Ответ.

a) $\frac{x}{-\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ или $x\cos\frac{3\pi}{4}+y\sin\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0;$

b) $\frac{x}{\pm\sqrt{2}}+\frac{y}{\pm\sqrt{2}}=0$ или $\pm x\cos\frac{\pi}{4}\pm y\sin\frac{\pi}{4}=0;$

c) $\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$ или $x\cos\psi+y\sin\psi-\frac{1}{\sqrt{13}}=0,$

где

$$\cos\psi=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \sin\psi=\frac{3}{\sqrt{13}};$$

d) $-x-4=0$ или $x\cos\pi-4=0.$

2. Найти длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, рассматриваемые в предыдущем упражнении.

Ответ. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) 0; c) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; d) 4.

III. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ

В предыдущем отделе мы подробно ознакомились с вопросом о представлении прямых при помощи уравнений. Мы увидели, что прямые изображаются уравнениями первой степени. Таким образом, все геометрические вопросы, касающиеся прямых, сводятся к рассмотрению этих уравнений.

Мы решим теперь ряд таких вопросов, наиболее простых и основных, и начнем с решения задач, касающихся прямых, уравнения которых даны. Затем мы решим несколько задач, которые требуют нахождения уравнений прямых по тем или иным геометрическим условиям.

Во всем дальнейшем под словами «дана прямая», «найти прямую» и т. д. мы подразумеваем «дано уравнение прямой», «найти уравнение прямой» и т. д.

В зависимости от удобства, а также имея в виду приложения, мы будем задаваться тем или иным видом уравнения прямой.

Добавим еще, что в предыдущих параграфах содержатся все элементы, требуемые для решения приводимых ниже задач, так что читатель, усвоивший содержание предыдущих параграфов, а также некоторые простые общие предложения, приводимые ниже (§ 106 и 111), может без всякого труда решить эти задачи самостоятельно, что мы и рекомендуем ему проделать. Мы могли бы смело отнести эти задачи к категории «упражнений», и если этого не делаем, то только потому, что результаты решения имеют важное общее значение, которое следует подчеркнуть.

§ 97. Задача 1. Найти условия параллельности и совпадения двух прямых

Пусть прямые заданы уравнениями в общем виде

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{1}$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{2}$$

Для параллельности их, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы векторы их направлений (см. § 95) $\mathbf{P}_1=(B_1, -A_1)$ и $\mathbf{P}_2=(B_2, -A_2)$ были параллельны. Вспоминая же условие параллельности векторов, получим

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}, \tag{3}$$

или

$$A_1B_2-A_2B_1=0. \tag{3a}$$

Итак, *для параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных x, y одного уравнения были пропорциональны соответствующим коэффициентам другого.*

Предыдущее условие (3) можно записать еще так:

$$A_2=kA_1, \quad B_2=kB_1, \tag{4}$$

где k — некоторое постоянное число [общее значение отношений (3)].

Для того чтобы две прямые совпадали (совпадение есть частный случай параллельности), к условию (3) или (4) надо присоединить еще одно, которое выводится так. Пусть (x, y) обозначает любую точку, принадлежащую данным прямым. Тогда x и y одновременно удовлетворяют уравнениям (1) и (2). Умножая (2) на k и вычитая из (1), получим, принимая во внимание (4): $C_2=kC_1$.

Итак, в случае совпадения мы должны иметь

$$A_2=kA_1, \quad B_2=kB_1, \quad C_2=kC_1, \tag{5}$$

или, что сводится к тому же:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}. \tag{6}$$

Очевидно, что условие (5) также и достаточно, так как при этом условии уравнение (1) получается из (2) умножением на постоянное число и, следовательно, эквивалентно ему.

Итак, *для совпадения двух прямых, заданных уравнениями общего вида, необходимо и достаточно, чтобы все три коэффициента*

одного уравнения были пропорциональны соответствующим коэффициентам другого.

Из равенств (5) следует, что имеем *тождество*

$$A_2x + B_2y + C_2 = k(A_1x + B_1y + C_1), \tag{5a}$$

т. е. равенство, справедливое при всех значениях x, y. Обратно, если (5а) есть тождество, то из него следуют [1]) равенства (5).

Поэтому можно сказать, что для совпадения прямых, данных уравнениями (1) и (2), необходимо и достаточно существование такого постоянного числа k, при котором (5а) есть тождество.

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2, \tag{7}$$

то, очевидно, условие параллельности сводится к равенству угловых коэффициентов, т. е.

$$a_2 = a_1, \tag{8}$$

а условия совпадения — к равенствам

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = b_1. \tag{9}$$

Эти условия непосредственно вытекают из вышеприведенных условий (3) (для параллельности) и (6) (для совпадения), если уравнения (7) написать так: $a_1x - y - b_1 = 0$, $a_2x - y - b_2 = 0$.

Впрочем условия (8) и (9) совершенно очевидны, если вспомнить геометрическое значение коэффициентов приведенного уравнения.

Полученные в этом параграфе результаты непосредственно следуют из элементов теории линейных уравнений, как это станет ясным при решении следующей задачи.

§ 98. Задача 2. Найти точку пересечения двух прямых

Если прямые заданы уравнениями (1) и (2) предыдущего параграфа, то точку их пересечения найдем, решая систему уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{1}$$

Действительно, координаты (x, y) искомой точки должны удовлетворять как уравнению первой прямой, так и уравнению второй.

Из элементов теории определителей известно, что [2]):

---

[1]) Легко видеть, что из тождества вида $Ax + By + C = A'x + B'y + C'$ (*) следует $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Действительно, так как, по условию, (*) справедливо при всех значениях x, y, то оно останется справедливым, если положить $x = y = 0$, а это дает $C = C'$. Полагая затем в (*) $x = 1$, $y = 0$, получим $A = A'$; аналогично получим $B = B'$.

[2]) См. Добавление, § 7.

1°. Если определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 \tag{2}$$

отличен от нуля, то система (1) имеет одно и только одно решение. Следовательно, в этом случае имеется одна точка пересечения.

2°. Если определитель (2) равен нулю [1]), то имеем тождественно (т. е. для всех x, y):

$$A_2x + B_2y = k(A_1x + B_1y), \quad \text{т. е.} \quad A_2 = kA_1, \; B_2 = kB_1, \tag{3}$$

где k — некоторое число. Если при этом $C_2 \neq kC_1$, то система (1) не имеет решений. Значит, прямые параллельны, но не совпадают.

3°. Если, наконец, $A_2 = kA_1$, $B_2 = kB_1$, $C_2 = kC_1$, т. е. тождественно

$$A_2x + B_2y + C_2 = k(A_1x + B_1y + C_1), \tag{4}$$

то уравнения (2) эквивалентны между собою, и прямые совпадают. Обратно, если уравнения (2) эквивалентны, то необходимо имеет место (4).

Мы, таким образом, вновь получили результаты предыдущего параграфа.

