ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ОБ УРАВНЕНИИ ПЛОСКОЙ ЛИНИИ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе мы ограничимся рассмотрением линий, расположенных на одной и той же плоскости (плоских линий).

Одним из основных вопросов аналитической геометрии (на плоскости) является вопрос об аналитическом представлении линий при помощи уравнений, связывающих их координаты. Несмотря на то, что вопросы, касающиеся *кривых* линий, отнесены к дальнейшим главам курса, изучению прямых линий мы предпосылаем изложение основных понятий об уравнении линий вообще (§ 79—87). Ознакомление с этими понятиями необходимо для отчетливого усвоения дальнейшего.

I. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 79. Уравнение линии

В элементарной геометрии обычно изучается только одна кривая линия — окружность.

Нам предстоит теперь дать общее определение понятия линии. Пусть

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть некоторое уравнение, связывающее две переменные величины x и y. Это уравнение определяет, вообще говоря, одну из этих величин, например y, как функцию другой, например x; иными словами, разрешая уравнение (1) относительно y, получим

$$y = f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ обозначает некоторую функцию от x; функция эта, конечно, может быть многозначной или однозначной. Мы будем предполагать в дальнейшем, что все значения этой функции непрерывно изменяются с изменением x.

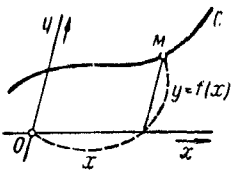
Начнем с рассмотрения случая, когда $f(x)$ — однозначная функция по крайней мере в некотором промежутке изменения x.

Возьмем какую-нибудь систему декартовых координат Oxy и будем рассматривать переменные x и y как координаты некоторой точки M на плоскости Oxy. Каждому значению x в рас-

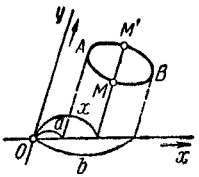
сматриваемом промежутке уравнение (2) приводит в соответствие одно вполне определенное значение y (черт. 79) [1]).

Следовательно, каждому значению x соответствует одна вполне определенная точка M на плоскости, имеющая координатами x и $y = f(x)$.

Если теперь x станет пробегать непрерывный ряд значений, то соответствующая точка M станет непрерывно перемещаться по плоскости Oxy, описывая некоторое геометрическое место C; это геометрическое место называется *линией*.



Черт. 79



Черт. 80

Мы предположили функцию $f(x)$ однозначной, но это ограничение несущественно. Действительно, если функция $f(x)$ многозначна, то каждому значению x будет соответствовать не одно, а несколько значений $y = f(x)$, т. е. несколько точек M, M', M'', ... на плоскости. При изменении x каждая из этих точек опишет некоторое геометрическое место; каждое из этих геометрических мест (а также их совокупность) представляет собою то, что мы называем линией. Так, на черт. 80 каждому значению x в промежутке $a < x < b$ соответствуют две точки. Когда x изменяется в указанном промежутке, эти точки описывают соответственно дуги AMB и $AM'B$; совокупность их представляет замкнутую линию. Значениям x вне указанного промежутка не соответствуют никакие точки.

З а м е ч а н и е. Точки M, M', M'', . . ., соответствующие одному и тому же значению x, могут описать и не связанные между собою линии; совокупность этих линий все-таки называется линией, представляемой уравнением (2).

Резюмируем теперь сказанное.

Линия (на плоскости), по нашему определению, *представляет собою геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению с двумя переменными вида* (2) *или, что все равно, вида* (1).

[1]) Здесь и в дальнейшем на чертежах, относящихся к системам декартовых координат, буквы, поставленные против отрезков, параллельных осям, обозначают отношения их длин или алгебраических значений к длинам соответствующих координатных векторов; в случае необобщенных координат эти буквы обозначают длины или алгебраические значения соответствующих отрезков.

Уравнение (1), или (2), определяющее линию, называется *уравнением* этой *линии*.

По самому определению линии, уравнение (2), или, что все равно, уравнение (1), удовлетворяется тогда и только тогда, когда x и y представляют собою координаты некоторой точки данной линии. Итак, *уравнением данной линии* (на плоскости) *называется уравнение с двумя переменными вида* (1), *которое удовлетворяется тогда и только тогда, если на место переменных x и y подставить координаты какой-либо точки этой линии.*

Короче, *уравнение данной линии есть соотношение, связывающее координаты точек, расположенных на данной линии* (*и только этих точек*).

Для сокращения речи мы будем в дальнейшем часто называть линию, представляемую уравнением $\Phi(x, y) = 0$, просто «линией $\Phi(x, y) = 0$».

Часто вместо слова «линия» применяют слово «кривая», что будем делать и мы.

З а м е ч а н и е. Необходимо отметить, что данное нами определение линии — слишком общее. Оно охватывает и такие геометрические образы, которые очень разнятся от того, что́ мы привыкли называть линией.

Для того чтобы приблизить (более или менее) данное выше определение линии к тому интуитивному представлению о ней, которое у нас имеется, следует наложить на функции $\Phi(x, y)$ или $f(x)$ в уравнениях (1) или (2) некоторые ограничения (непрерывность, дифференцируемость до известного порядка и пр.). См. об этом в курсах дифференциальной геометрии и анализа.

§ 80. Примеры: уравнения прямой линии и окружности

Для пояснения сказанного в предыдущем параграфе мы составим уравнения двух простейших линий — прямой и окружности [1]). Читателю усиленно рекомендуется внимательно проделать все упражнения, приведенные в конце этого параграфа, не смущаясь их чрезвычайной простотой; эти примеры облегчают усвоение общих предложений, выводимых в дальнейшем.

Во всем этом параграфе *координаты* для простоты *предполагаются прямоугольными*.

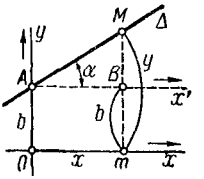
1. **Уравнение прямой** [2]). Пусть Δ есть прямая на плоскости Oxy, не параллельная оси Oy (черт. 81). Положение прямой

---

[1]) Этим самым будет показано, что прямая и окружность подходят под общее определение линий, данное в предыдущем параграфе.

