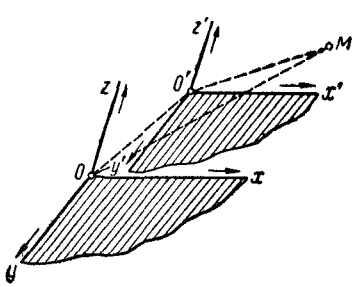
ГЛАВА ТРЕТЬЯ[1])

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ. ДВИЖЕНИЯ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

Координаты одной и той же точки или вектора по отношению к различным системам координат, вообще говоря, различны. Очень важно уметь вычислять координаты точки или вектора относительно одной системы по координатам той же точки или вектора относительно другой.

Приступая к решению этого вопроса, мы будем считать известным взаимное расположение основных элементов двух рассматриваемых систем координат. Под основными элементами данной системы декартовых координат мы подразумеваем начало этой системы и координатные векторы. Этими элементами определяются, конечно, и оси координат. Когда речь идет о координатах вектора (а не точки), то положения начал, конечно, безразличны.



Черт. 66

§ 64. Перенесение начала

Начнем с рассмотрения того простого случая, когда новая система отличается от старой только положением начала, так что координатные векторы (и, следовательно, направления осей) в обеих системах одни и те же. Оси старой системы обозначим через Ox, Oy, Oz, а оси новой — через $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ (черт. 66). Координатные векторы в обеих системах обозначим через $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Положение новой системы относительно старой, очевидно, вполне определяется координатами нового начала O' относительно старой системы. Пусть a, b, c обозначают эти координаты.

Если $\mathbf{P}$ — некоторый вектор, то, очевидно, его координаты относительно обеих систем одни и те же.

---

[1]) При первом чтении книги можно временно опустить все параграфы этой главы, кроме § 64—66; см. предисловие, пункт 3°.

Рассмотрим зависимость между старыми и новыми координатами какой-либо точки M. Пусть x, y, z обозначают координаты M в старой системе, а x', y', z' — в новой. Очевидно, имеем (см. черт. 66)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{1}$$

Но, по самому определению координат точки,

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x + \mathbf{v}y + \mathbf{w}z, \quad \overrightarrow{O'M} = \mathbf{u}x' + \mathbf{v}y' + \mathbf{w}z',$$

$$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}a + \mathbf{v}b + \mathbf{w}c.$$

Внося эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$\mathbf{u}x + \mathbf{v}y + \mathbf{w}z = \mathbf{u}(x' + a) + \mathbf{v}(y' + b) + \mathbf{w}(z' + c),$$

откуда следует, что

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'. \tag{2}$$

Формулы (2) дают возможность вычислить старые координаты, когда даны новые, и обратно.

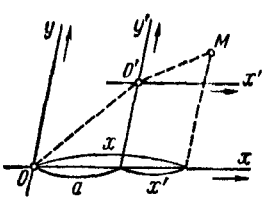
Для случая координат на плоскости будем иметь аналогично:

$$x = a + x', \quad y = b + y'; \tag{3}$$

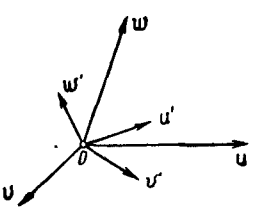
для случая координат на прямой (оси) будем иметь, очевидно,

$$x = a + x'; \tag{4}$$

читатель легко проверит эти формулы также непосредственно на чертеже (черт. 67).



Черт. 67



Черт. 68

§ 65. Изменение координатных векторов

Рассмотрим теперь другой частный случай, когда оси новой системы $Ox'y'z'$ составляют произвольные углы с осями старой системы $Oxyz$, начала же их совпадают; координатные векторы $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ новой системы могут отличаться от старых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ не только по направлению, но и по величине (черт. 68). Мы будем

считать заданными координаты векторов $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ относительно старой системы. Пусть эти координаты суть соответственно (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3), так что

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= l_1\mathbf{u} + m_1\mathbf{v} + n_1\mathbf{w}, \\ \mathbf{v}' &= l_2\mathbf{u} + m_2\mathbf{v} + n_2\mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' &= l_3\mathbf{u} + m_3\mathbf{v} + n_3\mathbf{w}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Пусть $\mathbf{P}$ — некоторый вектор и пусть X, Y, Z и X', Y', Z' — его координаты соответственно относительно старой и новой систем.

Имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z = \mathbf{u}'X' + \mathbf{v}'Y' + \mathbf{w}'Z'.$$

Внося в правую часть вместо $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ их выражения (1) через $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и сравнивая в обеих частях коэффициенты при $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, получим

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом, задача наша решена: старые координаты выражены через новые. Если мы хотим выразить новые координаты через старые, то для этого достаточно решить систему (2) относительно X', Y', Z' или же прямо применить предыдущий результат, поменяв ролями старые и новые системы [1]).

Из того обстоятельства, что, поменяв ролями старые и новые оси, мы можем выразить X', Y', Z' через X, Y, Z, вытекает, что система (2) всегда разрешима относительно X', Y', Z', а это значит, что определитель

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix},$$

отличен от нуля. Последнее вытекает также из того, что если бы предыдущий определитель был равен нулю, то тогда векторы $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ были бы компланарны (§ 39), а это противоречит условию, принятому раз навсегда относительно координатных векторов.

Совершенно ясно, далее, что координаты любой *точки* M преобразуются по тем же формулам (2), так как координаты точки M суть не что иное, как координаты радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ этой точки.

---

[1]) В этом последнем случае надо считать заданными координаты координатных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ старой системы относительно новой системы.

Если, следовательно, x, y, z и x', y', z' суть соответственно старые и новые координаты точки M, то

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Точно так же можно выразить новые координаты через старые.

Заметим, что величины l_1, l_2, . . ., n_3 в формулах (2) или (3) суть постоянные величины, зависящие только от взаимного расположения старой и новой систем и от длин координатных векторов, но не зависящие от рассматриваемого вектора **P** (или точки M).

Для случая координат на плоскости будем иметь аналогично

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= l_1\mathbf{u} + m_1\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= l_2\mathbf{u} + m_2\mathbf{v} \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

и

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

(для вектора) и

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y', \\ y &= m_1x' + m_2y' \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

(для точки).

Для случая координат на прямой будем иметь, очевидно,

$$\mathbf{u}' = l\mathbf{u} \tag{1b}$$

и

$$X = lX' \tag{2b}$$

(для вектора) и

$$x = lx' \tag{3b}$$

(для точки); l обозначает постоянную, отличную от нуля.

Упражнения

1. Старая система координат на плоскости — прямоугольная, новая ось Ox' составляет со старой осью Ox угол в 30°, а новая ось Oy' составляет с той же осью Ox угол в 60° [1]). Требуется выразить старые координаты (X, Y) некоторого вектора **P** через новые (X', Y'), и обратно; координаты считаются необобщенными.

Решение. Координаты вектора (орта) $\mathbf{u}'$ относительно старой системы будут $(\cos 30°, \sin 30°)$; координаты вектора $\mathbf{v}'$ относительно той же системы

[1]) Углы отсчитываются от оси Ox в направлении к оси Oy.

будут ($\cos 60°$, $\sin 60°$). Итак,

$$\mathbf{u}'=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v},\quad \mathbf{v}'=\frac{1}{2}\mathbf{u}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{v};$$

значит,

$$l_1=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad m_1=\frac{1}{2},\quad l_2=\frac{1}{2},\quad m_2=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$X=\frac{1}{2}(\sqrt{3}X'+Y'),\quad Y=\frac{1}{2}(X'+\sqrt{3}Y').$$

Мы выразили старые координаты через новые. Решая последние уравнения относительно X', Y', получим выражения новых координат через старые:

$$X'=\sqrt{3}X-Y,\quad Y'=X+\sqrt{3}Y.$$

2. Оси Ox', Oy', Oz' новой системы являются биссектрисами углов yOz, zOx, xOy старой системы, которая предполагается прямоугольной. Требуется выразить координаты X, Y, Z вектора $\mathbf{P}$ через новые X', Y', Z'; координаты — необобщенные.

