Найдя корни этого уравнения и подставляя их в (3) на место t, получим значения координат искомых точек.

Замечание. Из сказанного выше о числе точек пересечения алгебраических кривых вытекает, в частности, что если данная линия пересекается с какой-либо прямой в бесчисленном количестве точек (не содержа, однако, эту прямую в качестве составной части), то линия эта непременно трансцендентна.

Этот признак сразу позволяет нам заключить, например, что синусоида, циклоида и спираль Архимеда суть трансцендентные кривые.

Однако обратного заключения сделать нельзя. Например, показательная кривая есть линия трансцендентная, несмотря на то, что любая прямая пересекает её не больше чем в двух точках [1]), как это легко доказать, и что почти очевидно на основании чертежа (см. черт. 85).

Упражнение

Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями

$$x^2+y^2=4 \quad \text{и} \quad (x-1)^2+y^2=3.$$

Ответ. $(1, \sqrt{3})$ и $(1, -\sqrt{3})$.

Мы видим, что число (действительных) точек пересечения равно 2. Если бы мы ввели в рассмотрение мнимые и бесконечно удаленные точки, то могли бы показать, что кроме найденных двух точек пересечения существуют еще две точки пересечения (одновременно мнимые и бесконечно удаленные).

II. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

В этом отделе мы более детально изучим вопрос о представлении прямой на плоскости при помощи уравнения.

§ 88. Уравнение в коэффициентах направления. Параметрическое представление

В § 80 мы вывели уравнение прямой, считая координаты прямоугольными. Легко тем же способом вывести уравнение прямой в любой системе декартовых координат. Мы предпочитаем, однако, вывести здесь уравнение прямой иным путём.

Пусть (черт. 90) Δ есть заданная прямая. Положение ее вполне определяется заданием одной из ее точек $M_0(x_0, y_0)$ и какого-либо вектора $\mathbf{P}=(X, Y)$, не равного нулю и параллельного ей.

Итак, будем считать заданными координаты x_0, y_0 точки M и координаты X, Y вектора $\mathbf{P}$. Вектор $\mathbf{P}$ мы будем называть *вектором направления* данной прямой.

---

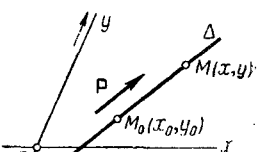
[1]) Конечно, здесь идет речь только о действительных точках; мнимых точек мы пока в рассмотрение не вводим.

Для того чтобы точка $M(x, y)$ находилась на прямой Δ, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ был параллелен вектору $\mathbf{P} = (X, Y)$. Вспоминая же условие параллельности двух векторов (§ 37), видим, что последнее условие сводится к следующему:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}. \tag{1}$$

Так как уравнение (1) выражает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка (x, y) находилась на Δ, то оно и представляет уравнение этой прямой.

Коэффициенты X и Y, входящие в него, называются *коэффициентами направления*, так как они вполне определяют вектор направления $\mathbf{P}$, а следовательно, и направление прямой. Поэтому уравнение (1) называется *уравнением в коэффициентах направления*.



Черт. 90

Очевидно, что, обратно, всякое уравнение вида (1) есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельной вектору $\mathbf{P}$.

Заметим теперь, что вместо вектора $\mathbf{P}$ можно взять любой другой, параллельный ему (направленный в ту же или противоположную сторону). Иными словами, коэффициенты X и Y в уравнении (1) можно заменить любыми пропорциональными им величинами kX и kY, где k — произвольное число, отличное от нуля. Это, конечно, очевидно и непосредственно, так как, разделив обе части уравнения (1) на произвольное число k (отличное от нуля), получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{kX} = \frac{y - y_0}{kY}, \tag{1a}$$

равносильное предыдущему.

Из сказанного следует, что направление прямой Δ, определяемой уравнением (1), зависит не от самих величин X и Y, а от их отношения, например, от отношения

$$a = \frac{Y}{X}; \tag{2}$$

это отношение называется *угловым коэффициентом* данной прямой, так как оно определяет направление ее, а следовательно, и угол, составляемый ею с осью Ox (см. еще следующий параграф).