[2]) Уравнение прямой будет выведено в дальнейшем еще иным путем; здесь это уравнение выводится в качестве примера для пояснения сказанного в предыдущем параграфе.

вполне определено, если известны ордината [1]) $b = OA$ точки пересечения прямой с осью Oy и угол α, который прямая составляет с осью Ox. Этот угол отсчитывается в положительном направлении от Ox или, что все равно, от вспомогательной оси Ax', одинаково направленной с осью Ox.



Черт. 81

Пусть $M(x, y)$ есть любая точка прямой Δ. Имеем, очевидно, $BM = AB \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (обозначения указаны на чертеже). Здесь под BM и AB мы подразумеваем алгебраические значения векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно по направлениям осей Oy и Ox. Читатель легко убедится, что предыдущая формула справедлива и в смысле знаков.

Имеем, далее, $BM = y - b$, $AB = x$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, получим

$$y - b = \operatorname{tg} \alpha \cdot x,$$

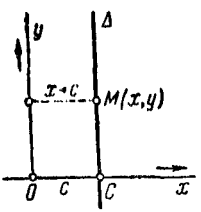
или

$$y = ax + b, \tag{1}$$

где для краткости введено обозначение

$$\operatorname{tg} \alpha = a. \tag{2}$$

Уравнению (1) удовлетворяют координаты всякой точки нашей прямой, и легко убедиться, что, обратно, всякая точка, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, непременно находится на этой прямой. Следовательно, (1) есть уравнение прямой Δ. Напомним, что в этом уравнении a и b обозначают постоянные величины ($a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = OA$).



Черт. 82

Величина a называется *угловым коэффициентом*, так как она зависит от угла прямой Δ с осью Ox, а величиной b — *начальной ординатой*, т. е. ординатой, соответствующей нулевому значению абсциссы.

Рассмотрим теперь исключенный нами выше частный случай, когда прямая Δ параллельна оси Oy (черт. 82). В этом случае положение прямой вполне определяется абсциссой $c = OC$ точки C пересечения прямой с осью Ox. Ясно, что координаты всех точек $M(x, y)$ прямой (и только этих точек) удовлетворяют соотношению

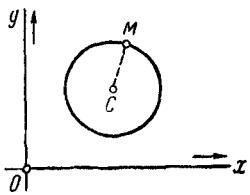
$$x = c. \tag{3}$$

---

[1]) Под OA надо, конечно, подразумевать алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{OA}$ по оси Oy.

Это соотношение и представляет собою уравнение прямой Δ; то обстоятельство, что вторая координата (y) не входит в это уравнение, никакого значения не имеет.

Возвращаясь теперь к общему случаю, заметим, что если дано уравнение прямой, то ее очень легко построить. Для этого достаточно найти две какие-либо ее точки. Чтобы найти две такие точки, достаточно придать переменной x в уравнении (1) два различных частных значения x_1, x_2 и вычислить по формуле (1) соответствующие значения переменной y. Пусть эти значения будут y_1, y_2. Тогда точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будут точками, расположенными на нашей прямой (см. упражнения в конце параграфа).



Черт. 83

2. **Уравнение окружности.** Составим теперь уравнение окружности в предположении что даны ее центр $C(a, b)$ и радиус r (черт. 83).

Окружность, по определению, есть геометрическое место точек, расстояние которых до точки $C(a, b)$ равно постоянной величине r.

Пусть $M(x, y)$ — любая точка на плоскости. Расстояние ее до C равно

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Для того чтобы точка M находилась на окружности, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

или, по уничтожении радикала,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{4}$$

Это уравнение и представляет уравнение данной окружности. Действительно, из самого вывода ясно, что оно удовлетворяется тогда и только тогда, когда x и y представляют собою координаты какой-либо точки на окружности.

Уравнение окружности с центром в начале координат имеет более простой вид:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{5}$$

Замечание. Уравнение вида

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0, \tag{6}$$

где A и B — постоянные, можно переписать так:

$$(x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C.$$

Если $A^2+B^2-C>0$, то можно положить $A^2+B^2-C=r^2$; тогда, очевидно, (6) представляет собою уравнение окружности с центром в точке $(-A, -B)$ и с радиусом $r=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

Итак, уравнение вида (6) при соблюдении неравенства

$$A^2+B^2-C>0$$

представляет уравнение окружности (в прямоугольных координатах). Ясно, что и, обратно, уравнение любой окружности, т. е. уравнение (4), по раскрытии скобок и перенесении r^2 в левую часть принимает вид (6).

Уравнение несколько более общего вида, чем (6):

$$A_0(x^2+y^2)+2Ax+2By+C=0, \qquad (6a)$$

где $A_0 \neq 0$, всегда можно привести к виду (6), разделив обе части на A_0. Поэтому и уравнение (6a) представляет окружность, если соблюдено некоторое неравенство, написать которое предоставляем читателю.

Упражнения

1. Дано уравнение прямой $y=2x-3$. Найти точки M_1, M_2, M_3, M_4 этой прямой, абсциссы которых равны соответственно $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=2$.

Ответ. Ординаты этих точек будут соответственно:

$$y_1=-3, \quad y_2=-1, \quad y_3=-5, \quad y_4=1.$$

2. Построить (пользуясь, например, миллиметровой бумагой) точки M_1, M_2, M_3, M_4 предыдущего упражнения и проверить, наложив линейку, что эти точки расположены на одной прямой.

3. Построить прямую, уравнение которой есть $y=-2x+4$.

Решение. Полагая, например, $x=0$, получим $y=4$, полагая $x=1$, получим $y=2$. Чтобы произвести построение, достаточно построить точки (0, 4) и (1, 2) и соединить их прямой.

4. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Ox в точке, абсцисса которой равна -2.

Ответ. $x=-2$.

5. Написать уравнения осей Ox и Oy.

Ответ. Уравнение оси Oy есть $x=0$. Уравнение оси Ox есть $y=0$.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и делящей пополам угол между положительными направлениями осей Ox и Oy.

Ответ. $x=y$, или $x-y=0$.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (0, 3) и составляющей с осью Ox угол в 60°.

Ответ. $y=x\sqrt{3}+3$.

8. Уравнение прямой есть $y=3x-1$. Найти угол α, который она составляет с осью Ox.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha=3$.

