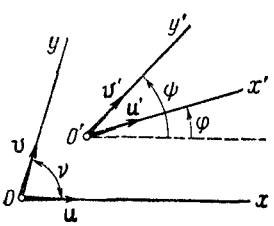
в формулах (2) знаки выражений для l_3, m_3, n_3 на обратные. Легко также видеть, как надо изменить определения углов φ, ψ, ϑ, когда старая система — правая.

Замечание 2. Формулы (2) показывают, что коэффициенты любой ортогональной подстановки (см. предыдущий параграф) над тремя переменными можно выразить через три вспомогательных параметра φ, ψ, ϑ[1]).

Этот факт можно доказать и не опираясь на геометрическое значение ортогональной подстановки.

§ 74. Преобразование необобщенных косоугольных координат на плоскости

Закончим этот отдел рассмотрением формул преобразования необобщенных косоугольных координат в необобщенные же косоугольные координаты на плоскости. Положение новых осей относительно старых будет определено, если даны координаты a, b нового начала относительно старой системы и углы φ и ψ, которые новые оси $O'x'$ и $O'y'$ составляют со старою осью Ox (о направлении отсчета углов см. § 47) (черт. 75).



Черт. 75

Для ортов $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ новых осей имеем [см. § 47, формулы (7)]:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu}\,\mathbf{u} + \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}\,\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= \frac{\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}\,\mathbf{u} + \frac{\sin\psi}{\sin\nu}\,\mathbf{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ν есть координатный угол старой системы.

Отсюда, на основании формул (1a) и (2a) § 65, имеем для координат вектора

$$X = \frac{X'\sin(\nu-\varphi)+Y'\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}, \quad Y = \frac{X'\sin\varphi+Y'\sin\psi}{\sin\nu}. \qquad (2)$$

Для координат точки получим аналогичные формулы, только к правым частям прибавятся соответственно величины a и b.

III. ДВИЖЕНИЯ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Формулы предыдущих отделов дают связь между декартовыми координатами *одной и той же точки* относительно двух различных систем координат. Но эти формулы могут быть истолкованы и иным

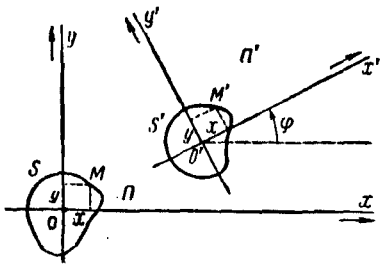
[1]) В подстановках второго класса надо в правых частях выражений для l_3, m_3, n_3 изменить знаки на обратные. В случае двух переменных коэффициенты ортогональной подстановки выражаются, как мы знаем, через один параметр φ.

образом. А именно, их можно рассматривать как соотношения, связывающие координаты *различных* точек относительно одной и той же или также различных систем. Это истолкование приводит к новым понятиям фундаментальной важности, к изложению которых мы и переходим.

§ 75. Движения

Для большей ясности начнем с формул, связанных с преобразованиями прямоугольных координат, и рассмотрим сперва случай двух измерений.

Пусть Oxy — какая-либо система осей прямоугольных координат на плоскости. Вообразим теперь, что мы переместили эту плоскость по самой себе, как жёсткое целое, так, что система Oxy заняла новое положение $O'x'y'$ (черт. 76). Подробнее надо представить себе дело так. Имеются два наложенные друг на друга плоскости Π и Π' (подобно двум листам бумаги). Первая из этих плоскостей неподвижна, а вторая может скользить по первой. На плоскостях Π и Π' взяты прямоугольные системы Oxy и $O'x'y'$, которые до перемещения плоскости Π' совпадали. После перемещения система $O'x'y'$ занимает вполне определенное положение относительно Oxy; в этом новом положении мы ее и будем рассматривать. Точка, принадлежащая Π', совпадавшая до перемещения с точкой $M(x, y)$ плоскости Π, занимает после перемещения новое положение M'. Пусть x', y' — координаты точки M' относительно той же системы Oxy. Найдем зависимость между координатами x, y старого положения точки и координатами x', y' нового. Для этого применим формулы (5) § 69 к координатам точки M' относительно осей Oxy и $O'x'y'$. Первые, по определению, суть x', y', а вторые, очевидно, равны x, y, ибо ясно, что M' имеет те же координаты относительно $O'x'y'$, какие имеет M относительно Oxy (см. черт. 76). Таким образом, находим [1]):



Черт. 76

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + b, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1]) В нашем случае роль «новых» координат точки M' играют x, y, а роль «старых» координат (той же точки) играют x', y'. В формулах § 69 следует взять верхние знаки, ибо $O'x'y'$ получается из Oxy перемещением в своей плоскости.

где φ обозначает угол, на который повернулась ось $O'x'$, а a, b — координаты точки O' (в новом ее положении). Мы получили, таким образом, те же формулы, что и в § 69 (только теперь вместо x, y написано x', y', и наоборот), однако смысл этих формул иной: в § 69 фигурируют координаты *одной и той же точки* относительно *различных* систем, а здесь — координаты *различных* точек относительно *одной и той же системы*.

Соотношения (1) приводят в соответствие каждой точке M плоскости П вполне определенную точку M' плоскости П', и обратно.