Возвращаясь к уравнению (1), заметим, что из него можно получить очень простое параметрическое представление нашей прямой. Действительно, обозначив через t общее значение отно-

шений (1), т. е. положив

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=t,$$

получим

$$x=x_0+Xt,\quad y=y_0+Yt; \tag{3}$$

это и есть параметрическое представление прямой. Параметр t имеет очень простое геометрическое значение. Именно, из самого определения следует, что t есть отношение (см. стр. 68) параллельных векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и **P**.

Вместо вектора **P** произвольной длины мы, конечно, можем взять орт, который обозначим через **e**; координаты этого орта обозначим через l и m, т. е. положим

$$\mathbf{e}=(l,\ m).$$

Величины l и m мы будем называть (см § 44, замечание) *координатами направления* данной прямой [1]). Уравнение ее в этом случае напишется так:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}; \tag{4}$$

это уравнение мы будем называть *уравнением в координатах направления*.

В случае применения орта **e** (вместо вектора **P** произвольной длины) параметрическое представление (3) примет вид

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt; \tag{5}$$

в этом случае параметр t представляет собою, попросту, алгебраическую величину вектора $\overrightarrow{M_0M}$ по направлению **e**, т. е. расстояние переменной точки M до постоянной точки M_0, снабженное определенным знаком.

Замечание. Если прямая Δ параллельна одной из осей координат, то один из коэффициентов X, Y равен нулю, так как вектор **P** должен тоже быть параллелен одной из осей. Если, например, Δ параллельна оси Oy, то $X=0$, и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{Y};$$

это последнее уравнение надо, на основании сказанного в замечании § 37, понимать как равносильное уравнению $x-x_0=0$, причем $y-y_0$ остается произвольным.

---

[1]) Так как орт **e** можно заменить ортом $-\mathbf{e}=(-l,\ -m)$, то, если l, m суть координаты направления прямой, то и $(-l,\ -m)$ будут координатами направления той же прямой.

Итак, уравнение прямой, параллельной оси Oy, имеет вид

$$x - c = 0, \tag{6}$$

где $c = x_0$ обозначает абсциссу точки пересечения прямой с осью Ox. Этот результат уже получен и раньше в § 80; там мы считали координаты прямоугольными, что, конечно, в данном случае несущественно.

Аналогичное уравнение получим для прямой, параллельной оси Ox.

Упражнения

1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (0, 3) и параллельной вектору (2, 5).

Ответ. $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (3, —1) и параллельной вектору (5, 0).

Ответ. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{0}$, т. е. (см. выше, замечание) $y + 1 = 0$.

§ 89. Приведенное уравнение прямой

Предположим теперь, что прямая Λ не параллельна оси Oy, т. е. что в уравнении (1) предыдущего параграфа $X \neq 0$. Тогда это уравнение, умножив на Y, можно переписать так:

$$y - y_0 = a(x - x_0), \tag{1}$$

где для краткости введено обозначение

$$a = \frac{Y}{X}. \tag{2}$$

Уравнение (1) можно переписать еще так:

$$y = ax + b, \tag{3}$$

где $b = y_0 - ax_0$ есть постоянная.

Последнее уравнение называется *приведенным*, или *простейшим*, уравнением прямой [1]).

Весьма важно уяснить себе и хорошо запомнить геометрическое значение коэффициентов a и b этого уравнения. Если $x = 0$, то, как показывает уравнение (3), $y = b$. Следовательно, b есть ордината точки пересечения нашей прямой с осью Oy или, как говорят, *начальная ордината* (мы ввели уже это понятие в § 80).

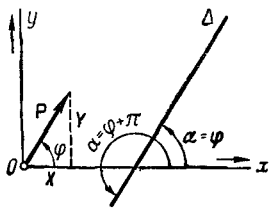
Что касается коэффициента a, то, как мы уже сказали в предыдущем параграфе, он определяет направление нашей прямой и называется *угловым коэффициентом*.

