ГЛАВА ВТОРАЯ

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И ТОЧКИ

1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Мы переходим теперь к одному из способов осуществления связи между геометрическими образами и числами. Мы начнем с простейших геометрических образов — точек и векторов — и введем понятие декартовых координат этих образов. Координатами данного образа, вообще говоря, называются числа, которые вполне характеризуют существенные геометрические элементы, связанные с этим образом.

§ 27. Координаты на прямой (оси)

Пусть дана некоторая ось Ox (черт. 34) и пусть $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор, расположенный на этой оси. Пусть $\mathbf{u}$ обозначает орт оси Ox. Тогда (см. § 11) можем написать

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot X, \tag{1}$$

где X обозначает алгебраическое значение вектора $\mathbf{P}$ по оси Ox т. е. [1])

$$X = \pm |\mathbf{P}|, \tag{2}$$

а плюс или минус берется в зависимости от того, совпадает ли направление $\mathbf{P}$ с направлением оси Ox или противоположно ему. Если дан вектор $\mathbf{P}$, то величина X вполне определена (например, если длина вектора $\mathbf{P}$ равна 4, а направление его противоположно направлению оси Ox, то $\mathbf{P} = -4\mathbf{u}$ и $X = -4$). Обратно, если дано число X, то длина и направление вектора $\mathbf{P}$ вполне определены (длина равна абсолютной величине X, а направление определяется знаком X; например, если $X = -3$, то длина вектора $\mathbf{P} = -3\mathbf{u}$ равна 3, а направление противоположно направлению оси Ox).

Как и раньше, будем считать вектор вполне данным, если известны его длина и направление (так что положению начала мы

---

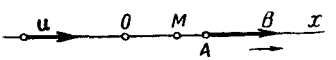
[1]) Согласно обозначениям § 12, $X = AB$ (без стрелки наверху).

не будем придавать никакого значения). Поэтому можно сказать, что число X вполне определяет вектор **P**.

Это число X (т. е., попросту, алгебраическое значение вектора **P** по оси Ox) называется *декартовой координатой вектора* **P**, расположенного на оси Ox. Ось же Ox носит название *оси декартовой системы координат*.

На основании определения ясно, что координаты двух равных векторов равны между собою, и обратно, если координаты двух векторов равны, то равны и векторы.

Пусть теперь O обозначает некоторую постоянную точку на оси Ox (черт. 34). Положение любой другой точки M на этой оси вполне определяется заданием вектора $\overrightarrow{OM}$ по длине и направлению; с другой стороны, длина и направление этого вектора вполне определяются его координатой.



Черт. 34

Обозначим через x эту координату, т. е. положим [1])

$$x = OM. \tag{3}$$

Число x в то же время называется декартовой координатой точки M; точка же O называется *началом координат*.

Часто также координату x называют *абсциссой* точки M, а ось Ox — *осью абсцисс*.

Начало координат разбивает ось абсцисс на две части. Точки, лежащие на одной из этих частей (на нашем чертеже — точки, лежащие справа от O), имеют положительные абсциссы, а точки, лежащие на другой части (на нашем чертеже — слева от O), — отрицательные абсциссы. Первую часть можно назвать положительною частью оси x, а вторую — отрицательною.

На основании сказанного выше, абсциссу можно определить еще и следующим образом.

Абсцисса точки M есть число x, абсолютное значение которого равно расстоянию точки M до начала координат и которое считается положительным, когда M находится на положительной части оси, отрицательным — в противном случае [2]).

Чтобы отметить, что x есть координата точки M, пишут: точка $M(x)$. Например, точка $M(-3)$ есть точка, расстояние которой от начала координат равно 3 единицам и которая расположена на отрицательной части оси координат.

---

[1]) Напомним, что OM (без стрелки наверху) обозначает положительное или отрицательное число (смотря по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$).

[2]) Во всем предыдущем подразумевается, что раз навсегда выбрана единица длины (например, сантиметр), которой измеряются длины отрезков. Иначе слова «абсолютное значение x равно расстоянию...» не имели бы смысла.

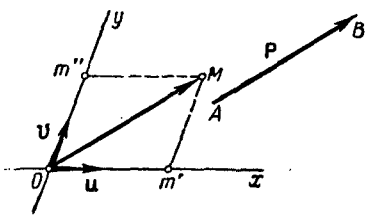
Упражнения

1. Построить векторы $\mathbf{P}=2\mathbf{u}$, $\mathbf{P}=\frac{1}{2}\mathbf{u}$, $\mathbf{P}=-\frac{3}{4}\mathbf{u}$.
2. Построить точки $M(-1)$, $M(0)$, $M(10)$.
3. Найти расстояние между точками $M_1(-4)$ и $M_2(12)$.
4. Даны две точки $A(-3)$ и $B(-4)$. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Ответ. $\overrightarrow{AB}=-\mathbf{u}$, $\overrightarrow{BA}=\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ — орт оси абсцисс).

