устройство начнет флуктуировать около нового положения равновесия, поэтому среднее положение указателя (стрелки) станет уже не нулевым. Однако и на этом пути скоро обнаруживается предел возрастания точности, так как оба положения равновесия должны четко отделяться друг от друга. Во всех случаях порядок наименьших значений величины F, еще доступных измерению, определяется флуктуацией.

Для примера рассмотрим пружинные весы (рис. 36). Стрелка чувствительных весов будет беспорядочно колебаться под воздействием тепловых движений молекул в пружине и флуктуаций давления в окружающей прибор воздушной среде. Смещению стрелки на Δx соответствует работа внешних сил:

$$\delta A = \frac{\gamma}{2} \Delta x^2,$$

где γ — коэффициент жесткости пружины. Поэтому вероятность флуктуации в положении указателя, связанной с удлинением пружины, согласно формуле (25.9) будет равна

$$dW(x) = \mathrm{const}\, e^{-\frac{\gamma \Delta x^2}{2kT}} dx.$$

Запишем распределение в виде нормального гауссовского распределения (1.5):

$$dW(x) = f(x)\, dx; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{\Delta x^2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\overline{\Delta x^2}}}.$$

Отсюда

$$\delta_x = \sqrt{\frac{kT}{\gamma}}.$$

Очевидно, груз весом менее $\gamma\delta_x$ взвешивать уже нельзя. Как и во многих других случаях, точность измерения может быть повышена за счет уменьшения температуры.

7.4. Определить предел чувствительности, обусловленный флуктуациями, для изобарического газового термометра с идеальным газом в качестве рабочего вещества.

Ответ. Наименьшее изменение температуры, которое может регистрировать прибор, по порядку величины равно $\frac{T}{\sqrt{N}}$.

Указание. Воспользоваться формулой (26.8) для оценки флуктуаций температуры.

7.5. Вывести формулу связи между коэффициентом вязкости и коэффициентом диффузии, рассматривая распределение эмульсии частиц в однородном поле тяготения.

Решение.

Если ось Oz направлена вертикально вверх, то выражение для потенциального поля, в котором находятся частицы, запишется так:

$$U = m^* gz,$$

где m^* — разность истинной массы частицы и массы жидкости, заключенной в ее объеме. (Тем самым учитывается действие выталкивающей силы Архимеда.) В условиях равновесия распределение частиц по высоте должно описываться формулой (17.9):

$$n(z) = n(0)\, e^{-\frac{m^* g z}{kT}}. \qquad (1)$$

С другой стороны, равновесное распределение эмульсии частиц есть результат динамического равновесия между потоком частиц, падающих вниз под действием силы тяжести, и потоком, возникающим в результате диффузии от нижних слоев к верхним, так как концентрация частиц в нижних слоях больше, чем в верхних.

Диффузионный поток описывается законом диффузии:

$$j = -D\frac{dn}{dz}.$$

Для определения величины нисходящего потока рассмотрим движение одной частицы под действием силы тяжести, архимедовой силы и силы сопротивления движению, равной $-a\dot{z}$, где $a = 6\pi r\eta$. Запишем уравнение Ньютона:

$$m\ddot{z} = -m^* g - a\dot{z}.$$

Отсюда

$$\ddot{z} = -\frac{a}{m}\dot{z} - \frac{gm^*}{m}.$$

Производная $\dot{z}$ есть скорость частицы v. Тогда для скорости имеем уравнение

$$\dot{v} + \frac{a}{m}v = -\frac{gm^*}{m},$$

которое совпадает по внешнему виду с уравнением (27.6). Это позволяет записать решение, пользуясь аналогией с решением уравнения (27.6),

$$v = Ce^{-\frac{a}{m}t} - \frac{gm^*}{a}.$$

Как указывалось (см. § 27.2), отношение $\frac{a}{m}$ в условиях реальных экспериментов очень велико, поэтому экспоненциальным членом можно пренебречь. Физически это означает, что практически мгновенно устанавливается движение с постоянной скоростью, равной по модулю $\frac{gm^*}{a}$.

Плотность потока, идущего вниз, будет равна

$$j = nv = \frac{gm^* n}{a}.$$

Приравнивая восходящий и нисходящий потоки, получаем:

$$\frac{gm^* n}{a} = -D\frac{dn}{dz}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$n(z) = n(0)\, e^{-\frac{gm^* z}{aD}}. \qquad (2)$$

Сравнивая (2) и (1), приходим к соотношению (27.9): $D = \frac{kT}{a}$.