[1]) Оно было уже нами получено в § 80, где, однако, мы предполагали координаты прямоугольными.

В случае прямоугольных координат, как было уже показано в § 80, имеем

$$a = \operatorname{tg} \alpha, \tag{4}$$

где α обозначает угол прямой Δ с осью Ox. Выведем еще раз это важное соотношение, исходя из формулы (2), и вместе с тем несколько подробнее остановимся на вопросе об отсчете угла α. Угол этот мы будем отсчитывать от оси Ox, приписывая ему знак в зависимости от направления отсчета [1]).



Черт. 91

Если φ обозначает угол, составляемый вектором $\mathbf{P}$ с осью Ox, то ясно, что в качестве угла α мы можем взять и угол φ, и угол $\varphi + \pi$ (или, вообще, угол $\varphi + k\pi$, где k — целое число), так как прямая (в противоположность оси или вектору) не имеет определенного положительного направления, благодаря чему замена φ на $\varphi + \pi$ приводит к направлению той же прямой (черт. 91).

Вернемся теперь к выражению $a = \frac{Y}{X}$. Так как X и Y суть координаты вектора $\mathbf{P}$, то, как мы знаем из § 47 (и как это видно из черт. 91),

$$a = \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \varphi;$$

но так как φ и α могут отличаться на кратное π, а функция $\operatorname{tg} \varphi$ имеет как раз период π, то $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$, и мы получаем требуемую формулу (4).

Итак, если дан угловой коэффициент a, то угол α можно вычислить по формуле (4); эта формула дает нам не одно значение α, но бесчисленное множество значений, отличающихся друг от друга слагаемыми вида $k\pi$, которые не оказывают никакого влияния на направление Δ; поэтому мы можем всегда ограничиться вычислением любого из этих значений, например того, которое заключено между 0 и π.

В случае декартовых координат общего вида для углового коэффициента будем иметь формулу

$$a = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (\nu - \alpha)}, \tag{5}$$

где, как и выше, α обозначает угол прямой Δ с осью Ox, отсчитываемый от этой последней, ν — координатный угол, $|\mathbf{u}|$ и $|\mathbf{v}|$ — длины координатных векторов осей Ox и Oy. Предоставляем дока-

[1]) Направление отсчета положительных углов есть, по нашему всегдашнему соглашению, то, которое ведет кратчайшим путем от оси Ox к оси Oy.

зать эту формулу читателю; см. черт. 92, на котором буквами X и Y обозначены отрезки, алгебраические значения которых суть $|\mathbf{u}|X$ и $|\mathbf{v}|Y$.

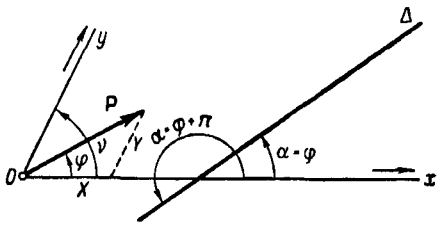
Если дано приведенное уравнение $y = ax + b$, то ему всегда можно придать вид уравнения в коэффициентах направления. Для этого достаточно написать его в виде

$$x = \frac{y-b}{a},$$

или

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{a}; \qquad (6)$$

мы видим, что наше уравнение действительно привелось к уравнению в коэффициентах направления; ими служат в данном случае $X = 1$ и $Y = a$.



Черт 92

Замечание. Выводя приведенное уравнение, мы предполагали, что прямая не параллельна оси Oy, т. е. $X \neq 0$. Если $X = 0$, то, конечно, уравнению прямой нельзя придать вида $y = ax + b$, так как в этом случае ее уравнение будет $x = c$ (см. предыдущий параграф). Выражение $a = \frac{Y}{X}$ теряет смысл (обращается в бесконечность). Однако и в этом случае иногда удобно говорить об угловом коэффициенте a, равном бесконечности.

§ 90. Общее уравнение прямой

Мы видели, что уравнение всякой прямой можно представить в виде

$$y - ax - b = 0,$$

если она не параллельна оси Oy, и в виде

$$x - c = 0,$$

если она параллельна оси Oy. Оба эти уравнения представляют собою частные виды уравнения

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

представляющего собою общий вид уравнения первой степени.