§ 28. Координаты вектора и точки на плоскости

В предыдущем параграфе мы убедились, что вектор, расположенный на данной прямой (оси), вполне определяется заданием одного числа (координаты); то же относится и к положению точки на данной прямой. Мы увидим сейчас, что для определения вектора, расположенного на данной плоскости, необходимо задание *двух* чисел; это относится также к определению положения точки на данной плоскости.



Черт. 35

Возьмем на данной плоскости две пересекающиеся оси Ox, Oy (черт. 35). Докажем, что любой вектор $\mathbf{P}=\overrightarrow{AB}$, находящийся на этой плоскости, можно представить как сумму двух векторов, из которых каждый параллелен одной из осей Ox, Oy.

Действительно, перенесем вектор $\mathbf{P}$ (не изменяя длины и направления его) в положение $\overrightarrow{OM}$ так, чтобы его начало совпало с точкой O пересечения осей Ox, Oy. Проведем, далее, прямые Mm' и Mm'', соответственно параллельные осям Oy и Ox, и пусть m' и m'' обозначают их пересечения соответственно с осями Ox и Oy. Тогда, очевидно,

$$\mathbf{P}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om'}+\overrightarrow{Om''}, \tag{1}$$

что и доказывает наше утверждение.

Последнему равенству можно придать вид, где ясно выступает характер представления (1).

Действительно, обозначим соответственно через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ орты осей Ox и Oy. Тогда, очевидно (см. § 11),

$$\overrightarrow{Om'}=\mathbf{u}X, \quad \overrightarrow{Om''}=\mathbf{v}Y, \tag{2}$$

где X и Y обозначают соответственно алгебраические значения векторов $\overrightarrow{Om'}$ и $\overrightarrow{Om''}$ по осям Ox и Oy.

Таким образом,

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y. \tag{3}$$

На основании определения величин X и Y ясно, что

$$\left.\begin{aligned} X &= \text{пр}_x\overrightarrow{OM} = \text{пр}_x\mathbf{P} \text{ (параллельно оси } Oy), \\ Y &= \text{пр}_y\overrightarrow{OM} = \text{пр}_y\mathbf{P} \text{ (параллельно оси } Ox) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(пр_x и пр_y обозначают соответственно алгебраические значения проекций на оси Ox и Oy).

Легко показать, что представление данного вектора в виде (3) возможно только единственным способом, т. е. что если для того же вектора $\mathbf{P}$ имеем представление

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X' + \mathbf{v}Y',$$

то необходимо $X' = X$, $Y' = Y$. Действительно, сравнивая предыдущую формулу с (3), получаем $\mathbf{u}X' + \mathbf{v}Y' = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y$, откуда следует, что $\mathbf{u}(X' - X) + \mathbf{v}(Y' - Y) = 0$, или еще

$$\mathbf{u}l + \mathbf{v}m = 0, \tag{5}$$

где $l = X' - X$, $m = Y' - Y$. С другой стороны, легко видеть, что равенство вида (5), в котором $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — непараллельные векторы, возможно только в том случае, если $l = m = 0$. Действительно, в противном случае вышло бы, что векторы $\mathbf{u}\cdot l$ и $-\mathbf{v}\cdot m$, параллельные различным направлениям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, равны между собой, что невозможно. Итак, мы имеем $l = m = 0$, откуда и следует, что $X' = X$, $Y' = Y$.

Таким образом, величины X и Y вполне определены, если дан вектор $\mathbf{P}$; обратно, если X и Y даны, вектор $\mathbf{P}$ вполне определяется формулой (3) [1].

Величины X и Y называются *декартовыми координатами вектора* $\mathbf{P}$. Для обозначения факта, что X и Y являются координатами вектора $\mathbf{P}$, пишут:

$$\mathbf{P}(X, Y) \text{ или } \mathbf{P} = (X, Y);$$

последнее равенство надо понимать, попросту, как краткую запись формулы (3).

Из самого определения координат вытекает, что координаты равных векторов равны между собою и что, обратно, векторы с одинаковыми координатами равны.