В рассматриваемом простом случае мы, конечно, легко могли бы обойтись без теории определителей.

Замечание. Если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то, как мы видели, точка пересечения существует. Если теперь, оставляя неподвижной одну из прямых, вращать другую (вокруг одной из ее точек, отличных от точки пересечения), так, чтобы она стремилась стать параллельной первой прямой, то точка пересечения будет беспредельно удаляться. Поэтому часто говорят, что параллельные прямые пересекаются, но точка их пересечения находится в бесконечности («несобственная» или «бесконечно удаленная» точка).

Упражнения и дополнения

1. Найти точку пересечения прямых

$$3x + 2y - 1 = 0, \quad 2x + y + 5 = 0.$$

Ответ. Точка $(-11, 17)$.

2. Найти точку пересечения прямых

$$5x - 2y = 5 \quad \text{и} \quad 10x - 4y = 1.$$

Ответ. Точка пересечения в бесконечности (прямые параллельны).

---

[1]) Ранг этого определителя равен тогда единице: нулю он равен быть не может, ибо мы считаем, что A_1 и B_1 не могут быть равны одновременно нулю, так же, как и A_2, B_2.

3. Найти точку пересечения прямой, заданной параметрически:

$$x=2t, \quad y=1-3t,$$

с прямой $2x-6y-5=0$.

Ответ. $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$.

§ 99. Задача 3. Найти формулы перехода к новой декартовой системе, оси которой заданы уравнениями

Иногда требуется перейти от данной системы декартовых координат к другой, оси которой $O'y''$, $O'x''$ расположены на пересекающихся прямых, заданных соответственно уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2}$$

причем выбор положительных направлений этих осей и длин координатных векторов зависит от нашего произвола. Эту задачу проще всего решить следующим образом.

Имеем (§ 66)

$$x'=l'_1x+l'_2y+a', \quad y'=m'_1x+m'_2y+b'.$$

Точки новой оси $O'y''$ удовлетворяют уравнению $x''=0$, т. е.

$$l'_1x+l'_2y+a'=0;$$

так как это уравнение должно быть эквивалентно уравнению (1), то на основании сказанного в предыдущем параграфе

$$l'_1x+l'_2y+a'=k_1(A_1x+B_1y+C_1),$$

где k_1 — некоторая постоянная, отличная от нуля. Точно так же

$$m'_1x+m'_2y+b'=k_2(A_2x+B_2y+C_2).$$

Итак, будем иметь следующие формулы перехода:

$$x'=k_1(A_1x+B_1y+C_1), \quad y'=k_2(A_2x+B_2y+C_2), \tag{3}$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные, отличные от нуля. От величин и знаков k_1 и k_2 зависят, очевидно, величины и положительные направления новых координатных векторов. Если эти величины и положительные направления нам безразличны, то мы можем придать k_1, k_2 произвольно выбранные значения. Проще всего будет положить $k_1=k_2=1$, т. е.

$$x'=A_1x+B_1y+C_1, \quad y'=A_2x+B_2y+C_2. \tag{3a}$$

Решая (3) или (3а) относительно x, y, получим выражения x, y через x'', y''. Это решение всегда возможно, ибо, по заданию, прямые (1), (2) — пересекающиеся, т. е.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 100. Задача 4. Найти точки пересечения данной прямой с данной кривой

Задача эта, так же как задача 2, представляет собой частный случай задачи пересечения двух линий, о которой говорилось в § 87.

Пусть

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение данной кривой. Представим данную прямую параметрически (§ 88):

$$x = x_0 + Xt, \quad y = y_0 + Yt \tag{2}$$

(где x_0, y_0, X, Y — постоянные); значения параметра t, соответствующие искомым точкам пересечения, должны удовлетворять уравнению (см. § 87)

$$\Phi(x_0 + Xt, \ y_0 + Yt) = 0. \tag{3}$$

Корни t_1, t_2 и т. д. этого уравнения, будучи подставлены в (2), дадут нам значения координат искомых точек. Число корней уравнения (3) может быть и бесконечно большим.

Остановимся более подробно на случае, когда кривая (1) — алгебраическая, n-го порядка, т. е. $\Phi(x, y)$ есть полином вида [1])

$$\Phi(x, y) = \sum_{k,l} a_{k,l} x^k y^l \qquad (k + l \leqslant n). \tag{4}$$

Тогда, очевидно, степень уравнения (3) относительно t будет n (в общем случае) или меньше n, если произойдут сокращения.

Может также случиться, что уравнение (3) обратится в тождество; в этом случае все точки прямой (2) принадлежат кривой (1), т. е. прямяя (1) есть составная часть кривой (2). Если исключить этот случай, то для определения t будем иметь уравнение степени меньшей или равной n, так что точек пересечения будет не больше n. Число корней будет всегда равно n, если ввести в рассмотрение «мнимые» и «бесконечно удаленные» точки, а также «совпадающие» точки. См. об этом главу VI, § 174.

---

[1]) Коэффициенты при $x^k y^l$ мы обозначили буквой с двумя значками k и l, чтобы наглядно показать, к какому члену относится коэффициент.

Из сказанного, в частности, выводим следующее заключение: если прямая имеет с линией n-го порядка более n общих точек, то прямая целиком принадлежит этой линии.

Предложение это можно доказать и так. Рассмотрим сперва случай, когда наша прямая есть ось Ox, т. е. ее уравнение есть $y = 0$. Подставив в (1) значение $y = 0$, получим на основании (4) уравнение

$$a_{n,0}x^n + a_{n-1,0}x^{n-1} + \ldots + a_{0,0} = 0$$

не выше n-й степени. Если оно имеет больше n корней, то все его коэффициенты равны нулю, т. е.

$$a_{n,0} = a_{n-1,0} = \ldots = a_{1,0} = a_{0,0} = 0.$$

Значит, все коэффициенты членов полинома (4), не содержащих y, равны нулю и поэтому y входит во все члены полинома $\Phi(x, y)$.

Взяв y за скобки, будем иметь тождественно

$$\Phi(x, y) = y\Phi_1(x, y),$$

где $\Phi_1(x, y)$ есть некоторый полином $(n-1)$-й степени. Уравнение кривой (1) принимает поэтому вид

$$y \cdot \Phi_1(x, y) = 0, \tag{5}$$

и наша линия распадается на две: $y = 0$ и $\Phi_1(x, y) = 0$.

Если наша прямая задана уравнением общего вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

то возьмем эту прямую за новую ось $O'x'$, а за новую ось $O'y'$ — произвольную другую прямую (пересекающуюся с предыдущей)

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

т. е. положим (см. предыдущий параграф)

$$y' = Ax + By + C, \quad x' = A'x + B'y + C'. \tag{7}$$

В новых переменных уравнение (1) напишется так:

$$\Psi(x', y') = 0, \tag{8}$$

где $\Psi(x', y') = \Phi(x, y)$, если вместо x', y' внести их выражения (7).