9. Уравнение прямой есть $y=-3x+6$. Найти точку ее пересечения с осью Ox.

Решение. Координаты $(x, 0)$ искомой точки должны удовлетворять указанному уравнению. Следовательно, абсцисса ее должна удовлетворять уравнению

$$0=-3x+6,$$

откуда

$$x=2.$$

Проверить полученный результат, построив рассматриваемую прямую на миллиметровой бумаге.

10. Написать уравнение окружности с центром в точке $(-1, 2)$ и радиусом, равным 5.

Ответ. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, или $x^2+y^2+2x-4y=20$.

11. Показать, что уравнение $x^2+y^2+2x+2y=14$ есть уравнение окружности; найти центр и радиус окружности.

Решение. Указанное уравнение можно переписать, очевидно, так:

$$(x+1)^2+(y+1)^2=16.$$

Следовательно, центр находится в точке $(-1, -1)$ а радиус равен 4.

12. Найти точку M пересечения прямых, уравнения которых таковы:

$$y=2x-1 \text{ и } y=3x-2.$$

Решение. Координаты (x, y) точки пересечения должны удовлетворять обоим указанным уравнениям, так как точка M находится как на одной, так и на другой прямой. Поэтому мы получим искомую точку, решив систему уравнений

$$y=2x-1,$$
$$y=3x-2.$$

Это решение дает $x=1$, $y=1$. Значит, точка пересечения есть точка $M(1, 1)$.

Проверить полученный результат графически, построив на миллиметровой бумаге рассматриваемые прямые.

13. Найти точки пересечения окружности, уравнение которой есть $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, и прямой, уравнение которой есть $y=2x$.

Решение. Координаты искомых точек удовлетворяют обоим указанным уравнениям (см. предыдущее упражнение). Решая совместно эти два уравнения, найдем два решения:

$$x_1=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}, \quad y_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{5}$$

и

$$x_2=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}, \quad y_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{5}.$$

Точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будут искомыми точками пересечения.

§ 81. Параметрическое представление линии

Вместо того чтобы для аналитического представления линии пользоваться уравнением вида

$$\Phi(x, y)=0, \tag{1}$$

часто бывает удобно выражать переменные координаты точек линии при помощи третьей вспомогательной переменной, или *параметра* t:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются обыкновенно непрерывными функциями t.

Исключение t из двух последних уравнений приводит к одному уравнению вида (1), т. е. к обычному виду уравнения линии.

Приведенный выше метод представления кривой при помощи уравнения

$$y=f(x)$$

есть частный случай параметрического представления; действительно, стоит только положить $x = t$, чтобы последнее уравнение свелось к совокупности двух уравнений:

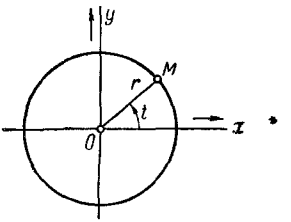
$$x = t, \quad y = f(t),$$

т. е. к уравнениям вида (2).

Параметрическое представление линии напрашивается само собой, если ее рассматривать как путь, описываемый точкой, непрерывно движущейся по определенному закону. Если в этом случае мы обозначим через t время, протекшее от произвольно выбранного начального момента, то x и y (координаты движущейся точки) будут определенными непрерывными функциями t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

ибо раз закон движения известен, каждому моменту времени t соответствует вполне определенное положение точки, или, что все равно, вполне определенные значения координат x и y.



Черт. 84

Возьмем для примера окружность[1]) радиуса r с центром в начале координат O. Пусть $M(x, y)$ — любая точка окружности. Будем считать координаты прямоугольными. Обозначим через t угол, составляемый радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, предполагая, что этот угол отсчитывается от Ox в положительном направлении. Легко видеть, что (черт. 84)

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Это и есть искомое параметрическое представление окружности.

Для того чтобы перейти от параметрического представления к уравнению окружности, достаточно исключить t из предыдущих уравнений. Возводя их с этой целью в квадрат и складывая, получим

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

мы пришли, как и следовало ожидать, к уравнению (5) предыдущего параграфа.

§ 82. Уравнение линии в различных системах координат

Вид уравнения линии зависит, конечно, не только от вида самой линии, но и от выбора системы координат. Если вместо одной системы координат взять другую, то уравнение данной линии изменится определенным образом.

---

[1]) Параметрическое представление прямой будет выведено ниже.

Пусть

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение данной линии, отнесенной к определенной системе Oxy декартовых координат. Пусть, далее, взята какая-либо другая система $O'x'y'$ декартовых координат. Координаты (x, y), (x', y') одной и той же точки относительно этих двух систем связаны соотношениями вида (§ 66):

$$x = a + l_1x' + l_2y', \quad y = b + m_1x' + m_2y'; \tag{2}$$

подставляя эти выражения в (1), получим уравнение вида

$$\Phi_1(x', y') = 0, \tag{3}$$

где для краткости введено обозначение [1])

$$\Phi(a + l_1x' + l_2y', b + m_1x' + m_2y') \equiv \Phi_1(x', y'). \tag{4}$$

Уравнение (3) представляет собою уравнение данной линии, отнесенной к новой системе осей $O'x'y'$.

До сих пор для аналитического представления линий мы пользовались системой декартовых координат. Однако с таким же успехом можно было бы воспользоваться любой другой системой. Какую бы систему мы ни положили в основу, всегда возможно составить уравнение данной линии, т. е. уравнение с двумя переменными, которое удовлетворяется тогда и только тогда, если на место переменных подставить координаты какой-либо точки данной линии.

Если (1) есть уравнение данной линии относительно системы декартовых координат, то, чтобы перейти от этого уравнения к уравнению той же линии относительно любой другой системы, достаточно на место x и y подставить их выражения через новые координаты.

Пусть, например, уравнение

$$\Phi(x, y) = 0$$

есть уравнение данной линии относительно декартовой прямоугольной системы координат.

Полагая (см. § 60)

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

мы преобразуем предыдущее уравнение в следующее:

$$\Phi_1(\rho, \varphi) = 0, \tag{5}$$

---

[1]) Знак $\equiv$ обозначает тождественное равенство, т. е. равенство, имеющее место при всех значениях переменных (в нашем случае x' и y'). Применение этого знака не обязательно, когда по контексту ясно, что речь идет о тождестве. Поэтому мы часто, и в случае тождественного равенства, будем писать $=$ вместо $\equiv$.