Когда точкам одной плоскости приводятся в соответствие точки другой так, что каждой точке одной плоскости отвечает одна определенная точка другой, и обратно, то говорят, что между этими плоскостями установлено точечное обратимо-однозначное [1]) соответствие или что мы имеем дело с *точечным* [2]) *обратимо-однозначным преобразованием* одной плоскости в другую. В этом случае каждой фигуре на одной плоскости соответствует вполне определенная фигура другой, и обратно.

В нашем случае мы имеем дело с одним из простейших случаев такого соответствия (преобразования): соответствующие фигуры S и S' получаются одна из другой простым перемещением в плоскости; эти фигуры *конгруэнтны* между собою, т. е. могут быть наложены друг на друга всеми соответствующими точками (черт. 76). Поэтому преобразования вида (1) называются *движениями* или *конгруэнтными преобразованиями*.

Очевидно, что два движения, произведенные одно вслед за другим, приводят опять к движению.

До сих пор мы считали, что в формулах (1) фигурируют координаты соответствующих точек относительно одной и той же системы Oxy. Предположим теперь, что x, y и x', y' обозначают координаты двух точек M и M' плоскостей П и П' относительно двух каких-нибудь прямоугольных систем Oxy и $O''x''y''$, причем φ обозначает некоторый угол, а a, b — некоторые числа. Легко видеть, что и в этом случае соответствие, выражаемое формулами (1), есть движение, если только Oxy и $O''x''y''$ принадлежат к одному классу (см. § 69). Действительно, если переместим, как одно целое, плоскость П' и систему $O''x''y''$ вдоль плоскости П так, чтобы система $O''x''y''$ совместилась с системой Oxy, мы вернемся к предыдущему случаю.

---

[1]) «Обратимо-однозначное» обозначает, что каждой точке одной плоскости соответствует одна точка другой, и обратно. В дальнейшем, говоря о соответствии, мы будем часто опускать слова «обратимо-однозначное», но подразумевать их.

[2]) Мы называем преобразования точечными, когда основными объектами преобразований служат точки. Существуют и другие виды преобразований, например, такие, в которых точкам одной плоскости соответствуют прямые другой. С некоторыми из таких преобразований мы познакомимся ниже.

Наряду с преобразованиями вида (1) можно рассматривать и преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + a, \\ y' &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + b, \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

соответствующие нижним знакам формул (5) § 69. Если считать, что точки M и M' отнесены к одной и той же системе Oxy, то, на основании сказанного в § 69, очевидно, что преобразование (1a) состоит из движения (1) и последующего зеркального отражения относительно оси $O'x'$. Преобразования этого вида также называются движениями, но в отличие от движений в собственном смысле («собственных движений») их называют *несобственными*.

Если в формулах (1a) координаты точек M и M' отнесены к двум различным прямоугольным системам одного и того же класса, то и в этом случае, как легко видеть, мы имеем опять несобственное движение. Напротив, если системы — различных классов, движение, выражаемое формулами (1a), будет собственным; читатель сам легко проверит это.

Можно считать также, что плоскости П и П' не наложены друг на друга и что (x, y), (x', y') обозначают координаты точек M и M' относительно двух прямоугольных систем, взятых соответственно на П и на П'.

И здесь мы имеем конгруэнтное соответствие, так как при помощи движения (уже в пространстве трех измерений) мы можем наложить плоскость П' на П, что приведет к предыдущему случаю.

Но при допущении движений, выводящих фигуры из их первоначальной плоскости, теряется различие между собственными и несобственными конгруэнтными соответствиями плоских фигур, ибо, наложив плоскость П' на П той или иной стороной, мы получим тот или другой вид соответствия.

Совершенно аналогично можно рассматривать конгруэнтные соответствия или движения пространственных фигур. И здесь можно мыслить два пространства, «вложенных» одно в другое; это, конечно, необязательно (так же как и в случае плоских движений) и делается только для того, чтобы удобнее различить точки M и M' до и после преобразования.

Пространственные движения характеризуются формулами преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x + l_2y + l_3z + a, \\ y' &= m_1x + m_2y + m_3z + b, \\ z' &= n_1x + n_2y + n_3z + c, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix} \qquad (3)$$

есть таблица некоторой ортогональной подстановки, а a, b, c — совершенно произвольные числа. Величины x, y, z и x', y', z' обозначают координаты двух точек M и M', отнесенных к одной и той же или к двум различным прямоугольным системам. Будем сперва считать, что точки M и M' отнесены к одной и той же системе $Oxyz$. Если определитель Δ предыдущей таблицы [1]) равен $+1$, то мы имеем собственное движение, состоящее в том, что точка O перемещается в положение O' (a, b, c), а оси Ox, Oy, Oz принимают направления ортов $\mathbf{u} = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{v} = (l_2, m_2, n_2)$, $\mathbf{w} = (l_3, m_3, n_3)$. Если же $\Delta = -1$, то получается несобственное движение, состоящее из собственного движения и из зеркального отражения относительно одной из плоскостей координат.

В случае, когда точки M и M' отнесены к двум различным прямоугольным системам, формулы (2) также выражают движение (собственное или несобственное), если таблица (3) есть таблица некоторой ортогональной подстановки (сравн. случай двух измерений).