На основании предыдущего, если прямая (6) пересекает линию (1) больше чем в n точках (и, значит, прямая $y' = 0$ пересекает линию (8) больше чем в n точках), будем иметь тождество

$$\Psi(x', y') = y'\Psi_1(x', y'),$$

где $\Psi_1(x', y')$ — полином $(n-1)$-й степени. Выражая x', y' снова через x, y, получим тождество

$$\Phi(x, y) = (Ax + By + C)\Phi_1(x, y), \tag{9}$$

где $\Phi_1(x, y)$ — полином, получаемый из $\Psi_1(x', y')$ подстановкой (7).

Итак, если прямая (6) имеет с линией n-го порядка (1) более n общих точек, то левая часть уравнения (1) разлагается на два множителя, согласно формуле (9), и, следовательно, кривая (1) распадается на прямую (6) и некоторую линию $(n-1)$-го порядка $\Phi_1(x, y) = 0$.

Упражнения и приложения

1. Найти точки пересечения прямой $x = 1 + t$, $y = 1 - t$ и кривой[1]).

$$(x-1)^2 + y^2 = 16$$

Ответ. $\left(\frac{3+\sqrt{31}}{2}, \frac{1-\sqrt{31}}{2}\right)$ и $\left(\frac{3-\sqrt{31}}{2}, \frac{1+\sqrt{31}}{2}\right)$.

2. Степень точки относительно окружности. Даны окружность уравнением (координаты — прямоугольные):

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \qquad (*)$$

и прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, представленная параметрически:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \qquad (**)$$

где l, m — координаты направления. [Мы знаем, что в этом случае t представляет собою расстояние точки (x, y) до точки (x_0, y_0), снабженное знаком; см. § 88].

Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения нашей прямой с окружностью. Доказать, что произведение расстояний M_0M_1 и M_0M_2 не зависит от l и m, т. е. от направления секущей, проведенной из точки M_0[2]). Это произведение, снабженное знаком [оно считается положительным, когда $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ одинаково направлены, отрицательным — в противном случае[3])] называется *степенью точки M_0 относительно данной окружности*. Найти выражение для этой степени.

Решение. Подставляя значения (**) в уравнение (*), получим $(x_0 + lt)^2 + (y_0 + mt)^2 + 2A(x_0 + lt) + 2B(y_0 + mt) + C = 0$, откуда, принимая во внимание, что $l^2 + m^2 = 1$:

$$t^2 + 2(lx_0 + my_0 + Al + Bm)t + x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C = 0.$$

Но мы знаем из элементарной алгебры, что произведение корней t_1, t_2 этого квадратного уравнения равно свободному члену, т. е.

$$t_1t_2 = x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C.$$

Но ведь $t_1 = M_0M_1$, $t_2 = M_0M_2$, где M_1 и M_2 суть точки пересечения, соответствующие корням t_1 и t_2. Следовательно, для степени k точки $M_0(x_0, y_0)$ относительно данной окружности имеем выражение

$$k = x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C; \qquad (***)$$

так как это выражение не зависит от l и m, то наше утверждение доказано.

---

[1]) Эта кривая есть окружность, если координаты прямоугольные.

[2]) Эта теорема должна быть известна читателю и из элементарной геометрии.

[3]) Произведение будет положительным, если M_0 находится вне окружности, и отрицательным, если M_0 находится внутри (если M_0 находится на самой окружности, то произведение равно нулю).

Вместе с тем мы видим, что для получения степени k данной точки относительно окружности достаточно в левую часть ее уравнения, приведенного к виду (*), подставить на место x и y координаты данной точки.

3. Доказать, что геометрическое место точек, степени (см. предыдущее упражнение) которых относительно двух данных окружностей равны между собою, есть прямая. Эта прямая называется *радикальною осью* данных окружностей.

Доказательство. Пусть уравнения данных окружностей суть

$$x^2+y^2+2A_1x+2B_1y+C_1=0 \text{ и } x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2=0.$$

Если (x_0, y_0) есть одна из точек искомого геометрического места, то согласно условию [см. предыдущее упражнение, формула (***)]

$$x_0^2+y_0^2+2A_1x_0+2B_1y_0+C_1=x_0^2+y_0^2+2A_2x_0+2B_2y_0+C_2,$$

или, после упрощений,

$$2(A_1-A_2)x_0+2(B_1-B_2)y_0+C_1-C_2=0.$$

Следовательно, координаты (x_0, y_0) точек нашего геометрического места удовлетворяют уравнению первой степени относительно этих координат; значит, наше геометрическое место есть прямая.

Если данные окружности пересекаются, то радикальная ось есть прямая, проходящая через точки пересечения. Действительно, точки пересечения имеют одинаковые степени относительно обеих окружностей (равные нулю).

§ 101. Задача 5. Найти угол между двумя данными прямыми

Под углом между прямыми Δ_1 и Δ_2, *рассматриваемыми в указанном порядке*, мы будем подразумевать угол, на который надо повернуть прямую Δ_1 (в положительном направлении вращения) для того, чтобы привести ее в совпадение с прямой Δ_2 (черт. 95); этот угол мы будем обозначать через $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$. Таким образом, порядок, в котором мы рассматриваем данные прямые, имеет значение. Если $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ обозначают векторы направлений данных прямых, то, очевидно,

Черт. 95

$$\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2} + k\pi,$$

где k — целое число, а $\widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}$ обозначает угол, определенный так, как в § 48. Действительно, при повороте прямой на угол π она снова совмещается сама с собой [1]).

Поэтому будем иметь

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \operatorname{tg}(\widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}); \tag{1}$$

обратно: из предыдущей формулы следует, что $\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2} + k\pi$.

[1]) См. § 89.

Если прямые Δ_1 и Δ_2 заданы уравнениями в общем виде

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то можем взять

$$\mathbf{P}_1=(B_1,\ -A_1),\ \mathbf{P}_2=(B_2,\ -A_2). \tag{3}$$

Считая теперь координаты прямоугольными, можем применить формулу (3) § 48, куда надо подставить

$$\varphi=\widehat{\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2},\ X_1=B_1,\ Y_1=-A_1,\ X_2=B_2,\ Y_2=-A_2.$$

Таким образом, получим требуемую формулу:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{4}$$

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$y=a_1x+b_1,\ y=a_2x+b_2, \tag{5}$$

то предыдущая формула дает (в ней надо положить $A_1=a_1$, $B_1=-1$, $A_2=a_2$, $B_2=-1$):

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}. \tag{6}$$

Эту формулу необходимо хорошо помнить; не надо также забывать, что порядок букв имеет значение: в числителе вычитается угловой коэффициент той прямой, от которой отсчитывается угол.

Упражнения

(координаты предполагаются прямоугольными)

1. Найти угол между прямыми Δ_1 и Δ_2, заданными уравнениями

$$x-y-1=0 \quad \text{и} \quad 2x+3y+2=0.$$

Ответ. $\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})=-5$.