Решение. Имеем[1])

$$\mathbf{u}'=0\cdot\mathbf{u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}+\mathbf{w}),$$

$$\mathbf{v}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}+0\cdot\mathbf{v}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}+\mathbf{w}),$$

$$\mathbf{w}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}+0\cdot\mathbf{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}).$$

Следовательно,

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y'+Z'),\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Z'),\quad Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Y').$$

§ 66. Общий случай

Пусть теперь новая система $O'x'y'z'$ расположена совершенно произвольно относительно старой системы $Oxyz$. Так как координаты *вектора* вовсе не зависят от положения начала координат, то, очевидно, они будут преобразовываться по тем же формулам (2) предыдущего параграфа, как если бы новое начало координат O' совпадало с O.

Для вывода же формул преобразования координат *точки* введем вспомогательную систему $O'x''y''z''$ (черт. 69), имеющую начало в O', но координатные векторы которой равны старым.

---

[1]) Предполагаем для определенности, что положительные части новых осей заключаются между положительными частями старых, т. е. что, например, Ox' составляет с Oy и Oz углы в 45°.

Обозначая через (x, y, z), (x', y', z') и (x'', y'', z'') координаты точки M соответственно в старой, новой и вспомогательной системах, будем иметь сперва

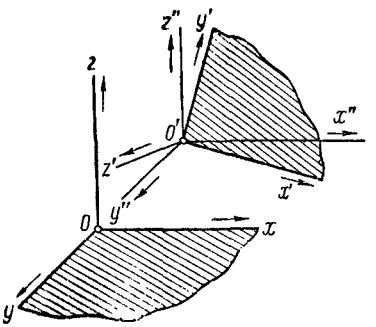
$$x = a + x'', \quad y = b + y'', \quad z = c + z'',$$

где a, b, c обозначают координаты нового начала O' относительно старой системы. Далее, по формулам предыдущего параграфа получим (рассматривая вспомогательную систему как старую)

$$\begin{aligned} x'' &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y'' &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z'' &= n_1x' + n_2y' + n_3z'; \end{aligned}$$

подставляя эти значения в предыдущие формулы, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= b + m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= c + n_1x' + n_2y' + n_3z'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Черт. 69

В формулах (1) все коэффициенты a, b, ..., n_3 суть постоянные величины, не зависящие от положения точки M (упомянутые коэффициенты зависят только от взаимного расположения осей старой и новой систем координат и от длин координат векторов).

Для случая координат на плоскости вместо формул (1) будем иметь формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y', \\ y &= b + m_1x' + m_2y', \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

выводимые совершенно аналогичным способом.

Меняя ролями старые и новые системы, получим совершенно аналогичные формулы:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a' + l'_1x + l'_2y + l'_3z, \\ y' &= b' + m'_1x + m'_2y + m'_3z, \\ z' &= c' + n'_1x + n'_2y + n'_3z \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

для пространства и

$$\left.\begin{aligned} x' &= a' + l'_1x + l'_2y, \\ y' &= b' + m'_1x + m'_2y \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

— для плоскости. Эти формулы можно, конечно, получить из (1) (соответственно из (2)), решая последние относительно x', y', z' (соответственно x', y').

Для случая координат на прямой (оси Ox) формулы преобразования координат точки имеют, очевидно, следующий вид:

$$x = a + lx', \quad x' = a' + l'x \qquad \left(\text{где } l' = \frac{1}{l}, \quad a' = -\frac{a}{l}\right). \tag{3}$$

Резюмируя полученные результаты, можно высказать следующее основное предложение:

Декартовы координаты вектора относительно одной системы суть линейные однородные функции декартовых координат того же вектора относительно другой системы. Декартовы координаты точки относительно одной системы суть линейные (вообще неоднородные) *функции декартовых координат той же точки относительно другой системы* [1]).

Замечание. Если переменные x, y, z выражаются через переменные x', y', z' формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то говорят, что x, y, z получаются из x', y', z' линейной однородной подстановкой (преобразованием) с таблицей

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3. \end{matrix} \tag{A}$$

Определитель этой таблицы, т. е. определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

называется *определителем подстановки*; величины $l_1, l_2, \ldots, n_3$ суть *коэффициенты подстановки*. Если $\Delta = 0$, то подстановка называется *особенной*, если же $\Delta \neq 0$, то подстановка — *неособенная*.

---

[1]) Напомним, что линейной функцией одной или нескольких переменных называется целая рациональная функция первой степени этих переменных. Например, линейная функция трех переменных x, y, z имеет вид

$$Ax + By + Cz + D,$$

где A, B, C, D — постоянные коэффициенты. Если постоянный член отсутствует, то линейная функция называется *однородной*; в случае трех переменных x, y, z линейная однородная функция имеет вид $Ax + By + Cz$.