§ 76. Аффинные преобразования

Непосредственным обобщением движений (конгруэнтных преобразований) являются аффинные преобразования. Начнем опять со случая двух измерений. Говорят, что между плоскостями Π и Π' установлено *аффинное* соответствие (или аффинное преобразование), если каждой точке M плоскости Π соответствует точка M' плоскости Π', декартовы координаты которой связаны с декартовыми координатами точки M линейными соотношениями

$$x' = l_1x + l_2y + a, \qquad y' = m_1x + m_2y + b; \tag{1}$$

x, y и x', y' обозначают соответственно координаты точек M и M' относительно каких-либо систем декартовых координат на плоскостях Π и Π'. Коэффициенты l_1, l_2, m_1, m_2 могут быть выбраны совершенно произвольно. Если противное не будет оговорено особо, мы будем считать, что подстановка (1) *неособенная*, т. е. что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

отличен от нуля (при $\Delta = 0$ преобразование называется *особенным* или *выродившимся*). Условие $\Delta \neq 0$ гарантирует обратимость подстановки (1): уравнения (1) можно решить относительно x и y и получить для них также линейные выражения через x', y'. Таким образом, при $\Delta \neq 0$ соответствие обратимо-однозначное.

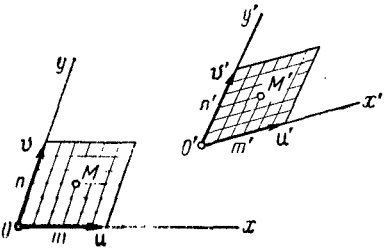
Чтобы получить более ясное представление о геометрическом характере преобразования (1), будем считать сперва, что пло-

[1]) Мы знаем (§ 71), что $\Delta = \pm 1$.

скости П и П′ наложены друг на друга и что точки M и M' отнесены к одной и той же системе Oxy декартовых координат.

Пусть O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — начало и координатные векторы системы Oxy, к которой мы относим точки M и M'. Построим, далее, вспомогательную систему $O'x'y'$ с началом в O' (a, b) и с координатными векторами $\mathbf{u}' = (l_1, m_1)$, $\mathbf{v}' = (l_2, m_2)$ (черт. 77); здесь a, b, l_1, m_1, l_2, m_2 обозначают, разумеется, координаты относительно системы Oxy.

Легко видеть, что точка $M'(x', y')$, получающаяся из точки $M(x, y)$ аффинным преобразованием (1), имеет относительно вспомогательной системы $O'x'y'$ такие же координаты x, y, как точка M относительно Oxy. Действительно, точка, имеющая относительно $O'x'y'$ координаты x, y, будет иметь относительно Oxy координаты x', y', даваемые формулами (1), как это следует из формул (2) § 66.



Черт. 77

На основании сказанного, рассматриваемое преобразование можно описать следующим образом. Параллелограмм, построенный на $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, деформируется (сперва без изменения длин сторон) так, что угол ν между $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ делается равным углу ν' между $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$; затем стороны его удлиняются или укорачиваются так, что длины их из $|\mathbf{u}|$ и $|\mathbf{v}|$ обращаются в $|\mathbf{u}'|$ и $|\mathbf{v}'|$; наконец, полученный таким образом параллелограмм переносится в своей плоскости в новое положение так, что его вершина O переходит в O', а сторона $\mathbf{u}$ совмещается со стороною $\mathbf{u}'$; тогда либо сторона $\mathbf{v}$ совмещается с $\mathbf{v}'$, либо такое совмещение достигается добавочным отражением от стороны $\mathbf{u}$.

Соответствующим образом изменяется положение каждой точки M плоскости: параллелограмм $OmMn$ (черт. 77) преобразуется в параллелограмм $O'm'M'n'$, который получается таким же изменением угла, последующим растяжением или укорочением сторон (в той же пропорции, что и стороны $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) и перенесением в новое положение тем же движением, а возможно и отражением, что и рассмотренный выше параллелограмм [1]). Если мы представим себе сеть прямых, параллельных Ox и Oy и образующих сеть параллелограммов, подобных параллелограмму, построенному на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то после преобразования эта сеть обратится в сеть прямых, параллельных $O'x'$ и $O'y'$, образующих сеть параллелограммов, подобных параллелограмму, построенному на $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ (черт. 77).

[1]) В дальнейшем (§ 238) будет доказано, что любое аффинное преобразование есть результат растяжений по двум *взаимно перпендикулярным* направлениям и движения, а возможно и отражения.

Легко видеть, что мы не получим преобразования более общего вида, если будем считать, что в формулах (1) величины x, y и x', y' обозначают координаты точек M и M' относительно различных систем координат на (наложенных друг на друга) плоскостях П и П'.

В самом деле, мы можем отнести точку M' к той же системе Oxy, что и точку M; координаты x'', y'' точки M' относительно этой последней системы выражаются через координаты x', y' той же точки относительно системы, к которой она была первоначально отнесена, линейной неособенной подстановкой

$$x'' = l_1'x' + l_2'y' + a', \qquad y'' = m_1'x' + m_2'y' + b'; \tag{3}$$

внося в правые части вместо x', y' их выражения (1), получим формулы такого же вида, что и (1):

$$x'' = l_1''x + l_2''y + a'', \qquad y'' = m_1''x + m_2''y + b'', \tag{4}$$

связывающие координаты точек M и M', отнесенных уже к одной и той же системе. Коэффициенты l_1'', l_2'', m_1'', m_2'' последней подстановки легко выражаются через коэффициенты подстановок (1) и (3). Важно отметить, что подстановка (4) неособенная, если, как мы предполагаем, этим свойством обладает подстановка (1). Действительно, легко видеть, что определитель подстановки (4) равен произведению определителей подстановок (1) и (3); предоставляем читателю проверить это (см. также Добавление, § 9) [1].

