от оси Ox по правилу, принятому в упомянутом параграфе (см. черт. 54). Так как $\cos\alpha=\cos\varphi$, $\cos\beta=\cos(\nu-\varphi)$, то ковариантные координаты рассматриваемого направления будут

$$l^*=\cos\varphi,\quad m^*=\cos(\nu-\varphi). \tag{6}$$

Напомним (см. замечание в конце § 47), что для обычных координат направления будем иметь

$$l=\frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu},\quad m=\frac{\sin\varphi}{\sin\nu}; \tag{7}$$

другой вывод этих же формул см. в упражнении 1.

Упражнения и дополнения

1. Вывести формулы (7) исходя из формул (5а) и (6а) § 55 и из формул (6) настоящего параграфа.

Решение. На основании упомянутых формул имеем

$$l=\frac{1}{\sin^2\nu}[\cos\varphi-\cos(\nu-\varphi)\cos\nu],\quad m=\frac{1}{\sin^2\nu}[-\cos\varphi\cos\nu+\cos(\nu-\varphi)],$$

или, после разложения $\cos(\nu-\varphi)$ и некоторых упрощений:

$$l=\frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu},\quad m=\frac{\sin\varphi}{\sin\nu}.$$

2. Вывести соотношение (5а) непосредственно из формул (6) путем элементарных тригонометрических преобразований.

V. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Кроме декартовых координат, существует еще бесчисленное множество других. Мы подробно рассмотрим только некоторые из них, а именно — системы полярных координат на плоскости и в пространстве и систему полуполярных (или цилиндрических) координат. Относительно остальных систем мы ограничимся краткими замечаниями общего характера. При этом мы будем рассматривать только координаты точки.

§ 58. Система полярных координат на плоскости

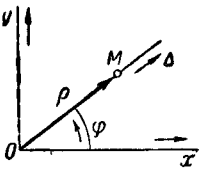
В этой системе основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение любой фигуры на плоскости, являются точка O, называемая *полюсом*, и ось Ox, называемая *полярною осью* (черт. 61).

Пусть M — любая точка на плоскости, не совпадающая с O. Обозначим через ρ длину радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, а через φ — угол, составляемый им с полярною осью, отсчитываемый от этой оси

и снабженный определенным знаком [1]), так что, согласно нашим обозначениям,

$$\rho = |OM|, \quad \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}. \tag{1}$$

Очевидно, величины ρ и φ вполне определяют положение точки M на плоскости; они называются *полярными координатами точки* M. Если точка M совпадает с полюсом O, то $\rho = 0$, а угол φ — неопределенный.



Черт. 61

Точку M, имеющую полярными координатами ρ и φ, мы будем обозначать так: $M(\rho, \varphi)$. Согласно общепринятой терминологии, ρ называется *радиусом-вектором* точки M; правильнее было бы говорить «длина радиуса-вектора», но ради краткости мы будем часто опускать слово «длина» там, где не может возникнуть недоразумения. Угол φ мы будем называть *полярным углом* [2]).

Ясно, что для получения всех точек плоскости достаточно изменять ρ в пределах $(0, \infty)$, а углу φ придавать значения, заключенные между 0 и 2π (не включая верхнего предела); однако часто удобно вовсе не вводить последнего ограничения. Значения угла φ, соответствующие одной и той же точке, очевидно, отличаются друг от друга на кратное 2π.

§ 59. Обобщение

Кроме только что указанной системы, часто удобно пользоваться и несколько более общей, в которой ρ принимает также и отрицательные значения.

Пусть (черт. 61) Δ обозначает ось, проходящую через полюс и точку M. Этой оси можно придать произвольное положительное направление (от O к M или от M к O). Обозначим теперь через φ угол $\widehat{Ox, \Delta}$, составляемый осью Δ с полярною осью Ox, а через ρ — алгебраическое значение $\overrightarrow{OM}$ по оси Δ. Очевидно, что, как и в предыдущем случае, величины ρ и φ вполне определяют положение точки M на плоскости.

(Если за положительное направление оси Δ выбрано такое, которое ведет от O к M, то указанные величины совпадают с величинами ρ и φ предыдущего параграфа.)