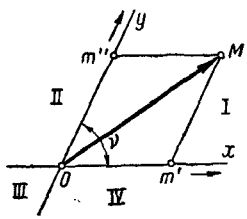
Очевидно, далее, что если вектор равен нулю (т. е. его длина равна нулю), то координаты его равны нулю, и обратно.

---

[1]) Напомним еще раз, что свободный вектор считается определенным, если известны его длина и направление; положение начала — безразлично.

Пусть M есть произвольная точка на данной плоскости. Положение точки M на плоскости вполне определено, если известны длина и направление вектора $\overrightarrow{OM}$ (черт. 36), иначе говоря, если известны координаты этого вектора, который называется *радиусом-вектором* точки M относительно точки O.

Обозначим через x и y эти координаты, иначе говоря, положим $x = \text{пр}_x\overrightarrow{OM}$ (параллельно оси Oy), $y = \text{пр}_y\overrightarrow{OM}$ (параллельно оси Ox); числа x и y, которые вполне определяют положение точки M на плоскости, называются *декартовыми координатами* точки M. *Задать точку* — это значит *задать ее координаты*.



Черт. 36

Для обозначения факта, что x и y являются координатами точки M, пишут: точка $M(x, y)$.

Можно дать еще следующее определение координат x и y.

Пусть m' и m'' обозначают проекции точки M на оси Ox и Oy, взятые соответственно параллельно осям Oy и Ox; тогда

$$x = Om'; \quad y = Om'';$$

иначе говоря, x есть алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{Om'}$, т. е. координата точки m' на оси Ox (см. предыдущий параграф); аналогично для y.

Для того чтобы построить точку M по данным координатам x и y, достаточно отложить (не упуская из вида знаков) на оси Ox отрезок $Om' = x$, а на оси Oy — отрезок $Om'' = y$ и из полученных точек провести прямые, параллельные соответственно осям Oy и Ox; точка пересечения последних прямых и есть точка M.

Оси Ox и Oy называются *осями декартовой системы координат*, а точка O — *началом координат*. Угол же ν, заключенный между положительными направлениями осей, называется *координатным углом*. Оси координат разбивают всю плоскость на четыре части: I, II, III, IV (черт. 36), из которых каждая характеризуется знаками координат точек, принадлежащих этой части.

В части I обе координаты положительны, в части II $x < 0$, $y > 0$, в части III $x < 0$, $y < 0$ и, наконец, в части IV $x > 0$, $y < 0$.

Часть I (т. е. та часть, где $x > 0$, $y > 0$) называется иногда *нормальным координатным углом*.

Обыкновенно на чертеже ось Ox («ось x-ов») проводится горизонтально и направляется слева направо, а ось Oy («ось y-ов») — снизу вверх.

Координату x называют *абсциссой* точки M, а координату y — *ординатой*; соответственно этому ось x-ов называется также *осью абсцисс*, а ось y-ов — *осью ординат*.

При только что указанном расположении чертежа точки, лежащие справа от оси Oy, имеют положительные абсциссы, а точки, расположенные слева от этой оси,— отрицательные. Точно так же точки, лежащие выше оси Ox, имеют положительные ординаты, а точки, лежащие ниже этой оси,— отрицательные. Например, точка M $(-3, +5)$ расположена влево от оси Oy и выше оси Ox, и для построения этой точки достаточно отложить вдоль оси Ox, влево от O, отрезок длины 3, а из конца этого отрезка на прямой, параллельной оси Oy, отложить отрезок длины 5 кверху.

Упражнения

1. Начертить какую-либо систему осей координат Ox, Oy и, выбрав определенную единицу длины, построить точки:

$$M(0, 0),\ M(5, 0),\ M(0, 3),\ M(0, -1),\ M(5, -2),\ M(-3, -3).$$

2. Построить вектор $\mathbf{P} = (3, -1)$.

3. Построить векторы $(1, 2)$ и $(4, 8)$ и доказать, что они параллельны.

4. Предполагая координатный угол ν равным $60°$, построить точки $M_1(1, 0)$, $M_2(0, 2)$ и найти расстояние между ними.

Ответ. $|M_1M_2| = \sqrt{3}$.

5. При координатном угле $\nu = 60°$ найти расстояние точки $(4, 4)$ до начала координат.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

6. Доказать, основываясь на результате упражнения 1 § 8, что расстояние точки $M(x, y)$ до начала координат дается формулой

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\nu}, \qquad (*)$$

где ν — угол между осями координат. Тщательно исследовать разницу между этой формулой и формулой упомянутого упражнения. Доказать, что формула (*) справедлива не только при $x > 0$, $y > 0$, а при всех возможных сочетаниях знаков (т. е. также при $x > 0$, $y < 0$; $x < 0$, $y > 0$; $x < 0$, $y < 0$).