Формулы вида (1) также определяют линейную подстановку (линейное преобразование), вообще *неоднородную* [1]). Величины a, b, c, l_1, l_2, . . ., n_3 суть коэффициенты подстановки. Однако определителем подстановки называется тот же определитель Δ, составленный из коэффициентов l_1, . . ., n_3. Подстановка называется *особенной* или *неособенной* в зависимости от случаев $\Delta = 0$ или $\Delta \neq 0$. Эти определения, естественно, распространяются на случай любого числа переменных [2]).

При указанной терминологии доказанное выше предложение можно высказать еще так: новые координаты *точки* получаются из старых линейной неособенной [3]) подстановкой с постоянными коэффициентами; новые координаты *вектора* получаются из старых линейной *однородной* неособенной подстановкой с постоянными коэффициентами. Коэффициенты названы здесь постоянными в том смысле, что они не зависят от рассматриваемого вектора или точки, а только от взаимного положения и длин старых и новых координатных векторов и начал координат.

Легко видеть, что всякую неособенную подстановку вида (1) можно рассматривать, как формулы преобразования координат точки при переходе от одной системы декартовых координат к другой. Аналогично относительно подстановки вида (4) для координат вектора.

§ 67. Приложения

1°. *Обобщение формул для площади треугольника и объема тетраэдра.* В § 49 мы вывели формулу (4), дающую площадь параллелограмма, построенного на двух векторах $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, справедливую в случае прямоугольных координат. Выведем аналогичную формулу для декартовых координат общего вида. Пусть X_1, Y_1 и X_2, Y_2 — координаты векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ в данной обобщенной декартовой системе. Возьмем теперь какую-нибудь вспомогательную прямоугольную систему, такую, однако, чтобы направление положительного вращения в обеих системах было одинаковым. Тогда, сохраняя правило знаков, принятое в § 49, мы должны будем приписывать площади одинаковый знак в обеих системах. Искомая площадь дается формулой

$$S = \begin{vmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2' & Y_2' \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где X_1', Y_1', X_2', Y_2' — координаты наших векторов относительно прямоугольной системы, которую мы будем рассматривать как «старую», так что

$$X_1' = l_1X_1 + l_2Y_1, \quad Y_1' = m_1X_1 + m_2Y_1,$$
$$X_2' = l_1X_2 + l_2Y_2, \quad Y_2' = m_1X_2 + m_2Y_2,$$

где l_1, m_1 и l_2, m_2 суть координаты (относительно прямоугольной системы) координатных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ данной системы.

---

[1]) Подстановка будет однородной в случае, когда $a = b = c = 0$.
[2]) См. Добавление, § 8.
[3]) О том, что $\Delta \neq 0$, было уже сказано в предыдущем параграфе.

Таким образом,

$$S=\begin{vmatrix} l_1X_1+l_2Y_1 & m_1X_1+m_2Y_1 \\ l_1X_2+l_2Y_2 & m_1X_2+m_2Y_2 \end{vmatrix},$$

или, пользуясь теоремой об умножении определителей,

$$S=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

откуда

$$S=S_0\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где

$$S_0=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

есть, на основании той же формулы (1), примененной к векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$; площадь эта положительна, на основании нашего условия относительно направления положительного вращения в обеих системах координат. Имеем, очевидно,

$$S_0=|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\nu,$$

где ν — координатный угол данной системы, так что, наконец,

$$S=|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\nu\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Напомним, что формула эта приписывает площади знак согласно тому же правилу, что и в § 49.

Совершенно аналогично для объема V параллелепипеда, построенного на трех векторах

$$\mathbf{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),\ \mathbf{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),\ \mathbf{P}_3=(X_3,\ Y_3,\ Z_3),$$

получим исходя из формулы (2) § 52 и пользуясь, подобно предыдущему, вспомогательной системой прямоугольных координат, так же ориентированной (в смысле правой или левой системы), что и данная:

$$V=V_0\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $V_0>0$ — объем параллелепипеда, построенного на координатных векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, определяемый формулой (см. § 52, упражнение 4):

$$V_0^2=|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}; \tag{6}$$

здесь λ, μ, ν — углы между координатными векторами. Формула (5) приписывает объему определенный знак, а именно, $V>0$, если векторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ так же ориентированы (в смысле правой или левой системы), как координатные векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$; в противном случае $V<0$.