---

[1]) Таким образом, предполагается, что на плоскости выбрано определенное положительное направление вращения.

[2]) Кроме этого термина, употребляются еще названия: *аномалия*, *амплитуда*, *азимут* и др.

Так как одному и тому же положению точки M соответствуют два прямо противоположных направления оси Δ, то значения полярного угла

$$\varphi = \widehat{Ox, \Delta},$$

соответствующие одной и той же точке, могут отличаться на кратное π. Ясно, что если ρ и φ обозначают полярные координаты какой-либо точки M, то $-\rho$ и $\varphi + \pi$ будут координатами той же самой точки [1]).

Указанную в этом параграфе систему координат, в отличие от предыдущей, мы будем называть *обобщенной системой полярных координат*.

§ 60. Преобразование полярных координат на плоскости в декартовы

Для перехода от полярных координат к декартовым и обратно достаточно иметь формулы, дающие возможность переходить от данной полярной системы к какой-либо одной системе декартовых координат, ибо в следующей главе будут выведены формулы, позволяющие переходить от данной системы декартовых координат к любой другой. Поэтому мы ограничимся здесь выводом формул перехода от полярных координат к прямоугольным декартовым, началом которых служит полюс O, осью Ox — полярная ось, а осью Oy — ось, перпендикулярная к Ox и так направленная, чтобы направлению Oy соответствовал полярный угол $\varphi = +\frac{\pi}{2}$.

Если через x и y мы обозначим координаты точки M относительно этой системы, то, очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \tag{1}$$

эти формулы, выражающие x и y через ρ и φ, справедливы как для случая § 58, так и для случая § 59 [2]).

Формулы для обратного перехода сразу выводятся из предыдущих. Действительно, имеем, во-первых,

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2,$$

откуда

$$\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

и, во-вторых,

$$\cos \varphi = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3}$$

---

[1]) Действительно, угол $\varphi + \pi$ характеризует направление, прямо противоположное тому, которое соответствует углу φ.

[2]) Формулы (1) выводятся на основании формулы (2) § 19а.

Знак перед радикалами можно выбирать по произволу, однако один и тот же во всех формулах (2) и (3) [1]).

Если мы остановимся на системе § 58, то необходимо оставить только знак плюс, и предыдущие формулы примут вид

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2}, \tag{2*}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3*}$$

Как в одном, так и в другом случае будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Формулы (2) и (3) или (2*) и (3*) дают возможность вычислить полярные координаты, если даны прямоугольные. Вычисления лучше всего произвести так: остановившись на определенном знаке перед радикалом, вычислить ρ и по знакам $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ определить ту четверть, в которой заключен угол φ; вычисление же по таблицам произвести по формуле (4).

Напомним, что формулы (1)—(4) относятся к тому частному случаю, когда декартова система координат — прямоугольная, а ось абсцисс направлена вдоль полярной оси.

Упражнения и дополнения

1. При предыдущих обозначениях найти прямоугольные координаты x и y точки, если дано $\rho=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Ответ. $x=1$, $y=\sqrt{3}$.

2. Даны прямоугольные координаты $x=-5$, $y=+5$. Найти полярные координаты ρ и φ (в необобщенной системе); обозначения прежние.

Ответ. $\rho=+5\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

3. Найти расстояние между двумя точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$, $M_2(\rho_2, \varphi_2)$.

Решение. Имеем, при очевидных обозначениях,

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=$$
$$=(\rho_2\cos\varphi_2-\rho_1\cos\varphi_1)^2+(\rho_2\sin\varphi_2-\rho_1\sin\varphi_1)^2,$$

откуда после очевидных упрощений

$$|M_1M_2|^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1).$$

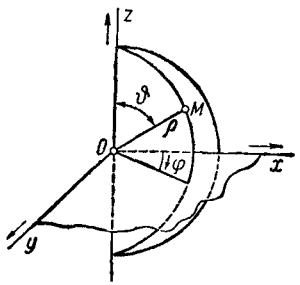
Легко также найти последнюю формулу непосредственным рассмотрением чертежа.

---

[1]) Если взять знак плюс, то для ρ получим положительное значение; если же взять знак минус, то ρ получит отрицательное значение, но зато ось Δ примет направление, прямо противоположное тому, которое получается при знаке плюс перед радикалом.