Таким образом, не нарушая общности, мы можем всегда считать, что в формулах (1), выражающих аффинное преобразование, координаты отнесены к одной и той же системе.

Если, наконец, считать, что точки M и M' расположены на различных плоскостях, то достаточно наложить эти плоскости друг на друга, чтобы иметь предыдущий случай.

Докажем теперь некоторые основные свойства аффинного преобразования.

1°. *Преобразование, обратное аффинному, является также аффинным.* Это следует из того, что, решая (1) относительно x, y, получаем формулы такого же вида, выражающие уже x, y через x', y'.

2°. *Два последовательных аффинных преобразования дают снова аффинное преобразование.* Действительно, если, произведя преобразование (1), мы произведем новое преобразование

$$x'' = l_1'x' + l_2'y' + a', \qquad y'' = m_1'x' + m_2'y + b',$$

[1]) В указанном месте это доказано для однородных подстановок; но легко видеть, что свободные члены не влияют на коэффициенты при переменных, которые только и входят в определитель подстановки.

то, подставляя на место x', y' их выражения (1), получим в результате преобразование вида

$$x'' = l_1''x + l_2''y + a'', \qquad y'' = m_1''x + m_2''y + b'',$$

которое также неособенное, если два данных — неособенные (сравн. сказанное выше).

3°. *При аффинном преобразовании прямые переходят в прямые; параллельные прямые остаются параллельными; отношения параллельных отрезков остаются неизменными.* Для доказательства заметим следующее. Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — две точки плоскости П. После преобразования они обратятся в точки $A'(x_1', y_1')$ и $B'(x_2', y_2')$ плоскости П'. Мы будем говорить, что аффинное преобразование (1) преобразует вектор $\overrightarrow{AB}$ в вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (из последующего будет ясно, что не только концы, но и все точки отрезка AB переходят в точки отрезка $A'B'$, но в данный момент это не важно). Координаты $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$ вектора $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$ связаны с координатами $X' = x_2' - x_1'$, $Y' = y_2' - y_1'$ вектора $\mathbf{P}' = \overrightarrow{A'B'}$ соотношениями

$$X' = l_1X + l_2Y, \qquad Y' = m_1X + m_2Y, \tag{1a}$$

которые непосредственно получаются из (1). Из (1a) следует, что вектор $(kX, kY) = k\mathbf{P}$ плоскости П переходит в вектор $(kX', kY') = k\mathbf{P}'$ плоскости П'. Таким образом, если до преобразования мы имеем векторное равенство (на плоскости П)

$$\mathbf{Q} = k\mathbf{P},$$

то после преобразования оно переходит в равенство (на П')

$$\mathbf{Q}' = k\mathbf{P}',$$

где $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{Q}'$ обозначают векторы, соответствующие $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$; это значит, что параллельные до преобразования векторы остаются параллельными и после него и что их отношение k остается неизменным; в частности, остается неизменным отношение $|k|$ их длин.

Пусть теперь Δ — некоторая прямая на плоскости П и A, B — две какие-либо ее точки. Пусть после преобразования A и B переходят в точки A' и B' плоскости П' и пусть Δ' обозначает прямую, проходящую через A', B'. Докажем, что любая точка C прямой Δ перейдет в некоторую точку прямой Δ'. В самом деле, имеем $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, где k — некоторое число. После преобразования будем иметь $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$, т. е. точка C', соответствующая точке C, расположена на одной прямой с A' и B', а это и требовалось доказать.

Из предыдущего непосредственно вытекает, что параллельные прямые остаются параллельными (ибо остаются параллельными любые векторы, взятые на них) и что отношения параллельных отрезков остаются неизменными.

Отметим, что отношения непараллельных отрезков, вообще говоря, изменяются.

Замечание. Отсюда вытекает еще одно важное следствие. Прежде всего ясно, что векторное равенство $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n$ переходит после преобразования в равенство $\mathbf{P}' = \mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2 + \ldots + \mathbf{P}'_n$, где штрихами отмечены векторы, полученные из данных аффинным преобразованием. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть многоугольник векторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ с замыкающей $\mathbf{P}$; после преобразования этот многоугольник обращается в многоугольник векторов $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2, \ldots, \mathbf{P}'_n$ с замыкающей $\mathbf{P}'$.

Из этого на основании предыдущего следует еще, что векторное равенство вида

$$\mathbf{P} = k_1\mathbf{P}_1 + \ldots + k_n\mathbf{P}_n \text{ переходит в } \mathbf{P}' = k_1\mathbf{P}'_1 + \ldots + k_n\mathbf{P}'_n, \quad (5)$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — одни и те же в обоих равенствах.

