ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВЕКТОРЫ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

I. ОТРЕЗОК, ОСЬ, ВЕКТОР

§ 1. Отрезок

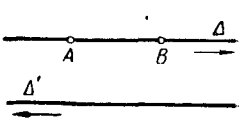
Понятие отрезка известно из элементарной геометрии: *отрезок есть часть прямой, ограниченная с обеих сторон двумя точками.*

Существенной характеристикой отрезка является его длина. Под *длиной* данного отрезка мы всегда будем подразумевать *положительное число*, получаемое в результате измерения отрезком, выбранным за единицу.

§ 2. Ось

В аналитической геометрии, кроме понятия прямой линии, играет основную роль весьма близкое к нему понятие *оси*.

Рассмотрим какую-либо прямую линию AB. Точка, движущаяся непрерывно по этой прямой в одну и ту же сторону, может описывать ее в двух противоположных направлениях: в направлении, ведущем от A к B, или же, наоборот, в направлении, ведущем от B к A. Выберем какое-либо одно из этих двух направлений и назовем его *положительным*; противоположное направление назовем *отрицательным*.



Черт. 1

Прямая, на которой выбрано определенное направление в качестве положительного, называется осью. Ось обыкновенно изображается при помощи прямой, положительное направление которой отмечено стрелкой; например, на черт. 1 ось Δ имеет положительное направление, ведущее от A к B.

О двух осях говорят, что они имеют *одинаковые направления*, когда они *не только параллельны* между собою, *но и имеют одинаковые положительные направления*. В случае когда две оси параллельны, но положительные направления их различны, говорят, что эти оси направлены *противоположно*. Например, на черт. 1 оси Δ и Δ' имеют противоположные направления.

§ 3. Векторы

Вектором называется отрезок прямой, которому приписано определенное положительное направление.

На чертеже вектор изображается отрезком прямой, на котором стрелкой отмечено положительное направление.

Одна из двух конечных точек вектора называется *началом* вектора, а другая — его *концом*; положительное направление вектора идет от начала к концу. Начало вектора называют также *точкой* его *приложения*.

Вектор, имеющий началом точку A, а концом — точку B, мы будем обозначать так:

$$\overrightarrow{AB},$$

ставя на первое место букву, обозначающую начало; стрелка над буквами указывает нам, что мы имеем дело с вектором, а не простым отрезком. Еще чаще мы будем обозначать вектор одной только буквой, напечатанной жирным шрифтом [1]), например **P**.

Для *длины* вектора $\overrightarrow{AB}$ или **P** мы будем применять обозначение

$$|AB| \text{ или } |\mathbf{P}|.$$

Длину вектора часто называют *абсолютным значением* или *модулем* вектора.

Понятие вектора играет большую роль как в математике, так и во многих областях физики и механики. Многие физические величины могут быть представлены при помощи векторов, и это представление очень часто способствует обобщению и упрощению формул и результатов. Именно, всякая физическая величина, имеющая, кроме определенного численного значения [2]), и определенное направление, может быть представлена вектором, длина которого (численно) равна численному значению рассматриваемой величины, а направление совпадает с ее направлением.

Примерами физических величин, изображаемых векторами (такие величины называются *векторными*), могут служить: сила, скорость (данной точки), ускорение и пр. Часто векторные величины и векторы, их изображающие, отождествляются друг с другом: так, например, говорят, что сила (или скорость) есть вектор [3]).

---

[1]) В рукописи мы рекомендуем обозначать вектор буквой со стрелкой над ней, например, $\vec{P}$. Можно применять и какой-либо другой знак.

[2]) Это численное значение получается в результате измерения данной величины определенной (произвольно выбранной) единицей.

[3]) Данное нами определение вектора как отрезка, снабженного направлением, с известной точки зрения, слишком узко. Можно дать более общее, абстрактное определение, согласно которому отрезок, снабженный направлением, будет уже не вектором, а одним из видов векторных величин.