§ 61. Полярные координаты в пространстве

В этой системе основными постоянными элементами являются точка O (*полюс*), ось Oz (*полярная ось*) и полуплоскость Ozx, примыкающая к полярной оси Oz (*полярная полуплоскость*).

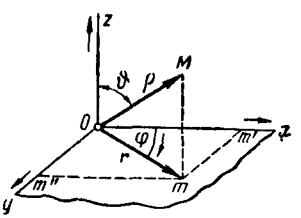


Черт. 62

Пусть M — какая-либо точка пространства (черт. 62) [1]). Обозначим через ρ длину радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, через ϑ — угол, составляемый $\overrightarrow{OM}$ с полярною осью Oz, и наконец, через φ — угол, составляемый полуплоскостью, примыкающей к оси Oz и, проходящей через точку M, с полярною полуплоскостью Oxz. Угол φ отсчитывается от полуплоскости Oxz в каком-либо определенном направлении, например по направлению движения часовой стрелки (для наблюдателя, стоящего вдоль Oz).

Ясно, что достаточно изменять ρ в пределах $(0, \infty)$, ϑ — в пределах $(0, \pi)$ и φ — в пределах $(0, 2\pi)$, чтобы получить все точки пространства.

Величины ρ, ϑ и φ называются *полярными* (или *сферическими*) координатами точки M.



Черт. 63

Найдем теперь формулы перехода от полярных координат к декартовым прямоугольным.

Мы предполагаем (черт. 62 и 63), что ось Oz совпадает с полярною осью, Ox расположена в полярной полуплоскости, а Oy перпендикулярна к обеим предыдущим осям и притом проведена в такую сторону, чтобы угол φ для полуплоскости Oyz был равен $+\frac{\pi}{2}$.

Имеем, очевидно,

$$z = \text{пр}_z\overrightarrow{OM} = \rho\cos\vartheta.$$

Проектируя, далее, вектор $\overrightarrow{OM}$ на плоскость Oxy, мы получим вектор $\overrightarrow{Om}$ (черт. 63) длины

$$r = |Om| = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \rho\sin\vartheta,$$

[1]) Оси Ox и Oy на черт. 62 мы провели для большей наглядности. Плоскость Oxy перпендикулярна к оси Oz, а положительная часть оси Ox расположена на полярной полуплоскости.

который составляет с осью Ox угол φ. Если спроектировать этот вектор на Ox и Oy, то получим

$$x = |Om| \cos\varphi = \rho \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y = |Om| \sin\varphi = \rho \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Итак,

$$x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\vartheta. \tag{1}$$

Обратно, зная x, y, z, можем определить ρ, ϑ и φ. Действительно, имеем

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

Далее, угол ϑ (заключенный между 0 и π) вполне определяется формулой

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\rho}, \tag{3}$$

угол же φ (заключенный между 0 и 2π) определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho \sin\vartheta}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho \sin\vartheta}. \tag{4}$$

§ 62. Полуполярные (цилиндрические) координаты

При обозначениях предыдущего параграфа положение точки M вполне определяется заданием полярных координат (r, φ) проекции m точки M на плоскость Oxy и координаты $z = mM$. Величины r, φ, z называются *полуполярными* (или *цилиндрическими*) координатами точки M.

Переход от этих координат к прямоугольным декартовым дается (при обозначениях предыдущего параграфа) формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{1}$$

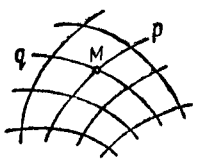
§ 63. Общий метод координат

Системы декартовых, полярных и полуполярных координат представляют собою только частные случаи осуществления общего метода координат; чтобы дать представление об этом методе, начнем со случая координат на плоскости.

