

$[e_1, e_2, e_3]$. Из формулы предыдущего упражнения вытекает, что квадрат этого синуса равен

$$[e_1, e_2, e_3]^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos v & \cos \mu \\ \cos v & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 53. Объем тетраэдра, заданного координатами вершин¹⁾

Если $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$ — координаты вершин тетраэдра (см. черт. 58), то, очевидно, объем его V получится из формулы (3) предыдущего параграфа, если положить

$$\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{P}_2 = \overrightarrow{AC}, \quad \mathbf{P}_3 = \overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, будем иметь

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

или

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где в правых частях подразумеваются абсолютные значения.

IV. ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ОБОБЩЕННЫХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

В этом отделе мы обобщим некоторые из формул предыдущего отдела на случай декартовых координат общего вида. Понятие «ковариантных координат» (заимствованное из современного тензорного исчисления), которое будет введено в следующем параграфе, позволит представить результаты в виде значительно более простом, чем это обычно делалось в курсах аналитической геометрии.

§ 54. Ковариантные и контравариантные декартовы координаты

В основу определения координат X, Y, Z вектора \mathbf{P} (§ 33) нами было положено разложение

$$\mathbf{P} = uX + vY + wZ,$$

где u, v, w — координатные векторы.

В случае прямоугольных координат, когда в качестве координатных векторов берутся взаимно перпендикулярные орты, определенные таким образом координаты суть, попросту, алгебраические значения прямоугольных

1) При первом чтении этот параграф можно опустить.

проекций вектора P на оси координат и могут быть представлены в виде скалярных произведений (§ 31)

$$X = u \cdot P, Y = v \cdot P, Z = w \cdot P. \quad (1)$$

Если эти последние формулы положить в основу обобщения на случай произвольных (разумеется, некомпланарных) координатных векторов u, v, w , то, естественно, придем к рассмотрению величин

$$X^* = u \cdot P, Y^* = v \cdot P, Z^* = w \cdot P. \quad (2)$$

В случае прямоугольной системы величины X^*, Y^*, Z^* сводятся к обычным координатам X, Y, Z , но в общем случае этого совпадения нет, ибо на основании самого определения

$$X^* = |u| \cdot \text{пр}_x P, Y^* = |v| \cdot \text{пр}_y P, Z^* = |w| \cdot \text{пр}_z P, \quad (3)$$

где подразумеваются прямоугольные проекции, тогда как величины X, Y, Z даются формулами (см. § 33)

$$X = \text{пр}_x \frac{P}{|u|}, Y = \text{пр}_y \frac{P}{|v|}, Z = \text{пр}_z \frac{P}{|w|},$$

где подразумеваются проекции, взятые параллельно соответствующим плоскостям координат¹⁾.

Тем не менее, величины X^*, Y^*, Z^* также можно назвать координатами вектора P , ибо их

задание вполне определяет вектор P (и обратно), в чем читатель может легко убедиться сам, на основании простых геометрических соображений²⁾.

Для различия двух родов координат X, Y, Z и X^*, Y^*, Z^* —первые мы будем называть *обычными* или *контравариантными* координатами, а вторые—*ковариантными*³⁾. Во всем дальнейшем, говоря просто о координатах, мы всегда будем подразумевать контравариантные, т. е. обычные координаты.

Совершенно аналогично определяются ковариантные координаты в случае *двух измерений*. На черт. 59 изображен этот случай. Если считать, что координаты приведенные (т. е. что $|u| = |v| = 1$), тогда на чертеже

$$X = Om', Y = Om'', X^* = On', Y^* = On''.$$

В общем же случае

$$X = \frac{Om'}{|u|}, Y = \frac{Om''}{|v|}, X^* = On' \cdot |u|, Y^* = |On''| \cdot |v|.$$

И в случае одного измерения, конечно, можно рассматривать ковариантную координату

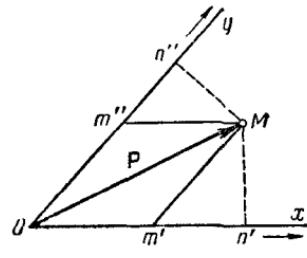
$$X^* = |u| \cdot P,$$

где $|u|$ —длина координатного вектора, а P —алгебраическое значение вектора P по оси координат.

1) В § 33 эти проекции обозначены через Om', Om'', Om''' .

2) Если заданы X^*, Y^*, Z^* , то этим самым заданы прямоугольные проекции вектора P на оси координат.