Совершенно так же, как в § 50 и 53, получим формулу

$$S=\frac{1}{2}|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\nu\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

для площади треугольника, заданного координатами вершин, и

$$V=\frac{1}{6}V_0\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix} \tag{8}$$

для объема тетраэдра.

2°. *О квадратичной форме, определяющей квадрат длины вектора.* В § 56 мы видели, что квадрат длины вектора $\mathbf{P}=(X, Y, Z)$ выражается квадратичной формой координат X, Y, Z:

$$g_{11}X^2+g_{22}Y^2+g_{33}Z^2+2g_{23}YZ+2g_{31}ZX+2g_{12}XY \tag{9}$$

и что эта форма неособенная и положительная. Естественно возникает вопрос: если произвольно задана неособенная положительная форма, можно ли найти такую систему декартовых координат, чтобы в ней данная форма выражала квадрат длины вектора?

Ответ очевиден в случае, когда $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, $g_{23}=g_{31}=g_{12}=0$, т. е. когда наша форма имеет вид

$$X^2+Y^2+Z^2;$$

действительно, в этом случае всякая (необобщенная) прямоугольная система удовлетворяет условию. Легко теперь показать, что ответ будет положительным и в общем случае. Действительно, в теории квадратичных форм доказывается[1]), что путем подходящей линейной однородной неособенной подстановки

$$\left.\begin{aligned} X&=l_1X'+l_2Y'+l_3Z',\\ Y&=m_1X'+m_2Y'+m_3Z',\\ Z&=n_1X'+n_2Y'+n_3Z' \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

всякая неособенная положительная форма (9) трех переменных может быть приведена к виду

$$X'^2+Y'^2+Z'^2.$$

Если теперь рассматривать X', Y', Z' как координаты вектора в некоторой прямоугольной системе координат и подобрать другую декартову систему (вообще не прямоугольную) так, чтобы координаты вектора в этих двух системах были связаны соотношениями (10)[2]), то эта вторая система и будет удовлетворять поставленному условию.

Замечание. Легко видеть, что задание выражения (9) для квадрата длины вектора вполне определяет длины координатных векторов и углы

---

[1]) См. Добавление § 12.

[2]) Для нахождения этой второй системы достаточно представить соотношения (10) в виде

$$\begin{aligned} X'&=l_1'X+l_2'Y+l_3'Z,\\ Y'&=m_1'X+m_2'Y+m_3'Z,\\ Z'&=n_1'X+n_2'Y+n_3'Z, \end{aligned}$$

для чего достаточно решить систему (10) относительно X', Y', Z'. Тогда система декартовых координат, определяемая относительно прямоугольной координатными векторами $\mathbf{u}=(l_1', m_1', n_1')$, $\mathbf{v}=(l_2', m_2', n_2')$, $\mathbf{w}=(l_3', m_3', n_3')$, и будет требуемой.

между ними. Действительно, на основании формул (2) § 55, имеем

$$|\mathbf{u}|=\sqrt{g_{11}},\quad |\mathbf{v}|=\sqrt{g_{22}},\quad |\mathbf{w}|=\sqrt{g_{33}},$$

$$\cos\lambda=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\quad \cos\mu=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}},\quad \cos\nu=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Если бы величины $g_{11}, \ldots, g_{33}$ были заданы совершенно произвольно, то могло бы, например, оказаться, что для величин $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ получились бы мнимые значения или для $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — величины, бо́льшие единицы. Даже если бы для $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$ получились действительные значения, а для $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — значения, меньшие 1, то все же могло бы оказаться невозможным построить трехгранный угол $Oxyz$ с плоскими углами, равными λ, μ, ν (для возможности построения такого трехгранного угла, как легко видеть, должно быть $\lambda+\mu+\nu<2\pi$). Из доказанного в этом параграфе вытекает, что это не может случиться, если заданная форма — неособенная и положительная.