2. Найти угол между прямыми

$$2x-5y+5=0,\quad 5x+2y+12=0.$$

Ответ. $\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})=\infty$ т. е. прямые взаимно перпендикулярны.

3. Найти угол между прямыми Δ_1 и Δ_2, заданными уравнениями

$$x-1=0 \quad \text{и} \quad 2x+2y+5=0.$$

Ответ. $\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})=1$, $\widehat{\Delta_1,\Delta_2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

§ 102. Задача 6. Найти условие перпендикулярности двух прямых

Будем считать координаты прямоугольными. Если прямые Δ_1 и Δ_2 взаимно перпендикулярны, то

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \infty, \tag{1}$$

откуда, согласно формуле (4) предыдущего параграфа,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \tag{2}$$

это и есть условие перпендикулярности прямых Δ_1 и Δ_2.

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2,$$

то условие перпендикулярности получит вид

$$a_1a_2 + 1 = 0, \tag{3}$$

или

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}. \tag{4}$$

Последнее условие надо хорошо помнить. Словами его можно выразить так: *угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых противоположны по величине и по знаку.*

Заметим, что формула (2) непосредственно вытекает из условия перпендикулярности векторов направления $\mathbf{P}_1 = (B_1, -A_1)$ и $\mathbf{P}_2 = (B_2, -A_2)$. Действительно, имеем $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = B_1B_2 + A_1A_2$. Но для перпендикулярности векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 0$, откуда и вытекает формула (2).

Напомним, что формулы этого и предыдущего параграфов относятся к случаю прямоугольных координат, тогда как условие параллельности было получено нами для общего случая (§ 97).

Нетрудно вывести условие перпендикулярности и для случая обобщенных декартовых координат, пользуясь формулами § 56 для скалярного произведения двух векторов. Предоставляем читателю написать соответствующие формулы.

Упражнения и дополнения

(координаты предполагаются прямоугольными)

1. Найти угловой коэффициент a прямой, перпендикулярной к прямой $y = -3x + 1$.

Ответ. $a = +\frac{1}{3}$.

2. Показать, что прямые $x - 5y + 1 = 0$ и $5x + y - 8 = 0$ взаимно перпендикулярны.

3. Выразить условие перпендикулярности прямых

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}.$$

Ответ. $\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}$.

4. Выразить условие перпендикулярности прямых

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}.$$

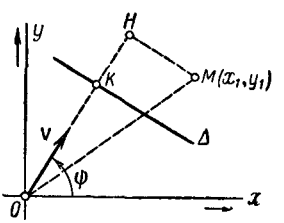
Ответ. $X_1X_2+Y_1Y_2=0$.

§ 103. Задача 7. Найти расстояние данной точки до данной прямой

Предположим сперва координаты прямоугольными; пусть рассматриваемая прямая Δ дана нормальным уравнением (§ 96):

$$x\cos\psi+y\sin\psi-p=0. \tag{1}$$

Если $M(x_1, y_1)$ есть данная точка (черт. 96), то ее расстояние до прямой Δ будет, очевидно, равно длине отрезка KH, где K есть основание перпендикуляра, опущенного из O на Δ, а H есть прямоугольная проекция точки M на этот перпендикуляр (или на его продолжение). Будем приписывать этому расстоянию определенный знак; именно, под расстоянием h точки M до прямой Δ будем понимать алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{KH}$ по направлению орта $\mathbf{V}$ (мы применяем обозначения § 96).



Черт. 96

Это значит, что расстояние h мы будем считать положительным, когда точка M и начало координат находятся по разные стороны Δ; в противном случае h будет отрицательным. Этот критерий отпадает, если Δ проходит через O; однако, очевидно, во всех случаях точкам, находящимся по одну и ту же сторону Δ, соответствуют значения h, имеющие один и тот же знак, а точкам, расположенным по разные стороны,— значения, имеющие различные знаки.

Имеем, очевидно, $OH=\overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{V}$, где OH обозначает алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{OH}$ по направлению $\mathbf{V}$; кроме того, $OK=p$. Поэтому $h=\overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{V}-p$. Но ведь $\overrightarrow{OM}=(x_1, y_1)$, $\mathbf{V}=(\cos\psi, \sin\psi)$. Следовательно, $\overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{V}=x_1\cos\psi+y_1\sin\psi$, откуда, наконец,

$$h=x_1\cos\psi+y_1\sin\psi-p. \tag{2}$$

Итак, имеем правило: *для того чтобы найти расстояние точки до прямой, надо в левую часть нормального уравнения данной прямой на место текущих координат* [1]) *подставить координаты данной точки.*

Если уравнение прямой дано в общем виде

$$Ax+By+C=0, \tag{3}$$

то для решения задачи достаточно привести это уравнение к нормальному виду, умножая обе части на нормирующий множитель

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{4}$$

где знак перед радикалом должен быть выбран в соответствии со сказанным в § 96.

Итак, имеем формулу

$$h=\lambda(Ax_1+By_1+C), \tag{5}$$

где λ — множитель, не зависящий от координат точки $M(x_1, y_1)$. Эта формула остается в силе и для декартовых координат общего вида, только в этом случае постоянный множитель λ дается уже не формулой (4), а более сложной.

Действительно, пусть (3) есть уравнение прямой в любой декартовой системе. Взяв произвольно прямоугольную систему, обозначим через x', y' координаты в новой системе. Пусть при переходе к новой системе $Ax+By+C$ обращается в $A'x'+B'y'+C'$. Тогда в новой системе $h=\lambda(A'x_1'+B'y_1'+C)$, где $\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}$, а x_1', y_1' — новые координаты точки M. Возвращаясь к старым координатам, получим снова (5).

Упражнения

1. Найти расстояние начала координат до прямой $x+2y-1=0$ (в прямоугольных координатах).

Ответ. $\frac{0+2\cdot 0-1}{\sqrt{1^2+2^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Найти расстояние точки (3, 5) до прямой $2x+y+2=0$ (в прямоугольных координатах).

Ответ. $\frac{2\cdot 3+5+2}{-\sqrt{2^2+1^2}}=-\frac{13}{\sqrt{5}}$.

---

[1]) Координаты x и y, фигурирующие в уравнении какой-либо линии $F(x, y)=0$, часто называются *текущими* координатами.

3. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$2x+3y+6=0, \quad 2x+3y-1=0$$

(в прямоугольных координатах).

(Указание. Возьмите какую-либо точку на одной из прямых и найдите ее расстояние h до другой).

Ответ. $h=\frac{7}{\sqrt{13}}$.

4. Доказать, что в необобщенных косоугольных координатах

$$\lambda=\frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}},$$

где ν — координатный угол.