Рассмотрим, в частности, фигуру, состоящую из точки O и непараллельных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, определяющую систему декартовых координат на плоскости П; координаты x, y любой точки M плоскости П относительно этой системы определяются равенством

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x + \mathbf{v}y. \quad (6)$$

Подвергнем теперь плоскость П какому-нибудь аффинному преобразованию. Тогда предыдущее равенство перейдет в следующее:

$$\overrightarrow{O'M'} = \mathbf{u}'x + \mathbf{v}'y,$$

показывающее, что *если подвергнуть элементы O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, определяющие координатную систему, тому же аффинному преобразованию, что и всю плоскость, то координаты преобразованных точек относительно преобразованной системы будут точно такими же, как координаты непреобразованных точек относительно первоначальной системы.*

Благодаря этому свойству (обобщенные) декартовы координаты и называются также *аффинными*.

4°. *Аффинное преобразование плоскости вполне определяется заданием трех неколлинеарных точек, в которые должны перейти три заданные неколлинеарные точки.* Пусть, в самом деле, A, B, C — три заданные неколлинеарные точки на П и пусть A', B', C' — три заданные неколлинеарные точки, в которые должны соответственно перейти точки A, B, C. Точки A, B, C определяют на плоскости П систему координат с началом A и координатными

векторами $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Этой системе на плоскости Π' соответствует система с началом в A' и координатными векторами $\mathbf{u}' = \overrightarrow{A'B'}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{A'C'}$. Этим вполне определяется аффинное соответствие между Π и Π'; а именно, точке M с координатами x, y относительно первой из упомянутых систем соответствует точка M' с такими же координатами относительно второй из систем (см. предыдущее замечание). Таким образом, если через x, y будем вообще обозначать координаты точек плоскости Π относительно первой системы, а через x', y' — координаты точек плоскости Π' относительно второй, то для соответствующих точек этих плоскостей будем иметь

$$x' = x, \quad y' = y \tag{7}$$

(простейший вид линейной подстановки).

Отметим, наконец, следующее свойство аффинного преобразования плоскости.

8°. *Отношение площади преобразованной фигуры к площади первоначальной — одно и то же для всех фигур* (имеющих, разумеется, площадь). Достаточно доказать это предложение для случая, когда рассматриваемые фигуры — параллелограммы, ибо площадь всякой фигуры можно рассматривать как предел суммы площадей параллелограммов.

Будем считать, что плоскости Π и Π' наложены друг на друга и что точки, как до преобразования, так и после него, относятся к одной и той же системе координат Oxy.

Итак, пусть S — площадь параллелограмма плоскости Π, построенного на векторах $\mathbf{P} = (X_1, Y_1)$ и $Q = (X_2, Y_2)$. Имеем (§ 67)

$$S = S_0 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

где S_0 — площадь параллелограмма, построенного на координатных векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ осей Ox, Oy. После преобразования эта площадь превращается в

$$S' = S_0 \begin{vmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2' & Y_2' \end{vmatrix}.$$

Подставляя в правую часть вместо X_1', Y_1', X_2', Y_2' их значения, получаемые на основании (1а), находим:

$$S' = S_0 \begin{vmatrix} l_1X_1 + l_2Y_1 & m_1X_1 + m_2Y_1 \\ l_1X_2 + l_2Y_2 & m_1X_2 + m_2Y_2 \end{vmatrix} = S_0 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix},$$

откуда следует

$$S' = S \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

т. е. отношение $\dfrac{S'}{S}$ не зависит от выбора параллелограмма, а это и требовалось доказать.

Совершенно аналогично определяется аффинное преобразование в пространстве трех измерений: в этом случае вместо (1) имеем формулы

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x + l_2y + l_3z + a, \\ y' &= m_1x + m_2y + m_3z + b, \\ z' &= n_1x + n_2y + n_3z + c. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Если последняя подстановка неособенная, то и аффинное преобразование называется неособенным; в противном случае оно будет особенным или выродившимся. В дальнейшем, если противное не оговорено, мы будем считать преобразование неособенным.

Свойства 1° — 3°, перечисленные для случая двух измерений, остаются в силе и здесь. Доказательства — буквально те же. Кроме свойства 3°, мы имеем теперь еще следующее: при аффинном преобразовании *плоскости переходят в плоскости, и параллельные плоскости остаются параллельными*. Это — непосредственное следствие свойства 3°. Далее, вместо свойства 4° имеем теперь: *аффинное преобразование пространства вполне определяется заданием четырех некомпланарных точек*, в которые должны перейти четыре заданные некомпланарные точки.

Наконец, вместо свойства 5° мы имеем теперь следующее: отношение объема преобразованной фигуры к объему первоначальной одно и то же для всех фигур (имеющих объем), а именно, имеет место равенство

$$V' = V \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству свойства 5°. Само свойство 5°, как легко видеть, *остается в силе для фигур, расположенных в одной и той же плоскости или в параллельных плоскостях*.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что если между точками плоскостей П и П′ установлено обратимо-однозначное соответствие такое, что каждому вектору $\mathbf{P}$ соответствует вектор $\mathbf{P}'$ и каждому векторному равенству $\mathbf{P} = k_1\mathbf{P}_1 + k_2\mathbf{P}_2$ — равенство $\mathbf{P}' = k_1\mathbf{P}_1' + k_2\mathbf{P}_2'$, то соответствие между П и П′ — аффинное.

Доказательство. Если на П взять систему координат с началом O и координатными векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, а на П′ — систему с началом O' и координатными векторами $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, где штрихами отмечены элементы, соответствующие элементам без штрихов, то координаты соответствующих точек M и M' будут связаны простейшими линейными соотношениями

$$x' = x, \quad y' = y;$$

следовательно, преобразование аффинное.