В случае двух измерений возможность построения системы координат, для которой

$$|\mathbf{P}|^2=g_{11}X^2+2g_{12}XY+g_{22}Y^2,$$

где в правой части — произвольная неособенная положительная форма, легко может быть также доказана непосредственно, если воспользоваться следующим предложением[1]): *для того чтобы квадратичная форма* $g_{11}X^2+2g_{12}XY+g_{22}Y^2$ *была положительной и неособенной, необходимы и достаточны условия*: $g_{11}>0$, $g_{22}>0$, $g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$. Обратно, это предложение легко может быть выведено из предыдущих рассмотрений, примененных к случаю двух измерений.

§ 68. Преобразование ковариантных координат

В предыдущих параграфах речь шла, разумеется, об обычных (контравариантных) координатах вектора (или точки). Посмотрим теперь, как изменяются ковариантные координаты вектора при переходе от одной системы к другой.

Имеем по-прежнему:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}'&=l_1\mathbf{u}+m_1\mathbf{v}+n_1\mathbf{w},\\ \mathbf{v}'&=l_2\mathbf{u}+m_2\mathbf{v}+n_2\mathbf{w},\\ \mathbf{w}'&=l_3\mathbf{u}+m_3\mathbf{v}+n_3\mathbf{w}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Пусть X^*, Y^*, Z^* и X'^*, Y'^*, Z'^* обозначают соответственно ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}$ относительно старых и новых систем. По определению $X'^*=\mathbf{u}'\cdot\mathbf{P}$, $Y'^*=\mathbf{v}'\cdot\mathbf{P}$, $Z'^*=\mathbf{w}'\cdot\mathbf{P}$, откуда, подставляя вместо $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ выражения (1) и замечая, что $\mathbf{u}\cdot\mathbf{P}=X^*$ и т. д., получим

$$\left.\begin{aligned}X'^*&=l_1X^*+m_1Y^*+n_1Z^*,\\ Y'^*&=l_2X^*+m_2Y^*+n_2Z^*,\\ Z'^*&=l_3X^*+m_3Y^*+n_3Z^*.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Решая последние уравнения относительно X^*, Y^*, Z^*, найдем также выражение старых координат через новые.

Формулы преобразования *координат точки* совершенно аналогичны предыдущим, если начало координат не изменяется. Читателю предоставляется

---

[1]) См. Добавление, § 12, замечание.

написать формулы и для случая, когда начало координат изменяет положение.

Сделаем теперь одно замечание, относящееся к формулам преобразования как обычных (контравариантных), так и ковариантных координат. Вспомним для этого формулы преобразования обычных координат (§ 65):

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z' \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Для того чтобы облегчить сравнение формул (1), (2) и (3), выпишем таблицу коэффициентов, входящих в формулы (1):

$$\begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3. \end{matrix} \qquad (A)$$

Применяя терминологию, указанную в конце § 66, содержание формул (1) можно передать, говоря, что новые координатные векторы получаются из старых при помощи линейной подстановки с таблицей (A). Обращаясь к формулам (2), видим, что при преобразовании координат величины X^*, Y^*, Z^* преобразуются точно такой же линейной подстановкой, что и координатные векторы. Следуя алгебраической терминологии, это обстоятельство можно выразить, говоря, что величины X^*, Y^*, Z^* *ковариантны* с координатными векторами (этим и объясняется название «ковариантные координаты»).

Сравнивая теперь формулы (3) с формулами (1), видим, что *старые* координаты X, Y, Z выражаются через *новые* при помощи подстановки, которая получается из подстановки, выражающей *новые* координатные векторы через *старые*, путем замены в таблице (A) строк на столбцы. Следуя алгебраической терминологии, можно сказать, что обычные координаты X, Y, Z *контравариантны* с координатными векторами; этим и объясняется название «контравариантные» координаты.

II. ВАЖНЕЙШИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

В этом отделе мы детально разберем некоторые важнейшие случаи преобразования координат, чаще всего встречающиеся в приложениях.

§ 69. Преобразование прямоугольных координат на плоскости

Предположим сначала, что старая и новая системы координат на плоскости — обе прямоугольные (черт. 70).

Здесь следует различать два случая. В первом новая система (черт. 70,*a*) может быть получена из старой путем простого перемещения старой системы по своей плоскости (не выходя из нее). Во втором же случае возможно, путем такого перемещения, совместить только, например, оси $O'x'$ и Ox; оси же $O'y'$ и Oy примут при этом противоположные направления (черт. 70,*b*).