§ 104. Задача 8. Найти отношение, в котором данная прямая делит отрезок, соединяющий две данные точки

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — данные точки и M — точка пересечения прямой M_1M_2 с данной прямой Δ (составьте чертеж!). Очевидно, искомое отношение

$$k=\frac{M_1M}{MM_2},$$

которому мы будем приписывать знак, как в § 41, равно по величине и знаку выражению $-\frac{h_1}{h_2}$, где h_1 и h_2 обозначают соответственно расстояния точек M_1 и M_2 до прямой Δ, снабженные знаками согласно правилу предыдущего параграфа. Знак минус перед последней дробью взят потому, что если точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны прямой Δ, величины h_1 и h_2 будут противоположного знака (согласно сказанному в предыдущем параграфе), тогда как отношение k в этом случае должно быть положительным (§ 41); наоборот, если M_1 и M_2 лежат по одну сторону от Δ, то h_1 и h_2 одного знака, тогда как отношение k должно быть отрицательным.

Но мы имеем (см. предыдущий параграф) $h_1=\lambda(Ax_1+By_1+C)$, $h_2=\lambda(Ax_2+By_2+C)$, где $Ax+By+C$ есть левая часть уравнения прямой Δ, а λ — постоянный множитель. Следовательно, будем иметь окончательно:

$$k=\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}. \tag{1}$$

§ 105. Число независимых постоянных в уравнении прямой

Прежде чем приступить к решению задач, в которых требуется определить уравнение прямой по тем или иным условиям, сделаем следующее замечание общего характера.

Приведенное уравнение прямой

$$y = ax + b$$

содержит в себе две постоянные a и b, которые вполне определяют положение прямой. В соответствии с этим говорят, что положение прямой на плоскости определяется двумя независимыми постоянными. Ясно поэтому, что задача нахождения прямой будет, вообще говоря, определенной тогда, когда даны *два* условия [1]) (позволяющие определить две неизвестные постоянные a и b).

Этому как будто противоречит общий вид уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

содержащего три постоянные A, B и C. Но на самом деле существенную роль играют не сами эти три величины, а отношения двух из них к третьей. Это происходит от того, что, если в предыдущем уравнении все коэффициенты заменить на пропорциональные им величины, оно будет выражать ту же прямую.

Например, если известно, что коэффициенты искомой прямой удовлетворяют двум соотношениям:

$$\frac{A}{C} = 3, \quad \frac{B}{C} = 5,$$

или, что все равно,

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = \frac{C}{1},$$

этого уже достаточно, чтобы написать уравнение искомой прямой:

$$3x + 5y + 1 = 0,$$

или же всякое другое, получаемое из предыдущего умножением на постоянный множитель, например:

$$6x + 10y + 2 = 0.$$

§ 106. Пучок прямых

Из сказанного в предыдущем параграфе ясно, что если перед нами поставлена задача о нахождении прямой по *одному* заданному условию, то такая задача будет неопределенной, т. е., вообще говоря, будет допускать бесчисленное множество решений, однако, зависящих уже не от двух, а от одной независимой постоянной. Примером может служить задача нахождения прямой, проходящей через одну заданную точку. Эта задача допускает бесчисленное множество решений.

[1]) Здесь под «условием» мы понимаем требование, которое можно выразить аналитически при помощи одного уравнения. Например, требование, чтобы прямая $y = ax + b$ проходила через точку (3, 5), выражается одним равенством: $5 = a \cdot 3 + b$, следовательно, мы здесь имеем одно «условие».

Совокупность прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$ называется *пучком прямых с центром* M_0.

Если X, Y обозначают коэффициенты направления прямой, принадлежащей пучку с центром в точке M_0, то уравнение этой прямой будет (§ 88)

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}. \tag{1}$$

Изменяя X и Y, можно, очевидно, получить любую прямую пучка. Следовательно, (1) есть, при произвольных X и Y (не равных одновременно нулю), общее уравнение прямых пучка. Это уравнение при $X \neq 0$ можно переписать так:

$$y-y_0=a(x-x_0), \tag{2}$$

где $a=\frac{Y}{X}$ есть угловой коэффициент прямой пучка. При $X=0$ (т. е. для прямой пучка, параллельной оси Oy) будем иметь

$$x-x_0=0. \tag{3}$$

Это последнее уравнение удобно рассматривать как частный вид уравнения (2), условившись говорить, что уравнение (3) соответствует случаю $a=\infty$ [1]).

Как и следовало ожидать, уравнение прямой, проходящей через заданную точку, зависит от одной независимой произвольной постоянной; если уравнение написано в виде (2), то этой постоянной является угловой коэффициент a.

Придавая a различные значения, мы будем получать различные прямые, проходящие через одну и ту же точку M_0; если еще условимся придавать a также и значение ∞ (понимая это в вышеприведенном смысле), то можно утверждать, что уравнение (2) изображает, при подходящем выборе коэффициента a, всякую прямую, проходящую через данную точку.

Заметим еще, что общее уравнение (1) прямых, проходящих через данную точку (x_0, y_0), можно, полагая $Y=A$, $X=-B$, переписать так:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \tag{4}$$

где A и B — произвольные постоянные (не равные одновременно нулю).

---

[1]) Написав уравнение (2) в виде $x-x_0=\frac{y-y_0}{a}$ и полагая $a=\infty$, получим $x-x_0=0$.

§ 107. Задача 9. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данному направлению

Если угловой коэффициент данного направления есть a, а данная точка есть M_1 (x_1, y_1), то уравнение искомой прямой, очевидно, будет

$$y - y_1 = a(x - x_1). \tag{1}$$

Если данное направление задано не угловым коэффициентом, а коэффициентами направления X, Y, то уравнение искомой прямой можно написать еще так:

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y}, \tag{2}$$

что, в сущности, сводится к тому же.

§ 108. Задача 10. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

Для этого достаточно в уравнении (2) предыдущего параграфа подобрать коэффициенты X и Y так, чтобы прямая проходила и через точку M_2. Замечая, что вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ расположен на искомой прямой, мы можем принять его за ее вектор направления, т. е. положить $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$; тогда уравнение искомой прямой напишется так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1}$$

Это же уравнение можно написать сразу, исходя из условия коллинеарности трех точек (x, y), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (см. § 38). На основании сказанного в упомянутом параграфе, уравнение искомой прямой можно написать и в следующем симметричном виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

§ 109. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную к заданной прямой

Будем считать координаты прямоугольными. Пусть, M_1 (x_1, y_1) — заданная точка и

$$y = a_1x + b_1 \tag{1}$$

— заданная прямая. Уравнение любой прямой, проходящей через M_1, имеет вид

$$y - y_1 = a(x - x_1); \tag{2}$$

для того чтобы эта прямая была перпендикулярна к прямой (1), должно быть (§ 102)

$$a = -\frac{1}{a_1}. \tag{3}$$

Подставляя в последнее уравнение значение a из (3), получим

$$y - y_1 = -\frac{1}{a_1}(x - x_1), \tag{4}$$

и наша задача решена.