Легко видеть, что обратно, всякое уравнение вида (1), т. е. всякое уравнение первой степени, есть уравнение некоторой прямой.

Мы предполагаем, конечно, что коэффициенты A и B не равны одновременно нулю, иначе уравнение (1) не содержало бы переменных x и y и не выражало бы никакой зависимости между ними.

Рассмотрим два возможных здесь случая.

1. Предположим сперва, что $B \neq 0$. Тогда уравнение (1) можно решить относительно y, что дает

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

или

$$y = ax + b, \tag{2}$$

где положено

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Таким образом, наше уравнение (1) есть уравнение прямой с начальной ординатой b и угловым коэффициентом a.

2. Предположим, что $B = 0$. Тогда уравнение примет вид $Ax + C = 0$, или, так как $A \neq 0$,

$$x = c, \tag{3}$$

где положено

$$c = -\frac{C}{A}.$$

Ясно, что последнее уравнение выражает прямую, параллельную оси Oy и пересекающую ось Ox в точке с абсциссой, равной c.

Итак, мы доказали, что всякая прямая изображается уравнением первой степени, и обратно, всякое уравнение первой степени изображает прямую.

Уравнение вида (1) называется *уравнением прямой в общем виде*. Из предыдущего ясно, как приводить общее уравнение прямой к простейшему (приведенному) виду. Для этого достаточно решить его относительно y, если $B \neq 0$. Если же $B = 0$, то уравнение приводится к виду (3).

От приведенного вида можно, в свою очередь, всегда перейти к уравнению в коэффициентах направления, как это указано в конце предыдущего параграфа.

З а м е ч а н и е . Мы исключили из рассмотрения случай, когда $A = B = 0$; если это имеет место, то уравнение (1) сводится к следующему:

$$C = 0.$$

При C, отличном от нуля, это уравнение не может быть удовлетворено никакими конечными значениями x и y, т. е. не выражает никакого геометрического места (с точки зрения элементарной геометрии). Однако в этом случае говорят, что последнее уравнение выражает *бесконечно удаленную* или *несобственную* прямую (см. главу VI).

Такая «несобственная прямая» считается «параллельной» всякой другой прямой на данной плоскости. Во всем дальнейшем, если

противное не оговорено особо, мы будем считать, что в уравнении прямой по крайней мере один из коэффициентов A, B отличен от нуля.

Иногда имеет смысл рассматривать и случай $A = B = C = 0$; в этом случае говорят, что уравнение представляет «неопределенную» прямую.

Упражнения

1. Привести уравнение прямой $2x+2y-5=0$ к простейшему виду.

Ответ. $y=-x+\frac{5}{2}$.

2. Привести уравнение $3x+5y+1=0$ к простейшему виду, а затем к виду в коэффициентах направления.

Ответ. Приведенное (простейшее) уравнение будет

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}.$$

Один из видов уравнения в коэффициентах направления будет

$$\frac{y-\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{x-0}{1}, \quad \text{или} \quad \frac{x-0}{5}=\frac{y-\frac{1}{5}}{3}.$$

3. Предполагая координаты прямоугольными, найти угол α, составляемый прямою упражнения 1 с осью Ox.

Ответ. $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, или, что сводится к тому же, $\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$; более обще: $\alpha=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

§ 91. Частные случаи общего уравнения прямой

Если в общем уравнении прямой

$$Ax+By+C=0$$

один из коэффициентов равен нулю, то это характеризует некоторые особенности в положении прямой, которые мы и отметим.

1. Если в общем уравнении $C=0$, то уравнение принимает вид

$$Ax+By=0.$$

Соответствующая прямая проходит через начало координат, так как последнее уравнение удовлетворяется значениями $x=0$, $y=0$.

2. Если в общем уравнении $B=0$, то оно приводится к виду

$$x=-\frac{C}{A},$$

т. е. соответствующая прямая параллельна оси Oy, как было уже сказано в предыдущем параграфе.