2. Доказать, что если фигуру S, расположенную на плоскости П, спроектировать на другую плоскость П′ параллельно некоторой прямой (не парал-

лельной ни П, ни П′), то полученная фигура S' связана с S аффинным преобразованием.

Доказательство непосредственно вытекает из предыдущего упражнения.

3. Можно доказать, что если мы имеем преобразование плоскости, удовлетворяющее следующим условиям:

1° каждой точке M соответствует определенная точка M', и обратно;

2° точкам на конечном расстоянии соответствуют точки на конечном расстоянии;

3° каждой прямой соответствует прямая,

то тогда преобразование аффинное.

Это предложение остается справедливым и для пространства. В этом случае последнее требование можно заменить требованием, что каждой плоскости соответствует плоскость.

§ 77. Подобные преобразования и движения как частные случаи аффинного преобразования

Движения, рассмотренные в § 75, представляют собою, очевидно, частный случай аффинных преобразований; они характеризуются тем, что, в прямоугольной системе координат, таблица коэффициентов при переменных в формулах (9) предыдущего параграфа

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{matrix}$$

есть таблица ортогональной подстановки (аналогично для случая двух измерений).

Другим важным частным случаем аффинного преобразования является подобное преобразование, о котором мы скажем несколько слов.

Начнём с некоторых понятий, относящихся в сущности к области элементарной геометрии.

Две фигуры S и S' (на плоскости или в пространстве) называются *гомотетичными* относительно точки C, если каждой точке M фигуры S можно привести в соответствие некоторую точку M' фигуры S', и обратно, каждой точке M' фигуры S' — некоторую точку M фигуры S, так, чтобы имело место соотношение

$$\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}, \tag{1}$$

где k — постоянное число, называемое «отношением подобия».

Точка C называется *центром гомотетии* или *центром подобия* (черт. 78).

Гомотетия называется прямой, если $k > 0$, *обратной, если* $k < 0$.

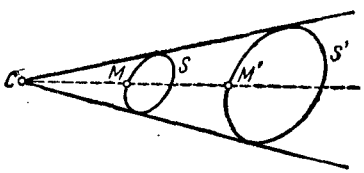
Две фигуры называются *подобными*, если путем надлежащего движения (собственного или несобственного) одной из них их

можно сделать гомотетичными. Подобие будет прямым или обратным в зависимости от знака k.

Гомотетичные фигуры называются также *подобными и подобно расположенными*, *если* $k > 0$, или *подобными и обратно расположенными*, если $k < 0$.

Заметим, что иногда точки двух гомотетичных фигур могут быть приведены в соответствие различным образом, так что может одновременно существовать несколько центров подобия; далее, две данные фигуры в данном положении могут быть одновременно гомотетичными прямым и обратным образом.

Если известно, что две данные фигуры гомотетичны, и если даны две точки M_1, M_2 одной фигуры, соответствующие двум данным точкам M_1' и M_2' другой фигуры, то для построения центра гомотетии достаточно соединить прямыми соответствующие точки. Пересечение прямых M_1M_1' и M_2M_2' и будет искомым центром гомотетии.



Черт. 78

В частном случае, когда $k = 1$, фигуры S и S' попросту совпадают, как это следует из формулы (1). В этом случае центром подобия может, очевидно, служить любая точка пространства, а не только O.

Условимся теперь в некоторых терминах. Пусть какая-либо точка перемещена из положения M в положение M'; вектор $\overrightarrow{MM'}$ мы будем называть *вектором смещения*. Если каждую точку какой-нибудь фигуры переместить так, чтобы векторы смещения различных точек были равны между собою, то получим, очевидно, фигуру, конгруэнтную первоначальной, но в другом положении. О втором положении говорят, что оно получено из первоначального путем *поступательного смещения*.

Если одна из двух фигур S, S' получена из другой путем поступательного смещения, то говорят, что эти конгруэнтные фигуры *подобно расположены*. Прямые, соединяющие соответствующие точки этих фигур, очевидно, параллельны, т. е., как принято говорить, пересекаются в бесконечно удаленной точке. Поэтому конгруэнтные и подобно расположенные фигуры можно рассматривать как гомотетичные, с бесконечно удаленным центром гомотетии.

Вернемся к общему случаю произвольного k и докажем, что если одну из двух гомотетичных фигур поступательно сместить, то и при новом положении наши фигуры будут гомотетичны, если считать соответствующими друг другу те же точки фигур (в новом положении); центр гомотетии, однако, переместится вполне определенным образом.

Действительно, пусть фигура S' получила поступательное смещение и пусть $\mathbf{U}$ есть вектор смещения каждой из ее точек. Новое положение M_1' точки фигуры S', занимавшей первоначально положение M', определится формулой

$$\overrightarrow{CM_1'} = \overrightarrow{CM'} + \mathbf{U}.$$

Подставляя сюда значение $\overrightarrow{CM'}$ из (1), получим

$$\overrightarrow{CM_1'} = k\overrightarrow{CM} + \mathbf{U}. \tag{2}$$

Покажем, что это соотношение между точками M и M_1' может быть представлено в виде

$$\overrightarrow{C'M_1'} = k\overrightarrow{C'M}, \tag{3}$$

где C' — некоторая точка (новый центр гомотетии).