Если заданная прямая представлена уравнением в коэффициентах направления

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}, \tag{1a}$$

то уравнение искомой прямой будет

$$X(x - x_1) + Y(y - y_1) = 0; \tag{2a}$$

это следует как из предыдущего решения $\left(\text{в нашем случае } a_1 = \frac{Y}{X}\right)$, так и из того факта (§ 95), что вектор (A, B) перпендикулярен к прямой $Ax + By + C = 0$.

§ 110. Задача 12. Найти прямую, проходящую через заданную точку и составляющую с заданной прямой заданный угол

Координаты, как и при решении предыдущей задачи, считаются прямоугольными. Эта задача заключает в себе как частные случаи предыдущую задачу и задачу § 107.

Пусть α есть угол, который искомая прямая должна составлять с заданной прямой, предполагая, что этот угол отсчитывается от заданной прямой в положительном направлении (§ 101). При обозначениях предыдущего параграфа мы должны будем определить a из условия (§ 101):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a - a_1}{1 + aa_1}.$$

Решая последнее уравнение относительно a и подставляя найденное значение в уравнение (2) предыдущего параграфа, найдем требуемое уравнение:

$$y-y_1=\frac{a_1+\operatorname{tg}\alpha}{1-a_1\operatorname{tg}\alpha}(x-x_1).$$

Если направление отсчета углов не указано, то вместо $\operatorname{tg}\alpha$ надо взять $\pm\operatorname{tg}\alpha$. В этом случае задача допускает два решения; исключение составляют случаи $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, рассмотренные в двух предыдущих параграфах, когда задача имеет только одно решение.

Упражнения и дополнения (к § 106—110)

1. Найти прямую, проходящую через точку $(6, -2)$ и параллельную прямой

$$3x-8y+2=0.$$

Ответ. $3(x-6)-8(y+2)=0$.

2. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и параллельной прямой $Ax+By+C=0$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

3. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и перпендикулярной к прямой $Ax+By+C=0$, имеет в (прямоугольных координатах) вид

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0.$$

4. Найти прямую, проходящую через точку (2, 3) и перпендикулярную к прямой $3x-8y+2=0$ (в прямоугольных координатах).

Ответ. $8(x-2)+3(y-3)=0$.

5. Найти прямую, проходящую через точки (2, 3) и (7, 8).

Ответ. $\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{8-3}$, или $x-y+1=0$.

6. Найти прямую, проходящую через точку (1, 3) и составляющую с прямой $2x-y+5=0$ угол в 60° (в прямоугольных координатах).

Ответ. Если угол отсчитывается от данной прямой, то уравнение искомой прямой будет

$$y-3=\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}(x-1).$$

Если направление отсчета угла не указывается, то задача допускает два решения (второе решение получим из первого заменой $\sqrt{3}$ на $-\sqrt{3}$).

§ 111. Общее уравнение прямых, проходящих через пересечение двух данных

Иногда центр пучка прямых не задается непосредственно, а задаются две прямые, принадлежащие пучку. Тогда центр пучка можно найти как точку пересечения двух данных прямых.

Однако гораздо удобнее найти непосредственно общее уравнение прямых пучка, определяемого двумя данными прямыми, или, иными словами, найти общее уравнение прямых, проходящих через пересечение двух данных.

Пусть

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{2}$$

— уравнения заданных пересекающихся прямых.

Рассмотрим уравнение

$$l_1(A_1x+B_1y+C_1)+l_2(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{3}$$

где l_1 и l_2 обозначают некоторые произвольные постоянные величины, не равные одновременно нулю; это уравнение получается из уравнений (1) и (2) умножением их на постоянные l_1 и l_2 и почленным сложением.

Уравнение (3), которое можно переписать в виде

$$(l_1A_1+l_2A_2)x+(l_1B_1+l_2B_2)y+(l_1C_1+l_2C_2)=0, \tag{3a}$$

представляет собою уравнение некоторой прямой, ибо это — уравнение первой степени. Действительно, оба коэффициента при x и y в уравнении (3а) не могут быть одновременно равны нулю, так как в противном случае определитель $\begin{vmatrix} A_1A_2 \\ B_1B_2 \end{vmatrix}$ необходимо был бы равен нулю, и прямые (1) и (2) не пересекались бы, вопреки предположению.

Докажем теперь, что прямая (3) удовлетворяет условиям задачи, т. е. докажем, что *прямая* (3) *проходит через точку пересечения прямых* (1) *и* (2), *каковы бы ни были значения постоянных* l_1 *и* l_2.

В самом деле, если x_0, y_0 обозначают координаты точки пересечения прямых (1) и (2), то

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2=0,$$

а потому

$$l_1(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+l_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0,$$

т. е. координаты точки пересечения удовлетворяют уравнению (3), иначе говоря, точка (x_0, y_0) лежит на прямой (3), а это и требовалось доказать.

Введем для краткости обозначения:

$$F_1(x, y)=A_1x+B_1y+C_1,$$
$$F_2(x, y)=A_2x+B_2y+C_2.$$

$F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ представляют собою линейные функции пере-

менных x и y. При этих обозначениях уравнение (3) перепишется так:

$$l_1F_1(x, y)+l_2F_2(x, y)=0. \tag{4}$$

Придавая различные значения l_1 и l_2, мы получим различные прямые, проходящие через точку пересечения прямых (1) и (2).

В сущности положение прямой (4) зависит не от самих величин l_1 и l_2, а от их отношения

$$k=\frac{l_2}{l_1};$$

действительно, разделив уравнение (4) на l_1, мы приведем его к виду

$$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0. \tag{5}$$

Безоговорочно это можно сделать только в том случае, если $l_1 \neq 0$. Но если $l_1 = 0$ (а следовательно, $l_2 \neq 0$, ибо, по условию, l_1 и l_2 не могут быть равны одновременно нулю), то уравнение (4) сводится к следующему: $F_2(x, y) = 0$, т. е. к уравнению прямой (2). Условимся теперь допускать, что в уравнении (5) величина k может принимать и значение ∞, считая, что при этом уравнение (5) сводится к уравнению [1]) $F_2(x, y) = 0$. При этой оговорке уравнения (4) и (5) вполне эквивалентны.

Мы увидим в следующем параграфе, что при подходящем выборе величин l_1, l_2 в уравнении (4) [или при подходящем выборе k в (5)] можно получить любую прямую пучка, так что уравнение (4) или (5) есть действительно самое общее уравнение прямых пучка, определяемого двумя данными прямыми.

До сих пор мы предполагали, что данные прямые (1) и (2) пересекаются в некоторой точке на конечном расстоянии. Посмотрим теперь, что́ выражает уравнение (4), если данные прямые параллельны, но не совпадают, т. е. если $A_1 = mA_2$, $B_1 = mB_2$, $C_1 \neq mC_2$, где m — некоторое число, отличное от нуля. В этом случае уравнение (4) или, что́ все равно, уравнение (3а) принимает вид

$$A'x+B'y+C'=0, \tag{6}$$

где $A' = (ml_1 + l_2)A_2$, $B' = (ml_1 + l_2)B_2$, $C' = l_1C_1 + l_2C_2$.