где для краткости введено обозначение

$$\Phi_1(\rho, \varphi) \equiv \Phi(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Уравнение (5) представляет собою уравнение данной линии относительно полярной системы координат, связанной с первоначальной системой, как указано в § 60.

§ 83. Основные вопросы, связанные с аналитическим представлением линии

Аналитическое представление линии при помощи уравнения дает нам возможность изучить вид и свойства ее средствами, представляемыми нам математическим анализом.

Прежде всего можно составить себе представление о виде линии, уравнение которой задано, определив положение на плоскости ряда достаточно близких точек ее. Это можно сделать следующим образом.

Пусть

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение рассматриваемой линии относительно какой-либо системы координат. Решив его относительно y [1]), получим уравнение вида

$$y = f(x). \tag{2}$$

Придавая переменной x ряд достаточно близких значений x_1, x_2, x_3 и т. д., мы сможем, пользуясь соотношением (2), вычислить соответствующие значения переменной y. Пусть эти значения суть $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ и т. д. Нанося на бумаге точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) и т. д., получим ряд точек, принадлежащих данной линии, а соединяя эти точки плавной чертой, получим приблизительное представление об ее форме.

Если линия представлена параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

то для нанесения ряда ее точек достаточно придать параметру ряд достаточно близких значений $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ и вычислить при помощи предыдущих уравнений координаты соответствующих точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n), принадлежащих нашей линии.

Указанный способ изучения формы линии (при помощи построения отдельных точек) есть, так сказать, механический способ. Такой способ очень часто дает вполне достаточные для практиче-

[1]) Мы предполагаем здесь, что это возможно сделать и что y есть однозначная функция x по крайней мере в некотором промежутке изменения переменной x. Если y — многозначная функция, то каждому значению x будет соответствовать несколько значений y, что не меняет по существу рассуждений, приведенных в тексте (см. § 79).

ских целей результаты, но часто также может оказаться недостаточным, так как он, в большинстве случаев, не дает возможности с полной уверенностью судить об общих свойствах линии, не дает нам общей точки зрения. Очень многие качественные свойства кривой могут ускользнуть от нас при таком механическом изучении.

Для более точного качественного и количественного изучения линии требуется изучение ее уравнения методами анализа.

В простейших случаях (и для изучения простейших свойств) можно обходиться средствами элементарной математики; в более же сложных случаях приходится прибегать к средствам дифференциального и интегрального исчислений. Эти последние случаи относятся уже к области дифференциальной геометрии.

Иногда уравнение изучаемой линии не дается непосредственно, и линия задается как геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Тогда для изучения этой линии методами аналитической геометрии надо прежде всего составить ее уравнение (или представить ее параметрически). Укажем в общих чертах, как это делается. Вспомним, прежде всего, что́ надо подразумевать под словами «геометрическое место». Геометрическим местом точек (на плоскости) называется совокупность точек плоскости, положение которых не произвольно, а удовлетворяет некоторым заданным условиям. Задать геометрическое место — это значит задать условия, которым должны удовлетворять точки геометрического места.

Предположим теперь, что задано какое-либо геометрическое место. Нас в данный момент интересуют следующие вопросы: 1) узнать, представляет ли собою заданное геометрическое место линию; 2) в случае положительного ответа составить уравнение этой линии.

Эти два вопроса решаются одновременно следующим образом. Возьмем какую-либо систему координат; пусть x, y обозначают координаты произвольной точки M рассматриваемого геометрического места. Положение точки M подчиняется определенным условиям, характеризующим это геометрическое место. Но так как положение точки M вполне характеризуется ее координатами x, y, то условия, которым должно удовлетворять положение M, сводятся к некоторым условиям, связывающим величины x и y. Эти последние условия могут свестись к одному единственному уравнению вида

$$\Phi(x, y) = 0; \tag{1}$$

если это имеет место, то рассматриваемое геометрическое место есть линия, выражаемая уравнением (1), и наша задача решена.

Может, однако, случиться, что упомянутые условия не могут быть выражены одним уравнением вида (1). Тогда рассматриваемое геометрическое место не есть линия.

В некоторых случаях из самого определения геометрического места непосредственно вытекает, что положение точек этого геометрического места вполне характеризуется значениями некоторой переменной величины (параметра) t. Это значит, что координаты x и y являются функциями этой величины, т. е. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Значит, в этом случае рассматриваемое геометрическое место есть линия; параметрическое представление ее будет найдено, если будут найдены функции φ и ψ.

До сих пор мы говорили об изучении свойств линии при помощи изучения функциональной зависимости между координатами ее точек.

Но уравнение линии можно использовать и с обратной целью, т. е. с целью изучения данной функциональной зависимости при помощи линии, представляемой этой зависимостью. Именно, если дана функциональная зависимость, связывающая две переменные x и y, т. е. дано соотношение

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — данная функция, то можно, взяв какую-либо определенную систему координат, построить линию, уравнением которой служит предыдущее уравнение. Линия эта даст нам ясное представление о характере изменения зависимой переменной y при изменении независимой переменной x. Если мы начертим эту линию на бумаге, то получим *графическое изображение* (график) данной функции.

Таким графиком можно часто с успехом заменить таблицы, дающие значения y. Например, построив график функциональной зависимости $y = 10^x$ или $x = \lg y$, можно этим графиком (там, где не требуется большой точности) заменить таблицы логарифмов (см. следующий параграф, пример 1).

§ 84. Примеры различных линий

В этом параграфе мы приводим несколько примеров для иллюстрации сказанного, в дополнение к примерам § 80, где были рассмотрены уравнения прямой и окружности [1]).

В приводимых примерах мы, смотря по удобству, пользуемся той или иной системой координат. Надо заметить, что, хотя, теоретически говоря, безразлично, какую координатную систему брать для аналитического представления линии и графического изображения функции, на практике целесообразный выбор системы координат имеет громадное значение. Неудачный выбор может даже в простейших случаях привести к весьма громоздким формулам.

