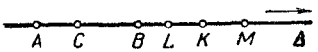
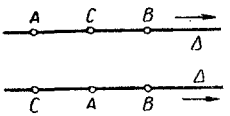
Эта простая формула тривиальна в том случае, когда все векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и т. д. направлены в одну и ту же сторону. В общем



Черт. 13



Черт. 14

же случае (черт. 13) формула эта, известная под названием теоремы Шаля (Chasles), не столь очевидна и является весьма полезной для выводов общего характера.

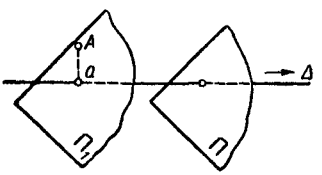
Упражнения

1. Обратить внимание на равенство $AB+BA=0$.
2. Проверить равенство $AB+BC=AC$ для случаев, представленных на черт. 14.

III. ПРОЕКЦИИ НА ОСЬ И НА ПЛОСКОСТЬ

§ 13. Проекция на ось

Пусть Δ — некоторая ось [1]), а Π — некоторая плоскость, не параллельная этой оси (черт. 15). Пусть, далее, A есть некоторая точка пространства. Проведем через A плоскость Π_1, параллельную плоскости Π, и пусть a есть точка пересечения проведенной только что плоскости с осью Δ.



Черт. 15

Точка a есть *проекция* точки A на ось Δ, *взятая параллельно плоскости* Π.

Ось Δ называется *осью проекций*. Если плоскость Π перпендикулярна к оси Δ, то проекция называется *прямоугольной* (или *ортогональной*). В этом случае проекция точки A есть, попросту, основание перпендикуляра, опущенного из A на ось Δ.

Непрямоугольные проекции в отличие от прямоугольных называются *косоугольными*; те и другие вместе называются *параллельными проекциями* [2])

Пусть $\overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор и пусть a и b обозначают проекции начала и конца этого вектора на ось Δ, взятые параллельно

[1]) В дальнейшем, пока речь не идет об алгебраическом значении проекции вектора (см. ниже), можно под Δ подразумевать не ось, а прямую.

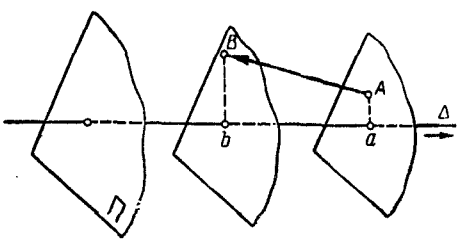
[2]) В отличие от других видов проекций, например центральной.

одной и той же плоскости П (черт. 16). Вектор $\overrightarrow{ab}$ называется проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Δ, взятой параллельно плоскости П[1]). Для обозначения факта, что вектор $\overrightarrow{ab}$ есть проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Δ, взятая параллельно плоскости П, мы будем писать:

$$\overrightarrow{ab} = \text{Пр}_{\Delta}\overrightarrow{AB} \text{ (параллельно П)}.$$

В дальнейшем нам придется иметь дело, главным образом, не с самой проекцией $\overrightarrow{ab}$, а с ее алгебраическим значением ab по оси Δ. Это алгебраическое значение проекции мы будем обозначать аналогичным образом, но только будем писать символ «пр» с маленькой буквы, т. е. будем писать:

$$ab = \text{пр}_{\Delta}\overrightarrow{AB} \text{ (параллельно П)}.$$



Черт. 16

Если дополнительное указание в скобках отсутствует, то проекция обычно предполагается прямоугольной.

Легко видеть, что проекции равных векторов (взятые параллельно одной и той же плоскости) на одну и ту же ось равны между собою, т. е. что если

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q},$$

то

$$\text{Пр}_{\Delta}\mathbf{P} = \text{Пр}_{\Delta}\mathbf{Q}, \quad \text{пр}_{\Delta}\mathbf{P} = \text{пр}_{\Delta}\mathbf{Q}$$

(проекции берутся параллельно одной и той же плоскости).

Точно так же, если две оси Δ и Δ′ одинаково направлены, то проекции (параллельные одной и той же плоскости) любого вектора на эти оси равны между собою.

Далее, проекции двух взаимно противоположных векторов на одну и ту же ось также взаимно противоположны, а их алгебраические значения равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, т. е. $\text{пр}_{\Delta}(-\mathbf{P}) = -\text{пр}_{\Delta}\mathbf{P}$ (проекции берутся параллельно одной и той же плоскости).

З а м е ч а н и я. 1. Если вектор **P** параллелен плоскости П, то проекции точек A и B совпадают, а потому проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ (взятая параллельно П) равна нулю.