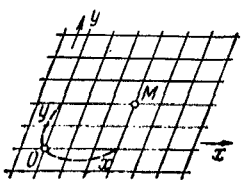
Вообразим на плоскости (черт. 64) две системы линий (кривых или прямых), обладающих тем свойством, что через каждую точку M плоскости проходит по одной и только по одной линии каждой системы и что кроме M эти две линии нигде не пересекаются. Например, мы можем за линии первой и второй систем принять прямые, параллельные соответственно осям Ox и Oy (черт. 65). Упомянутые линии назовем координатными линиями. Предположим, далее, что каждая линия первой системы вполне характери-

зуется значением некоторого числа p, так что каждому значению p соответствует вполне определенная линия первой системы; пусть, аналогично, линии второй системы характеризуются значениями некоторого числа q. В приведенном выше примере можно принять $p = x$, $q = y$, где x — отрезок, отсекаемый прямой первой системы на оси Ox, а y — отрезок, отсекаемый на оси Oy прямой второй системы; оба эти отрезка мы предполагаем снабженными знаками.

Пусть M есть какая-либо точка плоскости; через нее, по предположению, проходит по одной линии каждой системы. Числа p и q,



Черт. 64



Черт. 65

характеризующие эти линии, очевидно, вполне определяют положение точки M на плоскости и называются *криволинейными координатами* точки M.

Если, в частности, за координатные линии мы примем прямые, параллельные двум данным осям Oy и Ox, и за p и q — числа x и y (см. выше), то получим уже известную нам систему необобщенных декартовых координат.

Чтобы прийти к *полярным координатам*, рассмотрим систему окружностей с общим центром O. Каждая из этих окружностей, которые мы примем за координатные линии первой системы, характеризуется вполне своим радиусом ρ. За линии второй системы примем полупрямые (лучи), исходящие из точки O; каждая из этих полупрямых вполне определяется углом φ, составляемым ею с некоторой постоянной осью Ox на плоскости (углу φ мы, как всегда, приписываем определенный знак). Если за p и q принять соответственно ρ и φ, то мы придем, очевидно, к полярной системе § 58.

В качестве дальнейшего примера рассмотрим так называемую *биполярную* систему координат, которую можно определить следующим образом. Возьмем на плоскости две точки O и O'. Примем в качестве линий первой системы окружности с центром в O, а в качестве линий второй системы — окружности с центром в O'. Пусть координатами p и q служат радиусы ρ и ρ' окружностей первой и второй систем. Иначе говоря, примем за координаты какой-либо точки M расстояния этой точки до двух данных точек O и O'. Полученная система координат называется биполярной. Заметим, впрочем, что координатные линии этой системы не вполне удовлетво-

ряют поставленным выше условиям; линии различных систем пересекаются, вообще говоря, в двух точках; поэтому совокупности значений ρ, ρ' соответствуют вообще не одна, а две точки. Чтобы устранить это неудобство, можно, например, ограничиться рассмотрением одной из двух частей плоскости, на которые она разбивается прямой OO'.

Заметим еще, что приведенные выше соображения применяются и к определению положения точки на любой поверхности (а не только на плоскости). Простейший пример — общеизвестные *географические координаты на сфере*. Здесь координатными линиями являются меридианы и параллели, а координатами p и q — долгота и широта.

Предыдущие соображения непосредственно обобщаются на случай пространства трех измерений.

Вообразим в пространстве три системы поверхностей, обладающих тем свойством, что через каждую точку проходит одна и только одна поверхность каждой системы и что эти три поверхности имеют только одну общую (всем трем) точку M. Пусть каждая из поверхностей первой системы характеризуется заданием значений некоторой величины p; аналогично, пусть каждая из поверхностей второй и третьей систем характеризуется заданием некоторой величины q, соответственно r. Рассматриваемые поверхности называются *координатными поверхностями*, а линии пересечения этих поверхностей — *координатными линиями*. Ясно, что через каждую точку пространства проходят три координатные линии.

Если дана точка M, то этим самым даны координатные поверхности, проходящие через M, т. е. даны значения величин p, q, r, и обратно. Величины p, q, r называются *криволинейными координатами* точки M.

Декартовы координаты представляют собою частный случай криволинейных: в этом случае координатные поверхности суть плоскости, параллельные плоскостям координат; роль величин p, q, r выполняют отрезки x, y, z (снабженные знаками), отсекаемые этими плоскостями на осях координат (считая от O), или (в случае обобщенных координат) пропорциональные им величины. Координатные линии суть прямые, параллельные осям координат.

Предоставляем читателю рассмотреть с этой точки зрения случаи пространственных полярных координат и цилиндрических координат.