[1]) Рекомендуем читателю просмотреть также вывод уравнений эллипса, гиперболы и параболы, помещенный в главе VII.

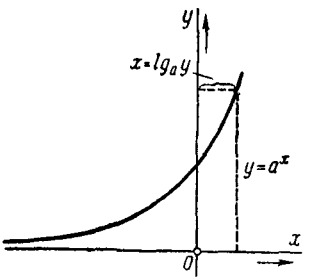
1. Показательная, или логарифмическая кривая. Рассмотрим уравнение

$$y = a^x, \tag{1}$$

где a — положительное постоянное число. Если рассматривать x и y как прямоугольные декартовы координаты точки, то линия, представляемая предыдущим уравнением, называется *показательной* (или *логарифмической*) кривой.

Предположим для определенности, что $a > 1$, и исследуем форму этой кривой.

При $x = 0$, $y = a^0 = 1$; когда x возрастает, то возрастает и a^x; когда x стремится к ∞, то и $y = a^x$ стремится к ∞. При убывании x, a^x, оставаясь все время положительной величиной, стремится к нулю, когда x стремится к $-\infty$.



Черт. 85

Кривая имеет вид, изображенный на черт. 85.

Мы видели, что при x, стремящемся к $-\infty$, y беспредельно убывает; это значит, что при x, стремящемся к $-\infty$, точки кривой беспредельно приближаются к оси Ox (никогда, однако, на нее не попадая [1])).

Если существует прямая, обладающая тем свойством, что при неограниченном продолжении в одну или другую сторону она беспредельно приближается к точкам данной кривой, эта прямая называется *асимптотой* данной кривой. Мы видим, что ось Ox является в нашем случае асимптотой.

Если наша кривая вычерчена с достаточной точностью и в достаточно большом масштабе, то ею можно пользоваться для приближенного вычисления a^x, если дано значение x (черт. 85). Этой же кривой можно пользоваться для вычисления x, если дано значение y. Из уравнения (1) следует, что

$$x = \lg_a y; \tag{2}$$

следовательно, наш график дает возможность вычислять логарифмы по основанию a. Если мы построим кривую для случая

---

[1]) Мы видим здесь пример того случая, когда «механическое» построение кривой при помощи нанесения на бумагу ряда точек может ввести нас в заблуждение. Если, например, $a = 10$ и за единицу длины принят сантиметр, то уже, например, для $x = -3$ мы получили бы $y = 10^{-3} = 0{,}001$ *см* $= 0{,}01$ *мм*. Но одна сотая миллиметра уже практически неотличима на чертеже от нуля, так что все точки кривой, начиная с $x = -3$ (и даже раньше), попали бы на ось Ox, и мы получили бы ложное представление, что часть нашей кривой сливается с осью Ox.

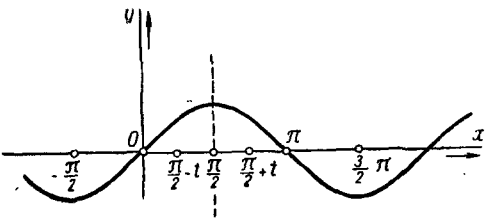
$a = 10$, то получим график, который может заменить (если не требуется большой точности) таблицу десятичных логарифмов.

2. **Синусоида.** Так называется линия, представляемая в декартовой прямоугольной системе координат уравнением

$$y = \sin x. \tag{3}$$

Постараемся составить себе представление о форме этой кривой (черт. 86).

При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, кривая проходит через начало координат. Когда x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $y = \sin x$ воз-



Черт. 86

растает от 0 до максимального значения $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. При дальнейшем возрастании x ордината y начинает убывать. Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, то кривая симметрична относительно прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Ox в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$ (черт. 86, пунктирная прямая). При $x = \pi$, y снова обращается в 0, и так как $\sin(\pi + t) = -\sin(\pi - t)$, то часть кривой для промежутка $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ представляет собою часть для промежутка $0 \leqslant x \leqslant \pi$, но только зеркально отраженную от оси Ox и сдвинутую по этой оси на расстояние π.

Далее, часть кривой для промежутка $2\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$ будет иметь в точности ту же форму, что и рассмотренная уже часть для промежутка $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, так как $\sin x$ есть периодическая функция с периодом 2π; то же относится к промежутку $4\pi \leqslant x \leqslant 6\pi$ и т. д.

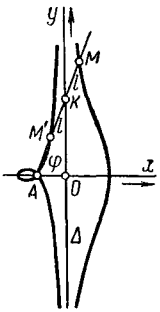
Наконец, для отрицательных значений x получим такую же картину. Кривая будет покрывать сама себя, если ее сдвигать вправо или влево по оси Ox на расстояние, равное 2π.

Представляем читателю показать, что кривая, изображаемая уравнением

$$y = \cos x, \tag{4}$$

представляет собою ту же синусоиду, сдвинутую по оси Ox на расстояние, равное $\frac{\pi}{2}$.

3. Конхоида есть кривая, определяемая следующим образом. Из некоторой неподвижной точки A проводятся прямые AK и на этих прямых от точки их пересечения K с некоторой неподвижной прямой Δ откладываются (в ту и другую стороны) отрезки KM и KM', равные данной постоянной величине l. Совокупность полученных таким образом точек M и M' называется *конхоидой Никомеда*. Из самого определения ясно, что конхоида состоит из двух ветвей, расположенных по ту и другую стороны прямой Δ. Легко также видеть, что прямая Δ будет асимптотой для обеих ветвей (черт. 87). Возьмем ось Oy по прямой Δ и примем за ось Ox ось, перпендикулярную к прямой Δ, направленную от A к точке пересечения O с этой прямой; точка O будет началом координат. Пусть $|OA| = a$. Найдем сперва параметрическое представление конхоиды, приняв за параметр угол φ, составляемый вектором $\overrightarrow{AK}$ с осью Ox и отсчитываемый от оси Ox.