Ниже эта формула будет выведена при помощи общего метода, не требующего кропотливого исследования всех возможных частных случаев; однако читателю рекомендуется произвести здесь это исследование для того, чтобы он вполне уяснил себе преимущество общего метода, изложенного в дальнейшем.

§ 29. Прямоугольные координаты на плоскости

Если угол ν между осями декартовых координат прямой $\left(\nu = \frac{\pi}{2}\right)$, то система координат называется *прямоугольной*, или *ортогональной*.

В этом случае координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \mathbf{P}$ суть, попросту, алгебраические значения прямоугольных проекций его на оси координат:

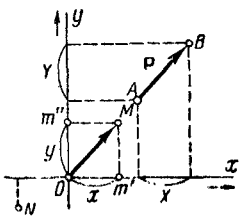
$$X = \text{пр}_x\mathbf{P},\ Y = \text{пр}_y\mathbf{P};$$

иначе эти формулы можно написать так:

$$X = \mathbf{u}\cdot\mathbf{P}, \quad Y = \mathbf{v}\cdot\mathbf{P}, \tag{1}$$

где, как всегда, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ обозначают орты осей координат (черт. 37).

Точно так же координаты любой точки M суть алгебраические значения прямоугольных проекций радиуса-вектора этой точки на оси координат (черт. 37).



Черт. 37

Можно также сказать, что координаты точки M суть расстояния этой точки до осей, снабженные определенными знаками. Именно, x есть расстояние точки M до оси Oy, взятое со знаком плюс, если точка M расположена с той стороны от оси Oy, куда обращено положительное направление оси Ox, и со знаком минус — в противном случае; аналогично для y.

Для того чтобы построить, например, точку N (—3, —2), надо по оси Ox, в отрицательном направлении, отложить от точки O отрезок длины 3 и из конца полученного отрезка восставить перпендикуляр длины 2 в направлении, противоположном направлению оси Oy; конец этого перпендикуляра и есть точка N (черт. 37).

В отличие от прямоугольной системы непрямоугольные системы называются *косоугольными*.

Упражнение

1. Построить вектор $\mathbf{P}$ (5, 4), найти его длину и тангенс угла φ, который он составляет с осью Ox.

Ответ. $|\mathbf{P}| = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{5}$.

2. Построить точки A (1, 1) и B (3, 2), затем построить вектор $\overrightarrow{AB}$, вычислить его координаты и найти угол φ вектора $\overrightarrow{AB}$ с осью Ox.

Ответ. $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $|AB| = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$.

§ 30. Координаты вектора и точки в пространстве

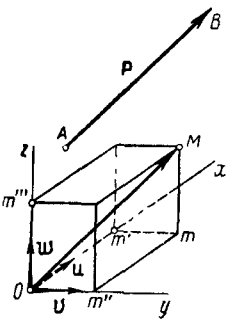
Обобщение на случай пространства напрашивается само собою. Возьмем три оси Ox, Oy, Oz, пересекающиеся в одной точке O и не лежащие в одной и той же плоскости (черт. 38). Эти оси назовем *осями декартовой системы координат*, а плоскости Oyz, Ozx, Oxy — *плоскостями координат*. Точку O назовем *началом координат*.

Пусть $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор, произвольно расположенный в пространстве. Докажем, что этот вектор можно представить как сумму трех векторов, из которых каждый параллелен одной из осей координат.

Действительно, перенесем вектор **P** в положение $\overrightarrow{OM}$ и проведем из M три плоскости, параллельные соответственно трем плоскостям координат. Пусть m', m'' и m''' обозначают точки пересечения проведенных плоскостей соответственно с осями Ox, Oy, Oz. Ясно, что три проведенные плоскости вместе с тремя координатными плоскостями образуют параллелепипед и что

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''} + \overrightarrow{Om'''}. \qquad (1)$$

Это и доказывает наше утверждение.