3) Происхождение терминов «ковариантные» и «контравариантные координаты» будет объяснено в § 68 (стр. 129).



Черт. 59

Ковариантные координаты *точки*, которые мы будем обозначать через x^*, y^*, z^* , определяются как соответствующие ковариантные координаты радиуса-вектора этой точки относительно начала координат.

§ 55. Зависимость между ковариантными и контравариантными координатами

Обозначим соответственно через λ, μ, ν углы между осями Oy и Oz , Oz и Ox , Ox и Oy (черт. 60).

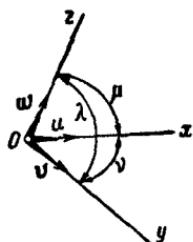
Для упрощения письма введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u^2 &= g_{11}, & v^2 &= g_{22}, & w^2 &= g_{33}, \\ v \cdot w &= g_{23}, & w \cdot u &= g_{31}, & u \cdot v &= g_{12}, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

так что

$$\begin{aligned} g_{11} &= |u|^2, & g_{22} &= |v|^2, & g_{33} &= |w|^2, \\ g_{23} &= |v| \cdot |w| \cos \lambda, & g_{31} &= |w| \cdot |u| \cos \mu, & g_{12} &= |u| \cdot |v| \cos \nu \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2)$$

Величины g_{11}, g_{22}, \dots и т. д. суть скаляры, вполне определенные, когда заданы длины координатных векторов и углы между ними. В случае прямоугольных координат



Черт. 60

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0,$$

и формулы (1) сводятся к «таблице скалярного умножения» ортов осей координат (§ 42). В общем случае формулы (1) дают таблицу скалярного умножения координатных векторов, если под g_{11}, g_{22} и т. д. подразумевать величины (2).

В случае двух измерений у нас будут только три величины:

$$g_{11} = |u|^2, \quad g_{22} = |v|^2, \quad g_{12} = |u| \cdot |v| \cdot \cos \nu. \quad (2a)$$

Возвращаясь к общему случаю, выведем зависимость между контравариантными и ковариантными координатами данного вектора P . По определению

$$P = uX + vY + wZ,$$

где X, Y, Z — контравариантные координаты. Отсюда для ковариантной координаты X^* получим

$$X^* = u \cdot P = u \cdot uX + u \cdot vY + u \cdot wZ$$

или, на основании (1):

$$\begin{aligned} X^* &= g_{11}X + g_{12}Y + g_{13}Z, \\ Y^* &= g_{21}X + g_{22}Y + g_{23}Z, \\ Z^* &= g_{31}X + g_{32}Y + g_{33}Z; \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3)$$

две последние формулы написаны по аналогии с первой; руководствуясь соображениями симметрии, мы иногда пишем g_{21} вместо g_{12} и т. д. (вообще мы условимся считать, что g_{ik} и g_{hi} обозначают, в нашем случае, одни и те же величины). Формулы (3) дают выражения ковариантных координат через контравариантные. Для получения выражений контравариантных координат через ковариантные достаточно решить систему уравнений (3) относительно

X, Y, Z . Такое решение всегда возможно, так как определитель

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix} \quad (4)$$

отличен от нуля. Действительно, на основании формулы (4) § 52 (упражнение 3) $G = [u, v, w]^2 = V^2$, где V — объем параллелепипеда, построенного на координатных векторах (§ 26); этот объем отличен от нуля, так как, по условию, координатные векторы не компланарны.

Решая систему (3) по правилам теории определителей (см. Добавление, § 3), получим

$$\left. \begin{array}{l} X = g_{11}^* X^* + g_{12}^* Y^* + g_{13}^* Z^*, \\ Y = g_{21}^* X^* + g_{22}^* Y^* + g_{23}^* Z^*, \\ Z = g_{31}^* X^* + g_{32}^* Y^* + g_{33}^* Z^*, \end{array} \right\} \quad (5)$$

где

$$g_{ik}^* = \frac{G_{ik}}{G} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (6)$$

причем G_{ik} обозначает алгебраическое дополнение¹⁾ элемента g_{ik} определителя G . Совершенно такие же формулы имеют, конечно, место и для координат точки.