Черт. 87

Угол φ может изменяться в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Для координат точки M, откладываемой на продолжении вектора $\overrightarrow{AK}$, будем, очевидно, иметь [1]):

$$x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} = \text{пр}_x \overrightarrow{OK} + \text{пр}_x \overrightarrow{KM} = l\cos\varphi,$$

$$y = \text{пр}_y \overrightarrow{OM} = \text{пр}_y \overrightarrow{OK} + \text{пр}_y \overrightarrow{KM} = a\,\text{tg}\,\varphi + l\sin\varphi.$$

Для точек M', откладываемых в противоположную сторону, получим, очевидно, такие же формулы, только вместо l надо взять $-l$.

Итак, параметрическое представление нашей кривой будет:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm l\cos\varphi, \\ y &= a\,\text{tg}\,\varphi \pm l\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где одновременно берутся либо верхние (для правой ветви), либо нижние (для левой ветви) знаки [2]).

Чтобы от параметрического представления конхоиды перейти к уравнению ее, достаточно исключить φ из последних уравнений.

---

[1]) Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M не изображен на чертеже.

[2]) Читателю предоставляется доказать, что можно ограничиться, например, одним верхним знаком, если придавать углу φ значения не только из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, но и из промежутка $(-\pi, +\pi)$ или (что все равно) из промежутка $(0, 2\pi)$

Первое из них дает

$$\cos\varphi = \pm\frac{x}{l};$$

второе дает

$$y = \left(\frac{a}{\cos\varphi} \pm l\right)\sin\varphi,$$

или, подставляя вместо $\cos\varphi$ найденное выше значение:

$$y = \pm\left(\frac{al}{x} + l\right)\sin\varphi = \pm\frac{l(x+a)}{x}\sin\varphi,$$

откуда

$$\sin\varphi = \pm\frac{xy}{l(x+a)}.$$

Пользуясь теперь соотношением $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ и подставляя в него найденные значения $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, получим

$$\frac{x^2y^2}{l^2(x+a)^2} + \frac{x^2}{l^2} = 1,$$

или, после очевидных упрощений,

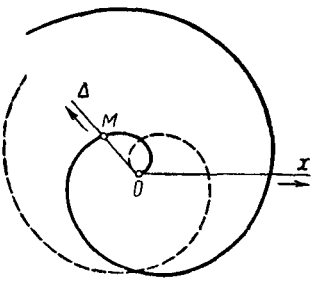
$$(x+a)^2(x^2-l^2) + x^2y^2 = 0. \qquad (6)$$

Это и есть уравнение конхоиды относительно взятой нами прямоугольной системы координат.

4. Спираль Архимеда. Пусть ось Δ вращается вокруг неподвижной точки O и пусть по оси Δ движется точка M так, что алгебраическое значение ρ вектора $\overrightarrow{OM}$ (по оси Δ) пропорционально углу поворота φ [1]) этой оси, отсчитываемому от некоторой неподвижной оси Ox (черт. 88). Путь, описываемый точкой, называется *спиралью Архимеда*. По самому определению, имеем

$$\rho = a\varphi, \qquad (7)$$

где a — некоторая постоянная (коэффициент пропорциональности).



Черт. 88

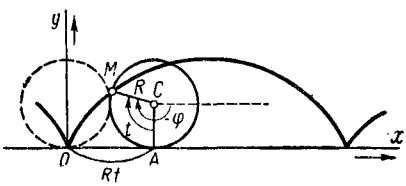
Это и есть уравнение спирали Архимеда в полярных координатах, если принять O за полюс, а Ox — за полярную ось.

Будем считать a положительной величиной. Тогда часть спирали, соответствующая положительным значениям φ, имеет вид, изображенный на чертеже сплошной чертой (конечно, спираль делает бесчисленное множество завитков при возрастании φ от 0 до ∞); за положительное направление отсчета φ мы приняли направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки.

[1]) Угол φ мы будем измерять в радианах.

Часть кривой, соответствующая отрицательным значениям φ, изображена пунктиром.

5. Циклоида. *Циклоидой* называется путь, описываемый одной из точек M окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой. Пусть R обозначает радиус катящейся окружности. Примем за ось Ox прямоугольной системы прямую, по которой катится окружность, а за начало координат — одну из тех точек этой оси, где точка M катящегося круга попадает на ось Ox; ось Oy направим так, как указано на черт 89.



Черт. 89

Рассмотрим какое-либо положение катящейся окружности, и пусть A есть точка касания ее с осью Ox, а C — ее центр. Обозначим через t угол ACM, отсчитываемый от направления $\overrightarrow{CA}$ в направлении, указанном на чертеже стрелкой. Ясно, что задание угла t (который мы будем измерять в радианах) вполне определяет положение катящейся окружности и, следовательно, положение точки M. Поэтому величину t можно выбрать за параметр для представления циклоиды. Так как качение происходит без скольжения, то отрезок OA равен длине дуги окружности $AM = Rt$.

Выразим теперь координаты x, y точки M через t.

Если $\overrightarrow{OM}$ есть радиус-вектор точки M (этот радиус-вектор на чертеже не изображен), то

$$x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} = \text{пр}_x \overrightarrow{OA} + \text{пр}_x \overrightarrow{AC} + \text{пр}_x \overrightarrow{CM},$$

$$y = \text{пр}_y \overrightarrow{OM} = \text{пр}_y \overrightarrow{OA} + \text{пр}_y \overrightarrow{AC} + \text{пр}_y \overrightarrow{CM}.$$

Но, очевидно,

$$\text{пр}_x \overrightarrow{OA} = OA = Rt, \quad \text{пр}_x \overrightarrow{AC} = 0, \quad \text{пр}_x \overrightarrow{CM} = -R \sin t\,^{1)},$$

$$\text{пр}_y \overrightarrow{OA} = 0, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{AC} = R, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{CM} = -R \cos t^{1)}.$$

---

[1]) Заметим, что угол φ, который вектор $\overrightarrow{CM}$ составляет с осью Ox и который считается (при нашем выборе системы осей Ox, Oy) положительным при отсчете против движения часовой стрелки, связан с углом t (который считается положительным при отсчете по часовой стрелке) формулой $\varphi = -\frac{\pi}{2} - t + 2k\pi$ (где k — целое число) (см. чертеж). Следовательно, $\text{пр}_x \overrightarrow{CM} = R \cos \varphi = -R \sin t$, $\text{пр}_y \overrightarrow{CM} = R \sin \varphi = -R \cos t$.