Черт. 38

Так же, как и в § 28, последнее представление можно выразить при помощи ортов. Пусть, в самом деле, **u**, **v** и **w** обозначают соответственно орты осей Ox, Oy и Oz. Тогда, очевидно,

$$\overrightarrow{Om'} = \mathbf{u}X, \quad \overrightarrow{Om''} = \mathbf{v}Y, \quad \overrightarrow{Om'''} = \mathbf{w}Z, \qquad (2)$$

где X, Y и Z обозначают соответственно алгебраические значения векторов $\overrightarrow{Om'}$, $\overrightarrow{Om''}$, $\overrightarrow{Om'''}$, взятые соответственно по осям Ox, Oy и Oz. Таким образом, получаем основную формулу

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z. \qquad (3)$$

На основании определения величин X, Y и Z ясно, что

$X = \text{пр}_x\mathbf{P}$ (параллельно плоскости Oyz),
$Y = \text{пр}_y\mathbf{P}$ (» » Ozx),
$Z = \text{пр}_z\mathbf{P}$ (» » Oxy).

Легко видеть, что представление (3) возможно одним единственным способом, т. е. что если каким-либо другим образом мы найдем для того же вектора **P**, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X' + \mathbf{v}Y' + \mathbf{w}Z',$$

то необходимо $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z$. Действительно, сравнивая предыдущую формулу с (3), получим, как в § 28,

$$\mathbf{u}l + \mathbf{v}m + \mathbf{w}n = 0,$$

где положено $l = X' - X$, $m = Y' - Y$, $n = Z' - Z$. Но предыдущее равенство возможно только при $l = m = n = 0$. Действительно, если бы одно из чисел l, m, n, например n, не было равно нулю, вышло бы, что вектор $\mathbf{w}n$, отличный от нуля и параллельный оси Oz, равен вектору $-\mathbf{u}l - \mathbf{v}m$, который параллелен плоскости Oxy (так как последний вектор есть сумма векторов $-\mathbf{u}l$ и $-\mathbf{v}m$,

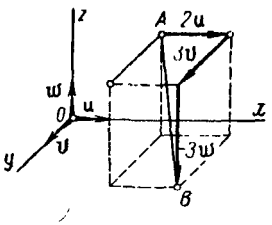
параллельных плоскости Oxy). Но это невозможно, ибо ось Oz, по условию, не параллельна плоскости Oxy.

Таким образом, если дан вектор **P**, то величины X, Y и Z вполне определены, и обратно, если даны величины X, Y и Z, вектор **P** вполне определяется формулой (3).

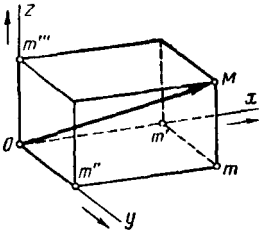
Например, если $X = 2$, $Y = 3$, $Z = -3$, то вектор

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$$

построится следующим образом. Из произвольной точки A проведем вектор $2\mathbf{u}$, т. е. вектор длины 2, одинаково направленный с осью Ox. Из конца этого вектора проведем вектор $3\mathbf{v}$, т. е. вектор длины 3,



Черт. 39



Черт. 40

одинаково направленный с осью Oy. И, наконец, из конца последнего вектора проведем вектор $-3\mathbf{w}$, т. е. вектор длины 3, направленный противоположно оси Oz. Вектор $\overrightarrow{AB}$ (замыкающий вектор) с началом в A и концом в конце B последнего из проведенных векторов есть искомый вектор **P** (черт. 39). Можно было бы, конечно, произвести построение и при помощи параллелепипеда (как показано на черт. 39 пунктиром), но указанное выше построение нагляднее.

X, Y и Z называются *декартовыми координатами* вектора **P**. Для обозначения того, что X, Y, Z являются координатами вектора **P**, пишут:

$$\mathbf{P}(X, Y, Z), \text{ или еще } \mathbf{P}\ (X, Y, Z);$$

это — просто краткая запись формулы (3).

Из самого определения координат вытекает, что координаты равных векторов равны между собою и, обратно, векторы с одинаковыми координатами равны.

Очевидно, далее, что если вектор равен нулю, то все три его координаты равны нулю, и обратно.

Совершенно аналогично случаю двух измерений (§ 28) положение какой-либо точки M в пространстве можно определить координатами связанного вектора $\overrightarrow{OM}$, называемого *радиусом-вектором* точки M относительно точки O (черт. 40).

Обозначим через x, y и z эти координаты, т. е. положим

$$x = \text{пр}_x\overrightarrow{OM} \text{ (параллельно плоскости } Oyz),$$

$$y = \text{пр}_y\overrightarrow{OM} \text{ (» » } Ozx),$$

$$z = \text{пр}_z\overrightarrow{OM} \text{ (» » } Oxy).$$

Числа x, y и z называются *декартовыми координатами* точки M. Если эти числа даны, то для построения точки M достаточно отложить по осям координат (соблюдая знаки) отрезки $Om' = x$, $Om'' = y$, $Om''' = z$ и через точки m', m'', m''' провести плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz, Ozx, Oxy; точка пересечения этих плоскостей даст точку M.

