ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Пусть заданы функции

$$q_i = q_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_f);\; i = 1, 2, \ldots, f.$$

Из них можно построить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial x_f} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial q_2}{\partial x_f} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial q_f}{\partial x_1} & \frac{\partial q_f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial q_f}{\partial x_f} \end{vmatrix}, \tag{П. 1}$$

который обозначается как

$$\frac{\partial\,(q_1, q_2, \ldots, q_f)}{\partial\,(x_1, x_2, \ldots, x_f)} \tag{П. 2}$$

и называется якобианом.

Если величины x_i и q_i обозначают два набора ортогональных криволинейных координат точки в f-мерном пространстве, то

$$dq_1 dq_2 \ldots dq_f = \frac{\partial\,(q_1, q_2, \ldots, q_f)}{\partial\,(x_1, x_2, \ldots, x_f)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_f. \tag{П. 3}$$

2. Докажем формулу

$$\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \tag{П. 4}$$

при $a > 0$ и целых положительных n. Используем метод полной математической индукции. При $n = 0$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Допустим, что для k-й степени x формула (П.4) выполняется.

$$\int\limits_0^\infty x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}.$$

Интеграл с $n = k + 1$ проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^\infty x^{k+1} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}\left[x^{k+1} e^{-ax}\right]_0^\infty + \frac{k+1}{a} \int\limits_0^\infty x^k e^{-ax} dx = \frac{(k+1)!}{a^{k+2}}.$$

3. Сделаем в интеграле (П.4) подстановку $x = y^2$. После несложных преобразований получаем формулу

$$\int_0^\infty y^{2n+1} e^{-ay^2} dy = \frac{n!}{2a^{n+1}}. \qquad (П. 5)$$

4. Для вычисления интеграла

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds$$

используем тождество

$$A^2 = \frac{4}{a}\int_0^\infty e^{-s^2} ds \int_0^\infty e^{-p^2} dp = \frac{4}{a}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s^2+p^2)} ds dp.$$

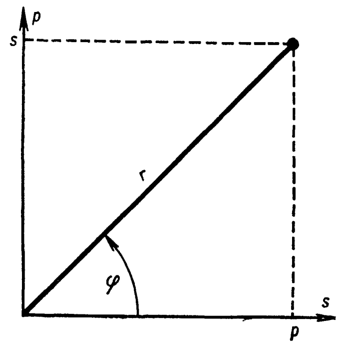

Рис. 47

Сделаем замену переменных в двойном интеграле: $r = \sqrt{s^2 + p^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{s}{p}$, которая соответствует переходу от декартовых к полярным координатам на плоскости (s, p). Поэтому произведение $ds dp$ заменяем на $r dr d\varphi$ (рис. 47).

$$A^2 = \frac{4}{a} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r dr d\varphi.$$

В последнем выражении интеграл по r вычисляется с помощью (П. 5). $A^2 = \frac{\pi}{a}$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \qquad (П. 6)$$

5. Продифференцируем равенство (П.6) по a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}.$$

Повторяя дифференцирование, на n-м шаге получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \qquad (П. 7)$$

6. Согласно (П. 7)

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \qquad (П. 8)$$

Сделаем подстановку $y = x^2$. Получаем:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ay} y^{n-\frac{1}{2}} dy = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \qquad (\text{П. } 9)$$

7. Приближенная формула Стирлинга имеет вид

$$\ln x! \approx x \ln x - x \quad (x \gg 1). \qquad (\text{П. } 10)$$

8. Найти число способов, которыми можно разложить N различных шаров по m ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось заданное число шаров n_i.

Решение.

В первый ящик мы можем положить n_i шар стольким числом способов, сколько существует сочетаний из N по n_1. Пусть в первый ящик уже положено n_1 каких-то шаров. Тогда во второй ящик мы можем положить n_2 из оставшихся $N - n_1$ таким числом способов, которое равно $C_{N-n_1}^{n_2}$. Таким образом, первые два ящика можно заполнить $C_N^{n_1} C_{N-n_1}^{n_2}$ способами. Нетрудно видеть, что все m ящиков можно заполнить числом способов, равным

$$\Omega = C_N^{n_1} C_{N-n_1}^{n_2}, \ldots C_{N-n_1-n_2-\ldots-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} \cdot \frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_1-n_2)!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(N-n_1-n_2-\ldots-n_{m-1})!}{n_m!\,(N-n_1-n_2-\ldots-n_m)!}.$$

Полагаем, что $(N - n_1 - n_2 - \ldots - n_m)! = 0! = 1$. Сокращая одинаковые множители в числителе и знаменателе, получим:

$$\Omega = \frac{N!}{n_1!\,n_2! \ldots n_m!}.$$

9. Найти число способов, которыми можно разложить N шаров по m ящикам, считая все шары совершенно одинаковыми, неразличимыми.

Решение.

Положим все шары в один ряд друг за другом. Вставим между ними $(m-1)$ перегородок. При этом получаем одно из числа возможных распределений шаров по ящикам. Все остальные распределения можно получить, делая перестановки шаров и перегородок. Причем новые распределения получаются только при перестановке какого-нибудь шара и перегородки, перестановки одних только шаров или одних только перегородок между собой не порождают новых распределений.

Пусть шары и перегородки допускают Ω разных способов перестановок. Если Ω умножить на $N!$ перестановок одних только шаров и на $(m-1)!$ перестановок одних только перегородок, то получим в результате все возможные перестановки из $N + m - 1$ объектов — шаров и перегородок. Таким образом:

$$\Omega \cdot N!\,(m-1)! = (N+m-1)!$$

Отсюда

$$\Omega = \frac{(N+m-1)!}{N!\,(m-1)!}.$$

10. Найти число способов, которыми можно разложить N неразличимых шаров по m ящикам так, чтобы ни в одном ящике не было более одного шара $(m \geqslant N)$.

Решение.

Пусть шары уже разложены каким-нибудь одним из возможных способов. При этом $m - N$ ящиков должны быть пустыми, а N заполненными. Все другие распределения можно получить, переставляя ящики между собой. Новые распределения получаются, если переставить местами заполненный и пустой ящик. Перестановка между собой только пустых или только заполненных ящиков новых распределений не дает.

Пусть Ω — число возможных способов разложить шары. Оно равно числу перестановок пустых и заполненных ящиков. Если Ω умножить на число перестановок одних только пустых ящиков ($(m - N)!$) и на число перестановок одних только заполненных ящиков ($N!$), то получим полное число перестановок ящиков. Таким образом,

$$\Omega \ N!\,(m - N)! = m!. \text{ Отсюда } \ \Omega = \frac{m!}{N!\,(m - N)!}.$$