3. Если в общем уравнении $A = 0$, то оно приводится к виду

$$y = -\frac{C}{B},$$

и соответствующая прямая параллельна оси Ox.

Отметим еще, что уравнение самой оси Ox есть

$$y = 0,$$

а уравнение оси Oy есть

$$x = 0.$$

§ 92. Знак трехчлена $Ax+By+C$

Трехчлен

$$Ax + By + C \tag{1}$$

обращается в нуль тогда, когда точка (x, y) лежит на прямой Δ, представляемой уравнением

$$Ax + By + C = 0; \tag{2}$$

для точек же, не лежащих на Δ,

$$Ax + By + C \neq 0;$$

это следует из самого понятия уравнения прямой. Представляет интерес исследовать, какой знак принимает трехчлен (1) для различных точек $M(x, y)$ плоскости.

Прямая Δ разбивает всю плоскость на две части. Пока точка $M(x, y)$ находится в одной из этих частей, трехчлен (1) сохраняет постоянный знак, так как переменить свой знак на обратный он может, предварительно обратившись в нуль, а это может случиться только тогда, когда точка $M(x, y)$ попадает на прямую Δ.

Легко видеть, что трехчлен (1) принимает по разные стороны от этой прямой противоположные знаки. Мы предоставляем доказать это читателю, рассмотрев отдельно случай, когда прямая Δ не параллельна оси Oy (тогда $B \neq 0$), и когда она ей параллельна (тогда $B = 0$); можно, разумеется, поменять ролями оси Oy и Ox.

Сказанное позволяет сразу решить, расположены ли две данные точки по одну и ту же сторону от прямой, заданной уравнением (1), или по разные стороны.

Упражнения

1. Показать, что точки $(5, -1)$ и $(2, 3)$ расположены по одну сторону прямой $x+3y-1=0$, а точка $(1, -5)$ — по другую.

2. Показать, что прямая $y=2x+1$ пересекает прямую, соединяющую точки $A(-2, 2)$ и $B(4, 1)$ *между* точками A и B.

Построить при помощи клетчатой бумаги указанные точки и прямые (предполагая координаты прямоугольными) и проверить результат на чертеже.

§ 93. Уравнение в отрезках на осях

Следует отметить еще один вид уравнения прямой, к которому можно привести общее уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

в случае, когда $C \neq 0$.

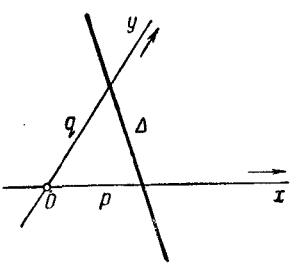
Именно, разделив обе его части на C и вводя обозначения

$$-\frac{A}{C} = \frac{1}{p}, \quad -\frac{B}{C} = \frac{1}{q}, \tag{2}$$

можем переписать уравнение (1) в виде

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \tag{3}$$

В этом очень симметричном уравнении величины p и q имеют весьма простое геометрическое значение (черт. 93); именно, p есть отрезок, отсекаемый рассматриваемой прямой на оси Ox и измеренный единицей $|\mathbf{u}|$ (длиной координатного вектора оси Ox); q — отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy и измеренный единицей $|\mathbf{v}|$ (длиной координатного вектора оси Oy); предполагается, что оба эти отрезка снабжены знаками [1]).



Черт. 93

Действительно, найдем точку пересечения прямой, изображаемой уравнением (3), с осью Ox, иначе говоря, найдем точку прямой (3) с ординатой y, равной нулю. Полагая в уравнении (3) $y = 0$, получим

$$\frac{x}{p} = 1,$$

т. е. $x = p$, как было сказано; точно так же докажем наше утверждение относительно q.

Принимая во внимание только что указанное геометрическое значение коэффициентов p и q, уравнение (3) называют *уравнением прямой в отрезках на осях координат.*

З а м е ч а н и е. Если коэффициент A в общем уравнении равен нулю, то на основании (2) $\frac{1}{p} = 0$ (т. е. $p = \infty$); уравнение (3) примет вид

$$\frac{y}{q} = 1;$$

это уравнение, как и следовало ожидать, изображает прямую, параллельную оси Ox и отсекающую на оси Oy отрезок q (измерен-

[1]) Алгебраические значения этих отрезков равны $|\mathbf{u}|\,p$ и $|\mathbf{v}|\,q$. В необобщенных координатах они равны просто p и q.