В случае двух измерений получим аналогично:

$$X^* = g_{11} X + g_{12} Y, \quad Y^* = g_{21} X + g_{22} Y; \quad (3a)$$

$$X = g_{11}^* X^* + g_{12}^* Y^*, \quad Y = g_{21}^* X^* + g_{22}^* Y^*. \quad (5a)$$

В этом случае определитель

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |u|^2 & |u| \cdot |v| \cdot \cos v \\ |u| \cdot |v| \cdot \cos v & |v|^2 \end{vmatrix} = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \sin^2 v \quad (4a)$$

и, как легко подсчитать,

$$g_{11}^* = \frac{1}{|u|^2 \sin^2 v}, \quad g_{22}^* = \frac{1}{|v|^2 \sin^2 v}, \quad g_{12}^* = g_{21}^* = -\frac{\cos v}{|u| \cdot |v| \sin^2 v}. \quad (6a)$$

Упражнения и дополнения

1. Написать формулу (3) для случая необобщенных декартовых координат.
Ответ.

$$X^* = X + Y \cos v + Z \cos \mu,$$

$$Y^* = X \cos v + Y + Z \cos \lambda,$$

$$Z^* = X \cos \mu + Y \cos \lambda + Z.$$

2. Найти выражения для коэффициентов g_{ik}^* формулы (5) в случае необобщенных координат.

¹⁾ Определитель G симметричен ($g_{ik} = g_{ki}$); поэтому $G_{ik} = G_{ki}$.

Ответ.

$$g_{11} = \frac{\sin^2 \lambda}{G}, \quad g_{22} = \frac{\sin^2 \mu}{G}, \quad g_{33} = \frac{\sin^2 \nu}{G},$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda}{G}, \quad g_{31} = g_{13} = \frac{\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu}{G},$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu}{G},$$

где

$$G = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 56. Выражения для скалярного произведения двух векторов, длины вектора, расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями

Пусть $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ — два вектора, заданных своими контравариантными координатами

$$(X_1, Y_1, Z_1) \text{ и } (X_2, Y_2, Z_2).$$

Вычислим их скалярное произведение. Имеем

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = (uX_1 + vY_1 + wZ_1) \cdot P_2,$$

откуда, вспоминая, что $u \cdot P_2 = X_2^*$ и т. д., получим

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1 X_2^* + Y_1 Y_2^* + Z_1 Z_2^*. \quad (1)$$

Таким же образом можно получить,

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1^* X_2 + Y_1^* Y_2 + Z_1^* Z_2. \quad (1a)$$

В случае прямоугольных координат $X_1^* = X_1$ и т. д., и обе предыдущие формулы обращаются в ранее выведенную.

В случае двух измерений имеем

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1 X_2^* + Y_1 Y_2^* = X_1^* X_2 + Y_1^* Y_2. \quad (2)$$

Для длины вектора $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ получаем, полагая в (1) или в (1a) $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$, формулу

$$|\mathbf{P}|^2 = XX^* + YY^* + ZZ^*. \quad (3)$$

Внося сюда выражения для X^*, Y^*, Z^* из формул (3) предыдущего параграфа, получим выражение для $|\mathbf{P}|^2$ через обычные (контравариантные) координаты:

$$|\mathbf{P}|^2 = g_{11} X^2 + g_{22} Y^2 + g_{33} Z^2 + 2g_{23} YZ + 2g_{31} ZX + 2g_{12} XY. \quad (4)$$

Мы видим, что $|\mathbf{P}|^2$ есть квадратичная форма¹⁾ трех переменных X, Y, Z , и так как, далее, $|\mathbf{P}|^2$ — величина всегда положительная, за исключением случая, когда $X=Y=Z=0$, то эта квадратичная форма — положительная²⁾, притом неособенная (т. е. дискриминант³⁾ ее отличен

¹⁾ Определение этого термина см. в Добавлении, § 10.

²⁾ См. Добавление, § 12.

³⁾ См. Добавление, § 10.

от нуля). Последнее следует также из того, что упомянутый дискриминант есть не что иное, как определитель формулы (4) предыдущего параграфа.

Можно показать, что, обратно, если произвольно задана неособенная положительная квадратичная форма переменных X, Y, Z , то всегда существует система декартовых координат, в которой квадрат длины вектора выражается этой формулой; см. ниже, § 67, 2°.