Действительно, пусть C' — какая-нибудь точка. Тогда имеем

$$\overrightarrow{CM_1'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M_1'}, \qquad \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M};$$

подставляя эти выражения в (2), получим

$$\overrightarrow{C'M_1'} = k\overrightarrow{C'M} + (k-1)\overrightarrow{CC'} + \mathbf{U}.$$

Для того чтобы это соотношение совпало с (3), необходимо и достаточно подобрать C' согласно условию

$$(k-1)\overrightarrow{CC'} + \mathbf{U} = 0. \tag{4}$$

Если $k \neq 1$, получим

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{U}{1-k}; \tag{5}$$

эта формула определяет положение C'. Если $k = 1$, то условию (4) нельзя удовлетворить. Это и понятно, так как при $k = 1$ фигуры S и S' в первоначальном положении совпадают. При поступательном смещении одной из них они делаются конгруэнтными и подобно расположенными. Выше мы условились говорить, что в этом случае центр подобия удален в бесконечность. Естественность этого способа выражения очевидна также на основании формулы (5), которая показывает, что при k, стремящемся к 1, точка C' уходит в бесконечность.

Из сказанного следует также, что если две фигуры подобны, то их всегда можно поместить таким образом, чтобы центром гомотетии служила любая точка C', занимающая любое, наперед заданное положение относительно одной из них. Действительно, из самого определения подобия вытекает, что данные фигуры могут быть расположены так, чтобы они были гомотетичны относительно

некоторого центра C. Если C' — какая-либо другая заданная точка, то, подобрав вектор $\mathbf{U}$ согласно формуле (5), т. е. положив

$$\mathbf{U} = (1-k)\overrightarrow{CC'}, \tag{6}$$

и поступательно переместив фигуру S', сообщив каждой точке ее смещение, характеризуемое вектором $\mathbf{U}$, получим требуемое положение фигур [1]).

Преобразование (1), при помощи которого из данной фигуры получается фигура, ей гомотетичная, называется гомотетическим преобразованием или *гомотетией*. Покажем, что это — частный случай аффинного преобразования. Действительно, взяв какую-либо систему декартовых координат и обозначив через (a, b, c), (x, y, z), (x', y', z') координаты точек C, M, M', будем иметь на основании (1)

$$x'-a = k(x-a), \quad y'-b = k(y-b), \quad z'-c = k(z-c), \tag{1a}$$

или

$$x' = kx + a_0, \quad y' = ky + b_0, \quad z' = kz + c_0 \tag{1b}$$

(a_0, b_0, c_0 — постоянные) что представляет собою частный случай аффинного преобразования. Если присоединить к гомотетии произвольное движение (собственное или несобственное), мы получим опять частный вид аффинного преобразования, называемый *подобным преобразованием*, ибо при этом каждая фигура преобразуется в подобную.

В прямоугольных координатах движения и подобные преобразования можно еще характеризовать следующим образом: аффинное преобразование (мы пишем формулы преобразования для векторов) [2])

$$\left.\begin{aligned} X' &= l_1X + l_2Y + l_3Z, \\ Y' &= m_1X + m_2Y + m_3Z, \\ Z' &= n_1X + n_2Y + n_3Z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

есть движение, если для всякого вектора

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \tag{8}$$

Преобразование (7) — подобное, если для всякого вектора

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = k^2(X^2 + Y^2 + Z^2), \tag{9}$$

где k — постоянное отношение подобия (при $k^2 = 1$ имеем, как частный случай, движение).

---

[1]) В случае конгруэнтных фигур достаточно их попросту наложить друг на друга. Тогда всякая точка C' будет центром гомотетии.

[2]) Из этих формул получаются формулы преобразования для точек, если к правым частям прибавить свободные члены.

Первое очевидно, так как условие (8) характеризует, как мы знаем, ортогональную подстановку и, значит, при условии (8), преобразование (7) есть движение.

Второе следует из того, что всякое подобное преобразование есть результат гомотетии и движения. При гомотетии имеем, на основании (1), следующие формулы преобразования для координат вектора:

$$X' = kX, \quad Y' = kY, \quad Z' = kZ,$$

откуда следует (9); так как, далее, при движении выражение $X'^2 + Y'^2 + Z'^2$ остается неизменным, то (9) остается в силе. Легко видеть, что и обратно, из условия (9) следует, что соответствующее преобразование подобное. Мы предоставляем доказать это читателю.

§ 78. О группах точечных преобразований. О классификации геометрических дисциплин

Рассмотренные в предыдущих параграфах преобразования представляют собою частные случаи *точечных преобразований* общего вида, состоящих в том, что каждой точке $M(x, y, z)$ пространства приводится в соответствие вполне определенная точка $M'(x', y', z')$, так что x', y', z' являются вполне определенными функциями от x, y, z:

$$x' = \varphi_1(x, y, z), \quad y' = \varphi_2(x, y, z), \quad z' = \varphi_3(x, y, z). \tag{1}$$

Если, в частности, φ_1, φ_2, φ_3 — линейные функции от x, y, z, то мы получаем рассмотренное выше аффинное преобразование.

Во всем дальнейшем мы будем считать, что соотношения (1) однозначно-обратимы, т. е. что их можно решить однозначным образом относительно x, y, z:

$$x = \psi_1(x', y', z'), \quad y = \psi_2(x', y', z'), \quad z = \psi_3(x', y', z'). \tag{1a}$$

Преобразование (1a) называется обратным преобразованию (1).