ный единицей $|\mathbf{v}|$); можно и в этом случае сказать, что прямая отсекает на осях координат отрезки $p = \infty$ и q.

Аналогичное замечание относится и к случаю $B = 0$.

§ 94. Построение прямой по заданному уравнению

Прямую, изображаемую уравнением (3) предыдущего параграфа, легко построить. Для этого достаточно отложить от начала координат по соответствующим осям отрезки, алгебраические значения которых равны $|\mathbf{u}|\,p$ и $|\mathbf{v}|\,q$, и соединить их концы прямою.

Если прямая задана уравнением в общем виде, в котором ни один из коэффициентов не равен нулю, достаточно это уравнение привести к предыдущему виду, чтобы указанное построение сделалось применимым.

Рассмотрим, например, прямую, заданную в необобщенных координатах уравнением

$$x - 3y - 6 = 0;$$

деля обе части на 6 и перенося единицу в правую часть уравнения, получим

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1;$$

следовательно, прямая отсекает на оси Ox отрезок 6, а на оси Oy — отрезок -2.

Если один из коэффициентов A, B общего уравнения равен нулю, то прямая параллельна одной из осей координат, и потому ее также легко построить.

Если, наконец, $C = 0$, то прямая проходит через начало координат; чтобы ее построить, достаточно построить еще какую-нибудь одну ее точку; для этого можно произвольным образом задать абсциссу этой точки и вычислить соответствующую ординату. Например, если дано уравнение прямой

$$3x - 4y = 0,$$

то, взяв, например, $x = 4$, получим $y = 3$. Поэтому прямая проходит через начало координат и через точку (4, 3).

Вообще для построения прямой, заданной уравнением, достаточно найти две какие-либо ее точки, как было отмечено уже в § 80.

§ 95. Геометрическое значение коэффициентов A и B в общем уравнении

Вернёмся к уравнению прямой в общем виде

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

и укажем чрезвычайно простое геометрическое значение коэффициентов A и B, которое очень облегчит решение многих задач.

Именно, считая временно $B \neq 0$ и решив уравнение (1) относительно y, получим приведенное уравнение

$$y = ax + b, \tag{2}$$

где угловой коэффициент $a = -\frac{A}{B}$. С другой стороны, мы знаем (§ 89), что $a = \frac{Y}{X}$, где X, Y обозначают координаты вектора направления нашей прямой. Следовательно,

$$-\frac{A}{B} = \frac{Y}{X} \quad \text{или} \quad \frac{X}{B} = \frac{Y}{-A}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь вектор, имеющий координатами B и $-A$, т. е. вектор $(B, -A)$. Как показывает вторая из формул (3), этот вектор параллелен вектору направления данной прямой, а следовательно, и самой этой прямой.

Итак, имеем предложение: *вектор* $(B, -A)$ *параллелен прямой, представляемой уравнением* (1).

Так как в качестве вектора направления прямой может быть взят любой вектор, параллельный ей, то мы всегда можем считать, что вектор

$$\mathbf{P} = (B, \ -A) \tag{4}$$

есть вектор направления прямой, представляемой уравнением (1). Ясно, что с таким же правом мы можем взять вектор $-\mathbf{P} = (-B, A)$.

Мы считали $B \neq 0$, но очевидно, что и в случае $B = 0$ результат остается справедливым [1]).

Можно указать еще другое геометрическое значение коэффициентов A, B, которое, в противоположность предыдущему, *имеет место только в случае прямоугольных координат*. Именно, легко видеть, что в этом случае вектор $\mathbf{Q}$, имеющий координатами A и B, т. е. вектор

$$\mathbf{Q} = (A, \ B), \tag{5}$$

перпендикулярен к прямой, представляемой уравнением (1).