Для большей наглядности представим себе, что плоскость Oxy горизонтальна, ось Oz направлена снизу вверх, Ox — слева направо, а ось Oy — в нашу сторону.

Плоскости координат разбивают все пространство на восемь частей. Именно, при указанном расположении чертежа плоскость Oxy разбивает пространство на две части: верхнюю и нижнюю; каждая из этих частей разбивается плоскостью Oyz, в свою очередь, на две части: правую и левую; наконец, каждая из полученных четырех частей разбивается плоскостью Ozx на две части: по сю сторону и по ту сторону. В результате получается восемь частей.

Каждая из упомянутых восьми частей характеризуется знаками координат x, y и z. Именно, если $z >$ или < 0, то точка находится выше или ниже плоскости Oxy; если $y >$ или < 0, то точка находится по сю или по ту сторону плоскости Ozx, если $x >$ или < 0, то точка находится справа или слева от плоскости Oyz.

Та часть пространства, где все три координаты положительны, называется иногда *нормальным координатным углом*; эта часть состоит (при принятом выше расположении чертежа) из точек, которые расположены выше плоскости Oxy, справа от плоскости Oyz и по сю сторону от плоскости Ozx.

§ 31. Прямоугольные координаты в пространстве

Наиболее важен случай, когда оси координат попарно взаимно перпендикулярны. Тогда и плоскости координат попарно взаимно перпендикулярны, и система декартовых координат называется *прямоугольной*, или *ортогональной* (непрямоугольные системы называются *косоугольными*). В случае прямоугольной системы координаты вектора суть, попросту, алгебраические значения его прямоугольных проекций на оси координат:

$$X = \text{пр}_x\mathbf{P}, \quad Y = \text{пр}_y\mathbf{P}, \quad Z = \text{пр}_z\mathbf{P}.$$

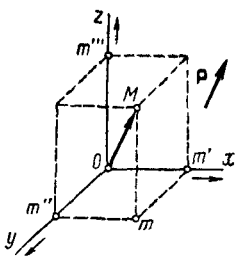
Если, как и ранее, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ обозначают орты осей координат, то

предыдущие формулы могут быть написаны так (§ 23):

$$X = \mathbf{u}\cdot\mathbf{P},\ Y = \mathbf{v}\cdot\mathbf{P},\ Z = \mathbf{w}\cdot\mathbf{P}. \qquad (1)$$

Точно так же координаты x, y, z точки M суть алгебраические значения прямоугольных проекций радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ этой точки на оси координат (черт. 41).

Ясно, что координаты x, y и z численно равны расстояниям точки M соответственно до координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy, знаки же берутся по следующему правилу: если M находится по ту сторону от координатной плоскости, куда направлена перпендикулярная к этой плоскости ось, то расстояние надо взять со знаком плюс; в противном случае — со знаком минус.



Черт. 41

§ 32. Разложение вектора по данным направлениям

Мы считаем полезным повторить, с целью подчеркнуть их, некоторые результаты, полученные нами ранее. Для сокращения речи условимся в одном термине: если несколько свободных векторов параллельны одной и той же плоскости, то мы будем говорить, что они *компланарны* [1]). В частности, *два* вектора всегда компланарны; чтобы в этом убедиться, достаточно отложить их от одной и той же точки. Ясно, далее, что направление плоскости [2]), которой параллельны два данных вектора, вполне определено, если эти два вектора не параллельны между собою. Любую плоскость, которой параллельны данные компланарные векторы, мы будем называть просто плоскостью данных векторов.

Рассматривая в § 28 произвольный вектор **P**, расположенный в данной плоскости, мы показали, что его всегда можно представить как сумму двух векторов, параллельных двум заданным ортам **u** и **v**, расположенным в той же плоскости. Говоря о векторах, расположенных в одной и той же плоскости, мы поступили так исключительно ради наглядности; на самом же деле здесь имелись в виду, попросту, компланарные векторы (в указанном смысле этого термина).

---

[1]) Слово «компланарные» означает в сущности: «имеющие общую плоскость», т. е. «расположенные в одной плоскости». Но так как речь здесь идет о свободных векторах, которые можно переносить (не изменяя длины и направления) произвольным образом, мы должны называть компланарными векторы, параллельные одной и той же плоскости, ибо в этом случае их можно перенести так, чтобы они оказались расположенными в одной плоскости.

[2]) Говорят, что две плоскости имеют одинаковые направления, если они параллельны.