Фундаментальную роль в современной геометрии играет понятие *группы преобразований*. Пусть дана некоторая совокупность преобразований [1]) (содержащая конечное или бесчисленное множество преобразований). Говорят, что эта совокупность преобразований составляет *группу*, если:

1° последовательность двух преобразований, принадлежащих совокупности, дает преобразование, также принадлежащее этой совокупности;

2° преобразования, обратные преобразованиям, входящим в эту совокупность, также входят в нее.

---

[1]) Мы пока ограничиваемся точечными преобразованиями.

Если некоторая часть преобразований, принадлежащих данной группе, также, в свою очередь, составляет группу, то эта последняя называется *подгруппой* предыдущей.

Например, совокупность всех *аффинных преобразований* пространства составляет группу, ибо последовательность двух аффинных преобразований есть опять аффинное преобразование, и обратное аффинному — также аффинное.

Совокупность всех *подобных преобразований* составляет, очевидно, также группу, которая является подгруппой группы аффинных преобразований.

Далее, совокупность всех *движений* представляет группу, являющуюся подгруппой группы подобных преобразований.

Из группы движений можно выделить, например, еще подгруппу собственных движений.

Наоборот, совокупность несобственных движений не есть уже группа, так как последовательность двух несобственных движений приводит к собственному движению.

Аффинные преобразования составляют, в свою очередь, подгруппу группы *проективных преобразований*, с которой мы познакомимся в главе VI.

Ф. Клейну принадлежит чрезвычайно плодотворная идея, изложенная им в его знаменитой «Эрлангенской программе» (1872), положить понятие группы преобразований в основу классификации геометрических дисциплин; мы ограничимся здесь самыми элементарными сведениями, касающимися этого круга вопросов [1]). Оставаясь в области понятий элементарной геометрии, можно сказать, что геометрия изучает те свойства фигур, которые не зависят от их положения в пространстве и от их абсолютных размеров. В соответствии с этим под «геометрическими свойствами» фигур и под «геометрическими величинами» понимают такие свойства и величины, которые остаются неизменными при всех возможных движениях и гомотетических преобразованиях. Совокупность таких преобразований составляет группу подобных преобразований, которую Клейн называет *основной* или *метрической*. Совокупность свойств, остающихся неизменными (или *инвариантными*) при преобразованиях основной группы, и составляет, по Клейну, предмет элементарной (или *метрической*) геометрии. К числу свойств или величин, остающихся неизменными при преобразованиях основной группы, относятся, например, свойство линии быть прямой, параллельность двух прямых, отношение длин двух отрезков (произвольно расположенных), угол между двумя прямыми и пр. Эти свойства и величины рассматриваются поэтому как «геометрические» с точки зрения элементарной (или *метрической*) геометрии.

---

[1]) Более подробное изложение см., например, в книге Ф. Клейна, Элементарная математика с точки зрения высшей, том второй, М.—Л., 1934.

Но есть ряд свойств, которые остаются неизменными (инвариантными) и при более общих преобразованиях. Например, свойство линии быть прямой, параллельность двух прямых, отношение двух параллельных отрезков, середина данного отрезка и т. д. остаются неизменными при аффинных преобразованиях общего вида. Совокупность таких свойств может быть выделена как отдельная геометрическая дисциплина — аффинная геометрия.

Аналогичным образом может быть выделена дисциплина, называемая проективной геометрией (совокупность свойств, остающихся неизменными при проективных преобразованиях, о которых будет сказано в главе VI).

Вообще всякой группе преобразований пространства соответствует определенная геометрическая дисциплина, изучающая совокупность свойств, инвариантных по отношению к преобразованиям данной группы.

Одной из самых общих геометрических дисциплин является топология, изучающая совокупность свойств, остающихся неизменными при всевозможных непрерывных преобразованиях (к топологическим свойствам принадлежит, например, свойство линии быть замкнутой; с точки зрения топологии нет никакой разницы, например, между окружностью и любой другой замкнутой кривой, которую можно получить из окружности непрерывной деформацией).

Возвращаясь к аффинным преобразованиям, заметим, что уже в предыдущей главе мы выделили в особый отдел (отдел II) формулы, относящиеся к аффинным свойствам, т. е. таким, которые остаются неизменными при преобразованиях аффинной группы. Теперь понятно, почему такие формулы не изменяют своего вида при переходе от прямоугольных координат к любым декартовым. Действительно, пусть данная формула выражает некоторое аффинное свойство фигуры в какой-либо, произвольно выбранной, системе прямоугольных координат. Формула эта, по условию, не изменит своего вида, если произвести аффинное преобразование, т. е. произвести над координатами точек фигуры произвольную (неособенную) линейную подстановку. Значит, она не изменит своего вида и при переходе от прямоугольной системы к любой системе декартовых координат, ибо формулы перехода к новой системе выражаются линейными подстановками такого же вида.

Формулы, которые в предыдущей главе выделены под названием «метрических» (отделы III и IV предыдущей главы), относятся к метрическим свойствам в узком смысле слова, т. е. к свойствам, инвариантным по отношению к движению (без гомотетии); некоторые же из упомянутых формул остаются неизменными только по отношению к собственным движениям (например, формула для объема параллелепипеда в случае, если объему приписывать знак).