Действительно, имеем $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = B \cdot A + (-A) \cdot B = 0$, т. е. вектор $\mathbf{Q}$ перпендикулярен к $\mathbf{P}$, а это и требовалось доказать.

Последний результат останется справедливым и в случае обобщенных декартовых координат, если его формулировать так: вектор $\mathbf{Q}$, ковариантные координаты которого суть A и B, перпендикулярен к прямой (1).

Для доказательства вспомним формулу для скалярного произведения векторов в обобщенных координатах (§ 56), из которой опять следует, что $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$. Под $\mathbf{P} = (B, -A)$ мы, как и выше, подразумеваем вектор, обычные (контравариантные) координаты которого суть B и $-A$.

---

[1]) Действительно, в этом случае вектор $\mathbf{P} = (0, -A)$ параллелен оси Oy, так же как и данная прямая $Ax + C = 0$.

§ 96. Нормальное уравнение прямой

Считая координаты прямоугольными и пользуясь указанным выше свойством вектора $\mathbf{Q} = (A, B)$, мы можем придать уравнению прямой

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

вид, на который следует обратить внимание. Именно, умножая уравнение (1) на некоторый множитель λ (отличный от нуля), т. е. переписав его в виде

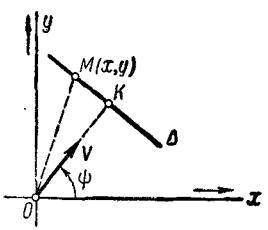
$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0, \tag{2}$$

можно всегда добиться того, чтобы вектор $\mathbf{V} = (\lambda A, \lambda B)$, который на основании сказанного в предыдущем параграфе перпендикулярен к данной прямой, был ортом. Для этого достаточно выбрать λ так, чтобы

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1,$$

т. е.

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3}$$



Черт. 94

Чтобы остановиться на каком-нибудь определенном знаке перед радикалом, условимся подбирать его так, чтобы произведение λC было отрицательной величиной (геометрическое значение этого условия будет указано ниже); в случае же, когда $C = 0$, будем выбирать знак перед радикалом по произволу.

Обозначая через ψ угол, составляемый ортом $\mathbf{V} = (\lambda A, \lambda B)$ с осью Ox (и отсчитываемый от этой оси), а через $-p$ произведение λC, будем иметь

$$\lambda A = \cos\psi, \quad \lambda B = \sin\psi, \quad \lambda C = -p, \tag{4}$$

и уравнение (2) примет вид

$$x\cos\psi + y\sin\psi - p = 0. \tag{5}$$

Последнее уравнение носит название *уравнения прямой в нормальном виде* (нормальный вид Hesse).

Мы знаем, что вектор $\mathbf{V} = (\cos\psi, \sin\psi)$ перпендикулярен к нашей прямой Δ. Покажем, что при нашем условии относительно знака λ (при $C \neq 0$) вектор $\mathbf{V}$, если его приложить к началу координат, будет обращен в сторону Δ и что $p = |OK|$ есть длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на Δ (черт. 94); K обозначает основание этого перпендикуляра.

Действительно, если $M(x, y)$— некоторая точка на Δ, то, обозначая через OK алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{OK}$ по направлению $\mathbf{V}$, будем иметь $OK = \mathbf{V}\cdot\overrightarrow{OM}$ [1]). Но $\mathbf{V} = (\cos\psi, \sin\psi)$, $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Следовательно, $OK = x\cos\psi + y\sin\psi$, откуда, на основании (5), $OK = p$. Так как по условию $p > 0$, то вектор $\overrightarrow{OK}$ должен иметь направление $\mathbf{V}$; его длина равна p; это и доказывает наше утверждение.

Добавим, что когда $C = 0$, то $p = 0$, а положительное направление $\mathbf{V}$ может быть выбрано по произволу, как было уже сказано.

Запомним, что для приведения уравнения (1) к нормальному виду достаточно умножить его на множитель λ, данный формулой (3), подобрав знак так, чтобы $\lambda C \leqslant 0$. Множитель λ называется *нормирующим множителем*.