Первые два из последних равенств показывают, что при всяких значениях l_1 и l_2 первые два коэффициента уравнения (6) пропорциональны первым двум коэффициентам уравнения (2), а это значит, что прямая, изображаемая уравнением (6), при всяких значениях

---

[1]) Если переписать уравнение $F_1(x, y)+kF_2(x, y) = 0$ так:

$$\frac{1}{k}F_1(x, y)+F_2(x, y)=0$$

и положить $k = \infty$, получим $F_2(x, y) = 0$.

l_1 и l_2 параллельна прямой, изображаемой уравнением (2), т. е. параллельна обеим данным прямым [1]).

Как мы увидим в следующем параграфе, всякая прямая параллельная данным, может быть получена из (6) путем подходящего выбора чисел l_1 и l_2.

Совокупность параллельных прямых также носит название пучка, но в этом случае говорят, что центр пучка удален в бесконечность, или что пучок *несобственный*.

Если, наконец, прямые (1) и (2) совпадают, то мы будем иметь $A_1 = mA_2$, $B_1 = mB_2$, $C_1 = mC_2$ (где m — некоторое число), и все три коэффициента уравнения (6) будут пропорциональны соответствующим коэффициентам уравнения (2), или, что все равно, уравнения (1). Следовательно, в этом исключительном случае уравнение (6) при всяких значениях l_1 и l_2 выражает одну и ту же прямую (ту же самую, что и данные уравнения). Во всем последующем мы будем подразумевать, что данные прямые не совпадают.

§ 112. Задача 13. Найти прямую, проходящую через пересечение двух заданных прямых и через другую заданную точку

Сохраним обозначения предыдущего параграфа. Пусть, кроме того, M_1 (x_1, y_1) обозначает некоторую заданную точку, не совпадающую с пересечением данных прямых. Наша задача будет решена, если нам удастся так подобрать параметр k в уравнении (5) предыдущего параграфа, чтобы прямая, изображаемая этим уравнением, проходила через точку M_1. Выражая условие прохождения этой прямой через точку M_1 (x_1, y_1), получим

$$F_1(x_1, y_1) + kF_2(x_1, y_1) = 0, \tag{1}$$

или, подробнее:

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + k(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0; \tag{2}$$

это соотношение позволяет определить k:

$$k = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}. \tag{3}$$

Подставляя найденное значение k в уравнение (5) предыдущего параграфа, получим уравнение искомой прямой.

Для k может получиться значение ∞ только в том случае, когда знаменатель $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0$. Но это значит, что точка

[1]) Исключение может представить случай, когда $ml_1 + l_2 = 0$, т. е. $A' = B' = 0$ (в этом случае, как легко видеть, $C' \neq 0$). Но и в этом случае можно говорить, что (6) представляет «несобственную» прямую (см. конец § 90), которая параллельна любому направлению.

$M_1(x_1, y_1)$ лежит на заданной прямой (2) предыдущего параграфа. С другой стороны, согласно условию, принятому в предыдущем параграфе, значению $k = \infty$ соответствует прямая $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, как это и должно быть, ибо в этом случае искомая прямая должна совпадать с нею.

Конечно, все сказанное относится и к случаю несобственного пучка, т. е. когда данные прямые параллельны (но не совпадают).

Итак, задача допускает всегда одно и только одно решение [1]).

Для того чтобы избежать рассмотрения бесконечно больших значений постоянной k, можно пользоваться уравнением (4) предыдущего параграфа.

Решенная нами задача доказывает также утверждение, высказанное в предыдущем параграфе, что *всякая* прямая, принадлежащая пучку, может быть получена из общего уравнения

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0,$$

если придать постоянной k подходящее значение. Действительно, мы можем получить путем выбора k прямую пучка, проходящую через любую точку плоскости, следовательно, мы можем получить любую прямую пучка.

§ 113. Условие пересечения трех прямых в одной точке

Пусть даны три прямые уравнениями

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0, \quad F_3(x, y) = 0, \tag{1}$$

где для краткости введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) = A_1x + B_1y + C_1, \quad F_2(x, y) = A_2x + B_2y + C_2, \\ F_3(x, y) = A_3x + B_3y + C_3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Уравнение всякой прямой, проходящей через пересечение прямых, представляемых первыми двумя уравнениями, может быть написано в виде

$$l_1F_1(x, y) + l_2F_2(x, y) = 0. \tag{3}$$

В частности, если третья из данных прямых проходит через пересечение двух первых, то последнее уравнение, при подходящем выборе постоянных l_1 и l_2, должно изображать эту третью

---

[1]) Напомним, что мы исключили из рассмотрения случай, когда заданная точка совпадает с пересечением заданных прямых, т. е. когда одновременно

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0, \quad A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0.$$

Если бы это имело место, то формула (3) дала бы для k неопределенное значение $\frac{0}{0}$, как и надо было предвидеть. В этом случае уравнение (5) предыдущего параграфа решает задачу при всяком значении k.

прямую. А это значит, что левая часть уравнения (3) может только постоянным множителем отличаться от левой части уравнения $F_3(x, y) = 0$ (см. § 97); иными словами, мы должны иметь *тождество* $l_1F_1(x, y) + l_2F_2(x, y) = kF_3(x, y)$, где k — некоторая постоянная, отличная от нуля. Обозначая для симметрии k через $-l_3$, предыдущее тождество можно переписать так:

$$l_1F_1(x, y) + l_2F_2(x, y) + l_3F_3(x, y) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что, обратно: если можно так подобрать три постоянных l_1, l_2, l_3, не равных одновременно нулю, чтобы имело место тождество (4), то данные три прямые пересекаются в одной точке.

Все сказанное относится и к случаю, когда две из данных прямых пересекаются в бесконечности (т. е. параллельны). Тогда условие (4) выражает, что и третья прямая пересекается с двумя первыми в бесконечности, т. е. параллельна им.

Итак, *для того чтобы три прямые* (1) *имели общую точку* [1]) (конечную или бесконечно удаленную), *необходимо и достаточно, чтобы можно было подобрать три таких числа* l_1, l_2, l_3, *не равных одновременно нулю, при которых равенство* (4) *обращается в тождество.*

Например, прямые, представленные уравнениями

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 2x + y - 4 = 0, \quad 4x + 5y - 6 = 0,$$

проходят через одну точку, так как имеем тождество

$$2(x + 2y - 1) + 1 \cdot (2x + y - 4) + (-1)(4x + 5y - 6) \equiv 0.$$

Легко непосредственно проверить, что предыдущее заключение (напечатанное курсивом) остается в силе, если допустить совпадение некоторых из трех рассматриваемых прямых. Тогда может случиться, что общих точек — бесчисленное множество.