Поэтому сказанное в начале § 28 лучше формулировать следующим образом: пусть **u** и **v** — любые непараллельные орты и пусть **P** — любой вектор, компланарный с ними. Тогда вектор **P** можно представить в виде суммы

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \tag{1}$$

двух векторов, параллельных направлениям **u** и **v**. Чтобы в этом убедиться, достаточно отложить векторы **u**, **v**, **P** от какого-либо общего начала и произвести построение, указанное в § 28.

Формула (1) дает *разложение вектора* **P** *по двум данным* (не параллельным между собою) *направлениям* в предположении, что вектор **P** и эти два направления компланарны. Из (1) получаем (см. § 28) формулу

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y, \tag{2}$$

дающую *разложение вектора* **P** *по двум данным ортам*, компланарным с **P**.

Точно так же, из сказанного в § 30 вытекает, что если даны три некомпланарных орта или, что сводится к тому же, три некомпланарных направления, то всякий вектор **P** может быть *разложен по этим трем направлениям*, т. е. представлен в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3, \tag{3}$$

где векторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ соответственно параллельны данным направлениям. Чтобы получить это разложение, достаточно отложить от любой точки O пространства орты **u**, **v**, **w** и произвести построение, указанное в § 30.

Из (3) вытекает (§ 30) *разложение вектора* **P** *по трем некомпланарным ортам*:

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z.$$

На основании сказанного очевидно, что при определении координат свободного вектора нет надобности вводить в рассмотрение начало координат: достаточно, в общем случае, задать три (некомпланарных) координатных орта. В случае векторов, параллельных данной плоскости, достаточно задать два (непараллельных) координатных орта, а в случае векторов, параллельных данному направлению,— один координатный орт. Наоборот, положение начала координат имеет, очевидно, существенное значение, когда речь идет о координатах *точки*.

Добавим в заключение, что если даны плоскость П и не параллельная ей прямая Δ, то всякий вектор может быть (единственным образом) разложен так:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Delta + \mathbf{P}_\Pi,$$

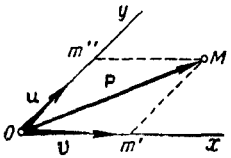
где $\mathbf{P}_\Delta$ и $\mathbf{P}_\Pi$ — векторы, соответственно параллельные Δ и П. Действительно, как легко видеть,

$$\mathbf{P}_\Delta = \text{Пр}_\Delta\mathbf{P} \text{ (взятой } \parallel \Pi), \quad \mathbf{P}_\Pi = \text{Пр}_\Pi\mathbf{P} \text{ (взятой } \parallel \Delta).$$

§ 33. Обобщенные декартовы координаты

Понятие декартовых координат можно несколько обобщить, воспользовавшись для разложения вектора не ортами, а векторами произвольной длины.

Начнем с векторов, параллельных данному направлению. Пусть **u** — *произвольный, отличный от нуля вектор*, имеющий данное направление. Всякий другой вектор **P**, параллельный ему, может быть представлен единственным образом в виде



Черт. 42

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot X, \tag{1}$$

где

$$X = \frac{P}{|\mathbf{u}|} \tag{2}$$

(P — алгебраическое значение вектора **P** по направлению **u**).

Предыдущие формулы непосредственно вытекают из определения произведения вектора и числа [1]). Число X называют *отношением параллельных* [2]) *векторов* **P** *и* **u**.

Число X может быть и здесь названо *координатой* вектора **P** *по отношению к координатному вектору* **u**.

Для определения положения точки M на данной оси Ox можно воспользоваться, как раньше, вектором $\overrightarrow{OM}$, отложенным от определенной точки O (начала координат) этой оси. Мы будем иметь, согласно (1),

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x, \tag{3}$$

где **u** обозначает некоторый (раз навсегда выбранный) вектор, параллельный данной оси (координатный вектор), а x — определенное число:

$$x = \frac{OM}{|\mathbf{u}|}. \tag{4}$$

Число x и здесь называется координатой точки M.

Совершенно аналогично для задания вектора **P**, параллельного данной плоскости, можно воспользоваться двумя произвольно выбранными (но непараллельными) векторами **u** и **v**, параллельными нашей плоскости (см. черт. 42, на котором векторы **u**, **v** и **P** =

---

[1]) Из этого определения вытекает, что направление вектора $\mathbf{u}X$ совпадает с направлением **P** и что длина его $|\mathbf{u}X| = |\mathbf{u}| \cdot |X| = |\mathbf{u}| \cdot \frac{|\mathbf{P}|}{|\mathbf{u}|} = |\mathbf{P}|$.