Подставляя эти значения в предыдущие формулы, получим параметрическое представление циклоиды:

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t). \tag{8}$$

§ 85. Классификация плоских линий

Исходя из представления линий при помощи уравнений относительно *декартовых* координат, можно установить определенную классификацию плоских линий.

Линия называется *алгебраической*, когда ее уравнению можно придать вид

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, y)$ обозначает полином, т. е. целую рациональную функцию переменных x и y, иначе говоря, представляет собою сумму членов вида

$$Ax^k y^l, \tag{2}$$

где k и l — целые неотрицательные числа, а A — постоянный коэффициент.

В этом случае координата y, определяемая уравнением (1) как неявная функция от x, будет *алгебраической* функцией.

Все неалгебраические линии называются *трансцендентными* кривыми.

Алгебраические линии разбиваются, в свою очередь, на линии различных порядков. Именно, линия, изображаемая уравнением (1), называется линией порядка n, если n обозначает степень полинома $F(x, y)$ [1]).

Например, прямая есть алгебраическая линия первого порядка, так как она изображается уравнением первой степени

$$y - ax - b = 0 \quad \text{или} \quad x - c = 0$$

(см. § 80).

Окружность есть алгебраическая линия второго порядка, так как она изображается уравнением второй степени (§ 80).

Линия, уравнение которой

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

есть линия третьего порядка. Конхоида, рассмотренная нами в предыдущем параграфе, есть алгебраическая линия четвертого порядка. (Все другие линии, рассмотренные в предыдущем параграфе,— трансцендентные линии; см. еще § 87, замечание.)

---

[1]) Степенью одночлена $Ax^k y^l$ называется сумма показателей степеней k и l, т. е. $k + l$. Степенью всего полинома $F(x, y)$ называется наивысшая из степеней слагаемых одночленов.

Наша классификация алгебраических линий не имела бы смысла, если бы порядок линии зависел от выбора (декартовой) системы координат. Мы покажем сейчас, что порядок данной линии не зависит от этого выбора.

Действительно, пусть в данной системе декартовых координат уравнение алгебраической линии имеет вид

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — целая рациональная функция переменных x, y.

Взяв какую-нибудь другую декартову систему и подставляя на место x и y их выражения через новые координаты

$$x = a + l_1x' + l_2y', \quad y = b + m_1x' + m_2y' \tag{3}$$

(см. § 82), мы получим уравнение той же линии относительно новой системы;

$$F'(x', y') = 0,$$

где полином $F'(x', y')$ есть результат подстановки в $F(x, y)$ выражений (3).

Легко показать, что степени полиномов F и F' одинаковы. Покажем сперва, что степень F' не превосходит степени F. В самом деле, $F(x, y)$ есть сумма членов вида Ax^py^q. Если произвести указанную подстановку, то вместо этого члена получим выражение $A(a + l_1x' + l_2y')^p(b + m_1x' + m_2y')^q$. Если на самом деле произвести перемножение, то, очевидно, получится сумма членов вида $Bx'^ry'^s$, причем ни в одном члене $r + s$ не будет превосходить $p + q$.

Меняя ролями системы Oxy и $O'x'y'$, убедимся тем же способом, что степень F не превосходит степени F'; следовательно, степени F и F' равны между собою.

Итак, мы можем говорить о порядке алгебраической линии, не указывая системы декартовых координат, к которым относится уравнение линии.

Ещё один пункт требует разъяснения. Может случиться, что данное уравнение $F(x, y) = 0$ алгебраической линии, где $F(x, y)$ — полином, эквивалентно[1]) другому уравнению $F_0(x, y) = 0$, где $F_0(x, y)$ — также полином, но степени низшей, чем $F(x, y)$. Например, уравнение $(x - y)^2 = 0$, очевидно, эквивалентно уравнению $x - y = 0$.

Пусть $F_0(x, y) = 0$ — уравнение, эквивалентное данному, но такое, что его уже нельзя заменить эквивалентным уравнением ещё более низкой степени. Естественно тогда под порядком рассматриваемой алгебраической линии подразумевать не степень

[1]) Уравнения $F(x, y) = 0$ и $F_0(x, y) = 0$ называются *эквивалентными*, если всякая пара чисел x, y, удовлетворяющая одному, удовлетворяет и другому.

полинома F, а степень полинома F_0. Однако часто целесообразно поступать и иначе. Об этом будет сказано подробно ниже, в § 174.

Замечание. Не надо забывать, что установленная нами классификация линий (разделение на алгебраические и трансцендентные линии) основана на представлении линий уравнениями относительно декартовых координат. Например, спираль Архимеда, уравнение которой есть

$$\rho = a\varphi,$$

где ρ и φ обозначают полярные координаты, а a — некоторую постоянную, есть трансцендентная линия, несмотря на то, что ее уравнение не только алгебраическое, но и линейное относительно полярных координат. Действительно, переходя от полярных координат к декартовым по формулам § 60, получим

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

— уравнение явно трансцендентное.

§ 86. Распадающиеся и нераспадающиеся алгебраические линии [1])

Если левая часть уравнения алгебраической кривой

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

представляющая собою полином, может быть разложена на два множителя, которые также суть полиномы, т. е. если имеем тождество

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y),$$

где $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ представляют собою полиномы (иначе говоря, целые рациональные функции от переменных x и y), то тогда уравнение (1) принимает вид

$$F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 0. \tag{2}$$

Переменные x и y, удовлетворяющие этому уравнению, должны, конечно, удовлетворять одному из двух уравнений

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad F_2(x, y) = 0; \tag{3}$$

обратно: переменные, удовлетворяющие одному из этих уравнений, удовлетворяют и уравнению (2). Каждое из двух последних уравнений есть уравнение некоторой алгебраической кривой. Из сказанного ясно, что точки кривой, представляемой уравнением (2), принадлежат одной из кривых, представляемых уравнениями $F_1(x, y) = 0$ или $F_2(x, y) = 0$, и обратно.

[1]) Об этом будет подробнее сказано ниже (в § 174).

Иными словами, кривая, представляемая уравнением (2), состоит из совокупности двух кривых, представляемых уравнениями (3).