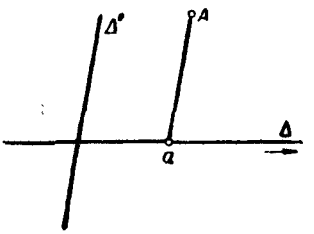
---

[1]) Иногда под проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ понимают не вектор $\overrightarrow{ab}$, а алгебраическое значение ab этого вектора по оси Δ.

2. Если вектор **P** параллелен оси проекций Δ, то, очевидно, проекция вектора **P** на ось Δ равна вектору **P**, а ее алгебраическое значение равно алгебраическому значению **P** по оси Δ.

§ 13а. Проекции фигур, расположенных в одной и той же плоскости

Если все точки и векторы какой-либо фигуры находятся в одной и той же плоскости с осью проекций, то предыдущее определение проекции можно заменить следующим (черт. 17, где за плоскость чертежа принята только что упомянутая плоскость). Пусть Δ′ — некоторая прямая на рассматриваемой плоскости, не параллельная оси проекций Δ. Проведем из какой-либо точки A (взятой на рассматриваемой плоскости) прямую, параллельную Δ′, и пусть a есть точка пересечения проведенной прямой с осью Δ. Точка a называется проекцией точки A на ось Δ, взятой параллельно прямой Δ′.



Черт. 17

Если прямая Δ′ перпендикулярна к оси Δ, то проекция называется *прямоугольной*, или ортогональной.

Остальные определения проекций — те же, что и в предыдущем параграфе; надо только всюду вместо «параллельно плоскости П» говорить «параллельно прямой Δ′».

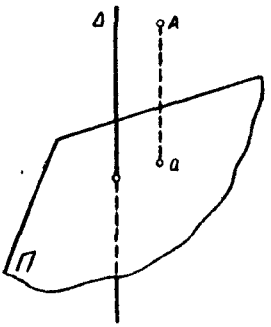
§ 14. Проекция на плоскость

Пусть П — некоторая плоскость, а Δ — произвольная прямая, не параллельная плоскости П (черт. 18). Проведем из A прямую Aa, параллельную Δ; она пересечет плоскость П в некоторой точке a. Эта точка называется проекцией точки A на плоскость П, взятой параллельно прямой Δ.

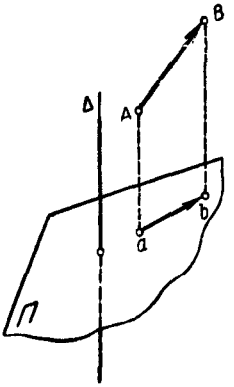
Если Δ перпендикулярна к П, то проекция называется прямоугольной, или ортогональной. В этом случае a есть основание перпендикуляра, опущенного из A на П. Непрямоугольные проекции называются косоугольными, а те и другие вместе — параллельными, или цилиндрическими проекциями.

Пусть теперь $\overrightarrow{AB}$ есть некоторый вектор и пусть a и b обозначают проекции соответственно начала и конца его на плоскость П, взятые параллельно прямой Δ (черт. 19). Тогда вектор $\overrightarrow{ab}$ называется проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$, взятой параллельно прямой Δ: $\overrightarrow{ab} = \text{Пр}_{\text{п}}\, \overrightarrow{AB}$ (параллельно Δ).

Вообще проекцией какой-либо геометрической фигуры на плоскость П называется геометрическое место проекций точек этой



Черт. 18



Черт. 19

фигуры. В частности, проекция треугольника есть также треугольник, вершины которого суть соответственно проекции вершин данного треугольника [1]).

Относительно проекций векторов на плоскость имеют место те же простые предложения, что и для проекций на ось: проекции двух равных векторов равны; проекции вектора на две параллельные плоскости равны между собой.

§ 15. Проекции суммы и разности векторов на ось

Докажем теперь следующее важное предложение:

Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось:

$$\text{Пр}_\Delta \mathbf{P} = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_1 + \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_2 + \ldots + \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_{n-1} + \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_n, \qquad (1)$$

где $\mathbf{P}$ обозначает сумму

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_n;$$

предполагается, конечно, что проекции берутся параллельно одной и той же плоскости.

Действительно, расположим данные векторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . ., $\mathbf{P}_{n-1}$, $\mathbf{P}_n$ так, как это делается для составления многоугольника векторов.

---

[1]) Все чертежи этой книги, изображающие пространственные фигуры, представляют собой не что иное, как параллельные проекции этих фигур на плоскость чертежа.