[2]) Понятие отношения двух векторов определяется только в случае параллельных векторов.

$= \overrightarrow{OM}$ изображены приложенными к одной точке O, что мы всегда имеем право сделать). Как и в § 28, мы получим:

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''},$$

и на основании сказанного выше

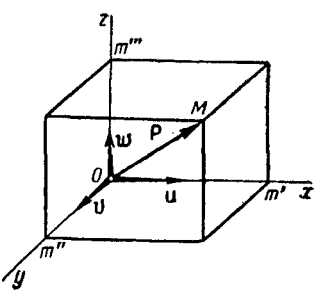
$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y, \tag{5}$$

где $X = \frac{Om'}{|\mathbf{u}|}$, $Y = \frac{Om''}{|\mathbf{v}|}$. Числа X и Y суть *координаты вектора* $\mathbf{P}$, отнесенного к координатным векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Для определения положения *точки* на данной плоскости необходимо задать, кроме двух координатных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, еще определенное начало координат O. Тогда положение точки M на плоскости будет определяться ее радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$. Полагая

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x + \mathbf{v}y,$$

мы получаем возможность определять положение точки при помощи двух чисел (координат) x, y.



Черт. 43

Наконец, для задания вектора $\mathbf{P}$, произвольно направленного в пространстве, мы можем воспользоваться тремя (некомпланарными) координатными векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Изображая для наглядности эти векторы приложенными к одной точке O (черт. 43), получим, как в § 30,

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''} + \overrightarrow{Om'''},$$

откуда

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z, \tag{6}$$

где

$$X = \frac{Om'}{|\mathbf{u}|}, \quad Y = \frac{Om''}{|\mathbf{v}|}, \quad Z = \frac{Om'''}{|\mathbf{w}|}.$$

Числа X, Y, Z суть *координаты вектора* $\mathbf{P}$, отнесенного к координатным векторам $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Для определения положения *точки* M следует задать еще определенное начало координат O, после чего положение точки будет определяться формулой

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x + \mathbf{v}y + \mathbf{w}z;$$

x, y, z — координаты точки M.

Координаты, определенные здесь, мы будем называть *обобщенными декартовыми координатами*, или декартовыми координатами *общего вида* [1]). Координаты, рассмотренные в предыдущих параграфах, представляют собою частный случай, когда $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 1$. Эти координаты мы будем теперь называть *необобщенными декартовыми координатами*.

Из предыдущего следует, что обобщенные координаты X, Y, Z равны необобщенным, разделенным на длины соответствующих координатных векторов.

В дальнейшем, если противное не оговорено особо, *под декартовыми координатами мы будем понимать обобщенные декартовы координаты*. Под *прямоугольными* (или *ортогональными*) координатами мы будем понимать (если противное не оговорено особо) *необобщенные прямоугольные декартовы координаты* [2]).

И в случае декартовых координат общего вида мы будем для точек и векторов применять обозначения $M(x, y, z)$, $\mathbf{P}(X, Y, Z)$.

II. ОСНОВНЫЕ АФФИННЫЕ ФОРМУЛЫ

В этом отделе мы выведем несколько основных формул, связанных с представлением векторов и точек при помощи декартовых координат. Все формулы, рассматриваемые в этом отделе, таковы, что они имеют совершенно одинаковый вид как в случае обобщенных декартовых, так и в случае (необобщенных) прямоугольных координат. Как мы увидим ниже, эти формулы выражают так называемые *аффинные свойства фигур* [3]).

Каждую формулу мы будем выводить сперва для общего случая пространства трех измерений, а потом указывать те упрощения, которые произойдут в полученных формулах, если рассматривать фигуры, расположенные в одной и той же плоскости.

Формулы, относящиеся к последнему случаю, т. е. случаю двух измерений, можно выводить или непосредственно, или же получать из общих, полагая в них равными нулю координаты Z или z векторов или точек.

В нижеследующем под словами: *найти вектор* (*или точку*), *дан вектор* (*или точка*), следует понимать: *найти координаты вектора* (*или точки*), *даны координаты вектора* (*или точки*).

---

[1]) Их называют также *аффинными*. Целесообразность этого термина станет понятной, когда мы будем говорить об аффинных свойствах фигур (см. § 76, замечание).

[2]) В современной литературе декартовыми координатами часто называют только эти последние (т. е. прямоугольные необобщенные декартовы координаты).

[3]) Об этом будет подробнее сказано в гл. III, § 78.