Векторным величинам противопоставляют величины *скалярные*, которые не имеют направления и вполне характеризуются заданием лишь их численного значения (полученного в результате измерения определённой единицей) и знака. Например, длина отрезка, площадь, объем, масса и т. п. суть величины скалярные.

В дальнейшем под скаляром мы будем подразумевать число (положительное или отрицательное), характеризующее данную скалярную величину.

§ 4. Равенство векторов

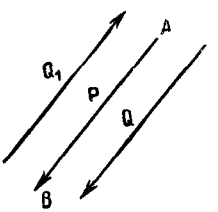
Два вектора **P** и **Q** называются *равными, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления* [1]). Это обстоятельство записывается следующим образом:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}. \tag{1}$$

Необходимо всегда помнить, что *равенство длин двух векторов еще не означает равенства этих векторов*. Для того чтобы подчеркнуть этот факт, мы будем иногда называть равенства вида (1) векторными равенствами.

Если векторы **P** и **Q** имеют одинаковые длины, но противоположные направления, то они называются *взаимно противоположными*. Это обстоятельство записывается так:

$$\mathbf{P} = -\mathbf{Q}.$$



Черт. 2

Например, на черт. 2 векторы **P** и **Q** равны, а векторы **P** и $\mathbf{Q}_1$ — взаимно противоположны.

Если длина вектора равна нулю, то говорят, что этот вектор равен нулю. Направление такого вектора является неопределенным и его можно считать параллельным любому направлению.

Введем еще один термин: *отложить* данный вектор от данной точки — это значит построить вектор, равный данному и имеющий началом данную точку.

§ 5. Векторы: свободный, скользящий и связанный

В большинстве рассматриваемых ниже вопросов существенную роль играют только длина и направление вектора; положение же начала никакой роли не играет. Поэтому в дальнейшем (если противное не оговорено особо) мы будем считать тождественными векторы, имеющие одинаковые длины и направления, независимо

[1]) В дальнейшем, говоря о направлении вектора или оси, мы всегда подразумеваем положительное направление.

от положения их начал. Иными словами, мы будем считать вполне тождественными (или *эквивалентными*) векторы, равные между собою.

Надо, однако, заметить, что в очень многих вопросах чистой и прикладной математики приходится рассматривать векторы, положение начала которых играет существенную роль. В отличие от последних векторы, только что охарактеризованные нами (т. е. такие, положение начала которых не играет никакой роли), называются *свободными*.

Из несвободных векторов в математике, механике и физике рассматриваются векторы *скользящие* и *связанные*.

Скользящие — это такие векторы, которые считаются тождественными (эквивалентными), если они не только равны, но и расположены на одной и той же прямой. Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу. Действительно, из механики известно, что две силы, равные и расположенные на одной прямой, эквивалентны в том смысле, что оказывают на твердое тело одинаковое механическое действие.

Связанные — это такие векторы, которые считаются тождественными, если они не только равны, но и имеют одинаковые начала. Примером связанного вектора может служить сила, приложенная к некоторой точке нетвердого (например, упругого) тела.

II. СУММА ВЕКТОРОВ. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА И ЧИСЛА

§ 6. Об операции сложения и умножения

В дальнейшем (в этом и в V отделах этой главы) нам предстоит рассмотреть несколько простейших операций, аналогичных операциям сложения и умножения обыкновенных чисел. Рассмотрение этих операций составляет предмет той части теории векторов, которая носит название *векторной алгебры*. Мы ограничимся изложением самых основных понятий.

Введение тех или иных операций оправдывается пользой, которую можно извлечь из их применения. Названия «сложение» и «умножение», которые даются вводимым ниже операциям, оправдываются тем, что они обладают некоторыми из основных свойств сложения и умножения обыкновенных чисел.

Вот те свойства сложения и умножения обыкновенных чисел, которые остаются справедливыми и для вводимых ниже операций (как это будет доказано в каждом отдельном случае).

1°. Переместительность (коммутативность) сложения: сумма (конечного числа слагаемых) не зависит от порядка, в котором производится сложение.

2°. Сочетательность (ассоциативность) сложения: не изменяя суммы, слагаемые можно соединять в произвольные группы,