В этом случае говорят, что кривая, представляемая уравнением (1),— *приводимая* или *распадающаяся*, так как она распадается на две алгебраические линии (3). Каждая из последних может быть, в свою очередь, распадающейся, так что распадающаяся кривая может распадаться не только на две, но и на бо́льшее число алгебраических кривых.

Например, линия, представляемая уравнением

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{или} \quad (x - y)(x + y) = 0,$$

распадается на две прямые линии, представляемые уравнениями

$$x - y = 0 \quad \text{и} \quad x + y = 0.$$

Если полином $F(x, y)$ не может быть разложен на два множителя, представляющих собою полиномы, то кривая, представляемая уравнением (1), называется *нераспадающейся* или *неприводимой*.

Из сказанного ясно, что изучение приводимой кривой всегда можно свести к изучению неприводимых кривых, из которых она состоит.

З а м е ч а н и е. Не надо думать, что алгебраическая кривая, состоящая из двух раздельных ветвей (например гипербола, с которой мы познакомимся в главе VII, или конхоида, рассмотренная в § 84), всегда представляет собою приводимую кривую. Основное значение имеет не раздельность ветвей, а возможность разложить левую часть уравнения кривой, приведенного к виду $F(x, y) = 0$, на несколько множителей, представляющих собою полиномы.

Например, нетрудно показать, что левая часть уравнения конхоиды (§ 84)

$$(x + a)^2 (x^2 - l^2) + x^2 y^2 = 0$$

(при $a \neq 0$, $l \neq 0$) не может быть разложена на два таких множителя, а потому конхоида есть неприводимая кривая: обе ветви ее с алгебраической точки зрения представляют собою одно целое (то же касается гиперболы, с которой мы познакомимся в главе VII).

§ 87. О пересечении двух линий

Для дальнейшего важно уметь решать следующую задачу: даны две линии уравнениями

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

и

$$\Psi(x, y) = 0; \tag{2}$$

требуется найти точки пересечения этих линий. Координаты искомых точек (если они существуют) должны одновременно удовлетворять уравнениям (1) и (2), так как искомые точки должны одновременно находиться на линиях, представляемых этими уравнениями. Следовательно, чтобы найти координаты точек пересечения, надо решить систему двух уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y) = 0, \\ \Psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

с двумя неизвестными [1]). Сколько будет решений, столько и будет точек пересечения; если предыдущая система не имеет решений, то данные линии нигде не пересекаются.

Число точек пересечения алгебраических линий порядков m и n не превосходит произведения mn; исключение может представить только тот случай, когда одна линия целиком входит в состав другой, или когда линии — распадающиеся, имеющие общие части [2]). Ниже (в § 100) будет приведено доказательство этого утверждения для случая, когда одна из рассматриваемых линий — прямая. Доказательство для общего случая можно найти в любом курсе высшей алгебры.

Заметим здесь же (подробнее об этом см. § 174), что если определенным образом условиться о счете «кратных» точек пересечения и учитывать также «мнимые» и «бесконечно удаленные» точки, то можно утверждать, что число точек пересечения *всегда* равно $m \cdot n$, за исключением случая, когда линии имеют общие части. В частности, число точек пересечения алгебраической кривой n-го порядка с прямою, не входящей в ее состав, всегда равно n (если принять вышеупомянутую обобщенную точку зрения). Таким образом, порядок данной алгебраической кривой можно определить как число точек ее пересечения с произвольной прямой, не входящей в ее состав.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что задача о пересечении двух линий принимает особенно простой вид, если одна из линий задана параметрически.

Пусть требуется найти точки пересечения линии, заданной параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

с линией, заданной уравнением $\Phi(x, y) = 0$. Подставляя выражения (3) в это уравнение, получим уравнение с одним неизвестным t:

$$\Phi[\varphi(t), \psi(t)] = 0. \tag{4}$$

---

[1]) См. упражнения 12 и 13 § 80.

[2]) Под «частью» мы понимаем любую из тех алгебраических линий, на которые распадается данная линия.

Найдя корни этого уравнения и подставляя их в (3) на место t, получим значения координат искомых точек.

Замечание. Из сказанного выше о числе точек пересечения алгебраических кривых вытекает, в частности, что если данная линия пересекается с какой-либо прямой в бесчисленном количестве точек (не содержа, однако, эту прямую в качестве составной части), то линия эта непременно трансцендентна.

Этот признак сразу позволяет нам заключить, например, что синусоида, циклоида и спираль Архимеда суть трансцендентные кривые.

Однако обратного заключения сделать нельзя. Например, показательная кривая есть линия трансцендентная, несмотря на то, что любая прямая пересекает её не больше чем в двух точках [1]), как это легко доказать, и что почти очевидно на основании чертежа (см. черт. 85).

Упражнение

Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями

$$x^2+y^2=4 \quad \text{и} \quad (x-1)^2+y^2=3.$$

Ответ. $(1, \sqrt{3})$ и $(1, -\sqrt{3})$.

Мы видим, что число (действительных) точек пересечения равно 2. Если бы мы ввели в рассмотрение мнимые и бесконечно удаленные точки, то могли бы показать, что кроме найденных двух точек пересечения существуют еще две точки пересечения (одновременно мнимые и бесконечно удаленные).

II. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

В этом отделе мы более детально изучим вопрос о представлении прямой на плоскости при помощи уравнения.

§ 88. Уравнение в коэффициентах направления. Параметрическое представление

В § 80 мы вывели уравнение прямой, считая координаты прямоугольными. Легко тем же способом вывести уравнение прямой в любой системе декартовых координат. Мы предпочитаем, однако, вывести здесь уравнение прямой иным путём.

Пусть (черт. 90) Δ есть заданная прямая. Положение ее вполне определяется заданием одной из ее точек $M_0(x_0, y_0)$ и какого-либо вектора $\mathbf{P}=(X, Y)$, не равного нулю и параллельного ей.

Итак, будем считать заданными координаты x_0, y_0 точки M и координаты X, Y вектора $\mathbf{P}$. Вектор $\mathbf{P}$ мы будем называть *вектором направления* данной прямой.

---

[1]) Конечно, здесь идет речь только о действительных точках; мнимых точек мы пока в рассмотрение не вводим.