Ограничиваясь для наглядности чертежа случаем четырех слагаемых ($n = 4$), положим (черт. 20)

$$\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{P}_2 = \overrightarrow{BC}, \quad \mathbf{P}_3 = \overrightarrow{CD}, \quad \mathbf{P}_4 = \overrightarrow{DE}.$$

Сумма этих векторов равна

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{AE}.$$

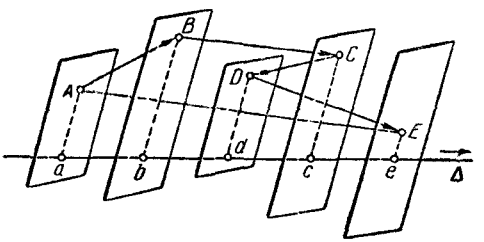
Пусть a, b, c, d, e соответственно обозначают проекции [1]) точек A, B, C, D, E. По самому определению суммы векторов имеем

$$\overrightarrow{ae} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de}.$$

Но ведь

$$\overrightarrow{ae} = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}, \quad \overrightarrow{ab} = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_1, \quad \overrightarrow{bc} = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_2, \quad \overrightarrow{cd} = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_3, \quad \overrightarrow{de} = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_4.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим равенство (1), а это и требовалось доказать.



Черт. 20

Повторяем, что мы ограничились случаем четырех слагаемых исключительно для наглядности чертежа; в общем случае доказательство то же.

Из доказательства непосредственно следует, что *алгебраическое значение проекции суммы векторов равно сумме алгебраических значений проекций слагаемых*, т. е.

$$\text{пр}_\Delta \mathbf{P} = \text{пр}_\Delta \mathbf{P}_1 + \text{пр}_\Delta \mathbf{P}_2 + \ldots + \text{пр}_\Delta \mathbf{P}_n.$$

Точно так же легко показать, что *проекция разности двух векторов равна разности проекций этих векторов*, т. е.

$$\text{Пр}_\Delta (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_1 - \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_2. \tag{2}$$

Действительно, на основании сказанного в § 9, имеем

$$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + (-\mathbf{P}_2),$$

откуда, на основании предыдущего,

$$\text{Пр}_\Delta (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_1 + \text{Пр}_\Delta (-\mathbf{P}_2) = \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_1 - \text{Пр}_\Delta \mathbf{P}_2.$$

Для алгебраических значений проекций имеем аналогичную формулу:

$$\text{пр}_\Delta (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \text{пр}_\Delta \mathbf{P}_1 - \text{пр}_\Delta \mathbf{P}_2.$$

---

[1]) В дальнейшем, где не может возникнуть никаких недоразумений, мы опускаем указание на то, что проекции берутся параллельно одной и той же плоскости.

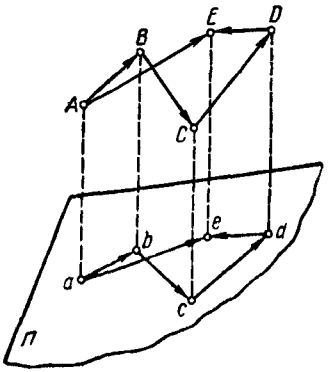
§ 16. Проекции суммы и разности векторов на плоскость

Легко показать также, что проекция суммы данных векторов на данную плоскость П равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же плоскость, т. е. если

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n,$$

то

$$\text{Пр}_\text{П}\ \mathbf{P} = \text{Пр}_\text{П}\ \mathbf{P}_1 + \text{Пр}_\text{П}\ \mathbf{P}_2 + \ldots + \text{Пр}_\text{П}\ \mathbf{P}_n \qquad (1)$$



Черт. 21

(предполагается, конечно, что проекции берутся параллельно одной и той же прямой Λ). Эта теорема доказывается так же, как и теорема предыдущего параграфа (черт. 21).

Точно так же проекция разности двух векторов равна разности их проекций, т. е. если

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2,$$

то

$$\text{Пр}_\text{П}\ \mathbf{Q} = \text{Пр}_\text{П}\ \mathbf{P}_1 - \text{Пр}_\text{П}\ \mathbf{P}_2. \qquad (2)$$

§ 17. Проекция произведения вектора и числа

Легко показать, что если данный вектор **P** умножить на число m, то на это же число умножится проекция вектора (на данную ось или на данную плоскость). Формулой это выразится так:

$$\text{Пр}\,(m\mathbf{P}) = m\,\text{Пр}\,\mathbf{P},$$

где подразумевается проекция на данную ось (или на данную плоскость), взятая параллельно данной плоскости (или прямой).

То же имеет место для алгебраического значения проекции вектора на данную ось:

$$\text{пр}\,(m\mathbf{P}) = m\,\text{пр}\,\mathbf{P}.$$

Предлагается читателю доказать это почти очевидное предложение, взяв начало данного вектора на оси (или плоскости) проекций и применив простейшие предложения о подобных треугольниках.

IV. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

В этом отделе рассматриваются исключительно прямоугольные (ортогональные) проекции, а потому мы не станем упоминать об этом в каждом отдельном случае.