Квадрат длины вектора можно так же просто выразить через ковариантные координаты. А именно, поступая совершенно так же, как при выводе формулы (4), получим

$$|\mathbf{P}|^2 = g_{11}^* X^{*2} + g_{22}^* Y^{*2} + g_{33}^* Z^{*2} + 2g_{23}^* Y^* Z^* + 2g_{31}^* Z^* X^* + 2g_{12}^* X^* Y^*. \quad (5)$$

Иногда удобно иметь выражения для $|\mathbf{P}|^2$ через X^*, Y^*, Z^* , где фигурируют величины g_{ik} , а не g_{ik}^* ; для получения этого выражения достаточно в предыдущую формулу внести вместо g_{ik}^* их выражения через g_{ik} . Однако для этого проще поступить так: по формулам (3) предыдущего параграфа и по формуле (3) этого параграфа

$$\begin{aligned} g_{11}X + g_{12}Y + g_{13}Z &= X^*, \\ g_{21}X + g_{22}Y + g_{23}Z &= Y^*, \\ g_{31}X + g_{32}Y + g_{33}Z &= Z^*, \\ X^*X + Y^*Y + Z^*Z &= |\mathbf{P}|^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что три величины X, Y, Z удовлетворяют четырем линейным уравнениям. А это, как известно, возможно только тогда, когда определитель, составленный из всех коэффициентов этих уравнений, равен нулю, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & X^* \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & Y^* \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & Z^* \\ X^* & Y^* & Z^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Разлагая определитель по элементам последней строки, получим один член вида $G_1 |\mathbf{P}|^4$ и члены, содержащие квадраты и произведения величин X^*, Y^*, Z^* ; перенеся эти последние в правую часть и разделив обе части на G (мы знаем, что $G \neq 0$), получим искомое выражение для $|\mathbf{P}|^2$ в виде квадратичной формы переменных X^*, Y^*, Z^* .

В случае двух измерений вместо (4) и (6) получим соответственно:

$$|\mathbf{P}|^2 = g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2 = |\mathbf{u}|^2 X^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \nu XY + |\mathbf{v}|^2 Y^2$$

и

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & X^* \\ g_{21} & g_{22} & Y^* \\ X^* & Y^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (6a)$$

откуда

$$|\mathbf{P}|^2 \sin^2 \nu = \frac{X^{*2}}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{2X^*Y^*}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \cos \nu + \frac{Y^{*2}}{|\mathbf{v}|^2}. \quad (6b)$$

Из полученных различных формул, выражающих длину вектора, непосредственно получаются выражения для расстояния между двумя точками

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$; для этого в правые части надо подставить

$$X = x_2 - x_1, \quad X^* = x_2^* - x_1^* \text{ и т. д.}$$

Для угла ϑ между двумя векторами P_1 и P_2 имеем формулу

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2|} = \frac{X_1 X_2^* + Y_1 Y_2^* + Z_1 Z_2^*}{|\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2|}, \quad (7)$$

где

$$|\mathbf{P}_1| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}, \quad |\mathbf{P}_2| = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}.$$

Аналогичная формула имеет место и для случая двух измерений.

Упражнения и дополнения

1. Написать формулы, выражающие скалярное произведение двух векторов и длину вектора через контравариантные координаты на плоскости, в случае необобщенных координат.

Ответ. $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) \cos v, \quad |\mathbf{P}|^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos v.$

2. То же для пространства.

Ответ. $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 + (Y_1 Z_2 + Y_2 Z_1) \cos \lambda + (Z_1 X_2 + Z_2 X_1) \cos \mu + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) \cos v,$
 $|\mathbf{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ \cos \lambda + 2ZX \cos \mu + 2XY \cos v.$

3. Написать формулы, выражающие $|\mathbf{P}|^2$ через ковариантные координаты на плоскости, в случае необобщенных координат.

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos v & X^* \\ \cos v & 1 & Y^* \\ X^* & Y^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$|\mathbf{P}|^2 \sin^2 v = X^*{}^2 + Y^*{}^2 - 2X^*Y^* \cos v.$$

4. То же для пространства.

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos v & \cos \mu & X^* \\ \cos v & 1 & \cos \lambda & Y^* \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & Z^* \\ X^* & Y^* & Z^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 57. Координаты и косинусы направления в необобщенных косоугольных координатах

Обобщим формулы и понятия, введенные в § 44, на случай косоугольных необобщенных координат (читатель легко выведет аналогичные формулы и для общего случая).

Пусть e обозначает орт, определяющий некоторое направление. Обозначим контравариантные координаты этого орта по-прежнему через l, m, n , так что

$$e = ul + vm + wn; \quad (1)$$

величины l, m, n мы будем называть *обычными*, или *контравариантными*,

координатами направления¹⁾. Ковариантные же координаты орта e обозначим через l^*, m^*, n^* ; эти величины мы будем называть *ковариантными координатами направления*. Ясно, что

$$l^* = \cos \alpha, \quad m^* = \cos \beta, \quad n^* = \cos \gamma, \quad (2)$$

где α, β, γ обозначают углы, составляемые ортом e с осями координат. Следовательно, косинусы направления суть ковариантные координаты соответствующего орта; они не совпадают (как было уже сказано в § 44), в случае косоугольных координат, с обычными (коитравариантными) координатами направления (l, m, n). А именно, величины l^*, m^*, n^* связаны с величинами l, m, n теми же соотношениями (3) или (5) § 55, что и ковариантные и контравариантные координаты любого вектора.