В случае косоугольной необобщенной системы координат вектор $\mathbf{V}$ с ковариантными координатами λA, λB перпендикулярен к Δ (см. предыдущий параграф). Чтобы этот вектор был ортом, надо подобрать λ так, чтобы (§ 57) $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 - 2(\lambda A)(\lambda B)\cos\nu = \sin^2\nu$, откуда

$$\lambda = \frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}}. \tag{6}$$

Выбрав знак перед радикалом так, чтобы $\lambda C \leqslant 0$, обозначая через α, β углы орта $\mathbf{V}$ с осями Ox, Oy, а через $-p$ произведение λC, будем иметь [2])

$$\lambda A = \cos\alpha,\ \lambda B = \cos\beta,\ \lambda C = -p, \tag{7}$$

и уравнение (2) примет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0, \tag{8}$$

называемый нормальным видом.

Так же, как и выше, легко показать (достаточно буквально повторить предыдущие рассуждения), что орт $\mathbf{V}$, будучи приложен к O, будет обращен в сторону прямой Δ и что p есть длина перпендикуляра, опущенного из O на Δ.

Множитель λ, определяемый формулой (6) и условием $\lambda C \leqslant 0$, по умножении на который уравнение (1) обращается в нормальное, и здесь называется нормирующим множителем.

Упражнения

1. Привести к нормальному виду уравнения (в прямоугольных координатах):

a) $x - y + 1 = 0$; b) $x + y = 0$; c) $2x + 3y - 1 = 0$; d) $x + 4 = 0$.

---

[1]) Действительно, OK есть алгебраическое значение прямоугольной проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на направление, характеризуемое ортом $\mathbf{V}$.

[2]) Вместо двух углов α и β можно ввести один угол ψ с осью Ox, который отсчитывается от Ox, с учетом направления отсчета. Тогда

$$\cos\alpha = \cos\psi,\ \cos\beta = \cos(\nu - \psi).$$

Ответ.

a) $\frac{x}{-\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ или $x\cos\frac{3\pi}{4}+y\sin\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0;$

b) $\frac{x}{\pm\sqrt{2}}+\frac{y}{\pm\sqrt{2}}=0$ или $\pm x\cos\frac{\pi}{4}\pm y\sin\frac{\pi}{4}=0;$

c) $\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$ или $x\cos\psi+y\sin\psi-\frac{1}{\sqrt{13}}=0,$

где

$$\cos\psi=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \sin\psi=\frac{3}{\sqrt{13}};$$

d) $-x-4=0$ или $x\cos\pi-4=0.$

2. Найти длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, рассматриваемые в предыдущем упражнении.

Ответ. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) 0; c) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; d) 4.

III. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ

В предыдущем отделе мы подробно ознакомились с вопросом о представлении прямых при помощи уравнений. Мы увидели, что прямые изображаются уравнениями первой степени. Таким образом, все геометрические вопросы, касающиеся прямых, сводятся к рассмотрению этих уравнений.

Мы решим теперь ряд таких вопросов, наиболее простых и основных, и начнем с решения задач, касающихся прямых, уравнения которых даны. Затем мы решим несколько задач, которые требуют нахождения уравнений прямых по тем или иным геометрическим условиям.

Во всем дальнейшем под словами «дана прямая», «найти прямую» и т. д. мы подразумеваем «дано уравнение прямой», «найти уравнение прямой» и т. д.

В зависимости от удобства, а также имея в виду приложения, мы будем задаваться тем или иным видом уравнения прямой.

Добавим еще, что в предыдущих параграфах содержатся все элементы, требуемые для решения приводимых ниже задач, так что читатель, усвоивший содержание предыдущих параграфов, а также некоторые простые общие предложения, приводимые ниже (§ 106 и 111), может без всякого труда решить эти задачи самостоятельно, что мы и рекомендуем ему проделать. Мы могли бы смело отнести эти задачи к категории «упражнений», и если этого не делаем, то только потому, что результаты решения имеют важное общее значение, которое следует подчеркнуть.