Из соотношения $e^2 = 1$ следует, на основании формулы (3) предыдущего параграфа, соотношение

$$l^* + m^* + n^* = 1, \quad \text{или} \quad l \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos \gamma = 1, \quad (3)$$

которое заменяет соотношение

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \text{или} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

имеющее место в случае прямоугольных координат.

Если мы выразим соотношение (3) при помощи только обычных координат направления, то получим, на основании формулы упражнения 2 предыдущего параграфа:

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2mn \cos \lambda + 2ml \cos \mu + 2lm \cos \nu = 1; \quad (4)$$

если же выразить это соотношение только через ковариантные координаты (т. е. косинусы направления), получим, на основании формулы упражнения 4 того же параграфа:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & l^* \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & m^* \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & n^* \\ l^* & m^* & n^* & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Ясно, что соотношение (4) является и достаточным для того, чтобы l, m, n были контравариантными координатами некоторого направления, а соотношение (5) — для того, чтобы l^*, m^*, n^* были косинусами некоторого направления (сравн. конец § 44).

В случае двух измерений вместо (4) и (5) будем иметь соответственно

$$l^2 + m^2 + 2lm \cos \nu = 1, \quad (4a)$$

и (сравн. формулу упражнения 3 предыдущего параграфа)

$$l^{*2} + m^{*2} - 2l^*m^* \cos \nu = \sin^2 \nu, \quad (5a)$$

или, что все равно:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \nu = \sin^2 \nu. \quad (5b)$$

В этом случае (двух измерений) можно, как было сказано в § 47, для определения направления на плоскости пользоваться одним углом φ , который данное направление составляет с осью Ox и который отсчитывается

¹⁾ Когда мы в дальнейшем будем говорить просто о координатах направления, то всегда будем подразумевать обычные (коитравариантные) координаты.

от оси Ox по правилу, принятому в упомянутом параграфе (см. черт. 54). Так как $\cos \alpha = \cos \varphi$, $\cos \beta = \cos (\nu - \varphi)$, то ковариантные координаты рассматриваемого направления будут

$$l^* = \cos \varphi, \quad m^* = \cos (\nu - \varphi). \quad (6)$$

Напомним (см. замечание в конце § 47), что для обычных координат направления будем иметь

$$l = \frac{\sin (\nu - \varphi)}{\sin \nu}, \quad m = \frac{\sin \varphi}{\sin \nu}; \quad (7)$$

другой вывод этих же формул см. в упражнении 1.

Упражнения и дополнения

1. Вывести формулы (7) исходя из формул (5а) и (6а) § 55 и из формул (6) настоящего параграфа.

Решение. На основании упомянутых формул имеем

$$l = \frac{1}{\sin^2 \nu} [\cos \varphi - \cos (\nu - \varphi) \cos \nu], \quad m = \frac{1}{\sin^2 \nu} [-\cos \varphi \cos \nu + \cos (\nu - \varphi)],$$

или, после разложения $\cos (\nu - \varphi)$ и некоторых упрощений:

$$l = \frac{\sin (\nu - \varphi)}{\sin \nu}, \quad m = \frac{\sin \varphi}{\sin \nu}.$$

2. Вывести соотношение (6а) непосредственно из формул (6) путем элементарных тригонометрических преобразований.

V. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Кроме декартовых координат, существует еще бесчисленное множество других. Мы подробно рассмотрим только некоторые из них, а именно — системы полярных координат на плоскости и в пространстве и систему полу полярных (или цилиндрических) координат. Относительно остальных систем мы ограничимся краткими замечаниями общего характера. При этом мы будем рассматривать только координаты точки.

§ 58. Система полярных координат на плоскости

В этой системе основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение любой фигуры на плоскости, являются точка O , называемая *полюсом*, и ось Ox , называемая *полярной осью* (черт. 61).

Пусть M — любая точка на плоскости, не совпадающая с O . Обозначим через ρ длину радиуса-вектора \overrightarrow{OM} , а через φ — угол, составляемый им с полярной осью, отсчитываемый от этой оси