Заметим, наконец, что тождество (4) эквивалентно равенствам

$$\left.\begin{aligned} l_1A_1 + l_2A_2 + l_3A_3 &= 0, \\ l_1B_1 + l_2B_2 + l_3B_3 &= 0, \\ l_1C_1 + l_2C_2 + l_3C_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

которые получим, приравнивая в (4) нулю коэффициенты при x, y и свободный член. Следовательно, для того чтобы три прямые (2) имели общую точку, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

---

[1]) Иными словами, чтобы эти прямые принадлежали одному и тому же пучку.

ибо, как известно из теории определителей [1]), в этом и только в этом случае существуют величины l_1, l_2, l_3, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие однородным уравнениям (5).

§ 114. Задача 14. Найти уравнение прямой, проходящей через пересечение заданных прямых и имеющей заданное направление

Пусть a есть угловой коэффициент данного направления. При обозначениях § 111 задача сводится к определению постоянной k в уравнении

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

так, чтобы угловой коэффициент прямой, изображаемой этим уравнением, был равен a.

Переписав предыдущее уравнение в виде

$$(A_1 + kA_2)x + (B_1 + kB_2)y + C_1 + kC_2 = 0,$$

находим, что требуемое условие выражается равенством

$$-\frac{A_1 + kA_2}{B_1 + kB_2} = a,$$

что представляет собой уравнение первой степени относительно k; решив это уравнение и подставив найденное значение k в (1), мы получим искомое уравнение [2]).

Аналогично решается задача: *найти прямую, проходящую через пересечение заданных прямых и перпендикулярную к заданному направлению* (более обще, составляющую с заданным направлением заданный угол) (см. § 109, 110).

§ 115. Геометрическое значение постоянной k

Параметр k в уравнении

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

получает весьма простое геометрическое значение, если уравнения прямых $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ взять в нормальной форме

---

[1]) См. Добавление, § 6.

[2]) Читателю предлагается исследовать случай, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, т. е. когда мы имеем дело с пучком параллельных прямых. В этом случае задача либо не допускает решения, либо допускает бесчисленное множество решений.

В этом случае, вводя обозначения § 96 и отмечая значками 1 и 2 элементы, относящиеся к первой и второй прямым, будем иметь, считая координаты прямоугольными:

$$F_1(x, y) = x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1 - p_1,$$
$$F_2(x, y) = x\cos\psi_2 + y\sin\psi_2 - p_2.$$

Обозначая, далее, через h_1 и h_2 расстояния (снабженные знаками) какой-либо точки $M(x, y)$ соответственно до F_1 и F_2 [1]), будем иметь (§ 103)

$$h_1 = x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1 - p_1,$$
$$h_2 = x\cos\psi_2 + y\sin\psi_2 - p_2.$$

Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

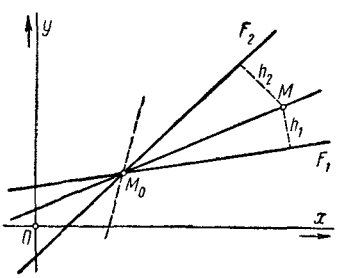
$$h_1 + kh_2 = 0,$$

или

$$k = -\frac{h_1}{h_2}. \qquad (2)$$

Следовательно, если не обращать внимания на знак, постоянная k равна отношению расстояний произвольной точки на прямой (1) до прямых $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$.

На основании условия относительно знаков расстояний (§ 103) ясно, что k есть величина отрицательная, если прямая (1) проходит через тот из углов между прямыми F_1 и F_2, где расположено начало координат O, и через вертикальный с ним угол (как на черт. 97); в противном случае (черт. 97, пунктир) k есть положительная величина [2]).



Черт. 97

В общем случае, когда прямые F_1 и F_2 заданы уравнениями общего вида, а система координат — обобщенная декартова, будем иметь

$$h_1 = \lambda_1 F_1(x, y), \quad h_2 = \lambda_2 F_2(x, y),$$

где λ_1, λ_2 — постоянные (§ 103), и вместо формулы (2) получим

$$k = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{h_1}{h_2}. \qquad (3)$$

---

[1]) Для краткости прямою F мы называем прямую, изображаемую уравнением $F(x, y) = 0$.

[2]) Этот критерий, отпадает, если одна из данных прямых $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ проходит через начало координат.

Упражнения и приложения (к § 111—115)

1. Найти прямую, проходящую через начало координат и через пересечение прямых $3x+y-1=0$ и $2x-8y+3=0$.

Ответ. $11x-5y=0$.

2. Найти прямую, проходящую через пересечение прямых $x+y+1=0$, $x+2y-2=0$ и параллельную прямой $x=3y+5$.

Ответ. $x-3y+13=0$.

3. Найти прямую, проходящую через пересечение прямых $x-y-5=0$, $2x-3y-1=0$ и перпендикулярную к прямой $x+2y=0$ (координаты — прямоугольные).

Ответ. $2x-y-19=0$.

4. Найти уравнение биссектрис углов, заключенных между двумя данными прямыми, *нормальные* уравнения которых суть (в прямоугольных координатах)

$$F_1(x, y)=0 \quad \text{и} \quad F_2(x, y)=0.$$

Решение. Прямые F_1 и F_2 образуют два угла, дополняющих друг друга до π. Следовательно, искомых биссектрис будет две. Придав постоянной k в уравнении

$$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0$$

подходящее значение, мы получим уравнение любой из них.

Так как каждая точка биссектрисы равно удалена от данных прямых F_1 и F_2, то на основании § 115 будем иметь $k=\pm 1$.

Очевидно, значению $k=+1$ соответствует одна биссектриса (именно та, которая не проходит через угол, содержащий начало координат), а значению $k=-1$ соответствует другая биссектриса.

Если уравнения прямых даны в общем виде, то уравнения биссектрис углов между ними (в случае прямоугольных координат) напишутся так:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

двум возможным знакам соответствуют две биссектрисы.

5. Доказать, пользуясь условием перпендикулярности двух прямых, что две биссектрисы, упомянутые в предыдущем упражнении, взаимно перпендикулярны.

6. Доказать, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть нормальные уравнения прямых (в прямоугольных координатах), выражающих стороны треугольника, суть

$$F_1(x, y)=0, \quad F_2(x, y)=0 \quad \text{и} \quad F_3(x, y)=0.$$

Если начало координат находится внутри треугольника (что всегда можно предполагать), то уравнения биссектрис внутренних углов будут (см. упражнение 4)

$$F_2(x, y)-F_3(x, y)=0, \quad F_3(x, y)-F_1(x, y)=0, \quad F_1(x, y)-F_2(x, y)=0. \quad (*)$$

Но так как мы имеем тождество (опускаем для краткости x и y)

$$1\cdot(F_2-F_3)+1\cdot(F_3-F_1)+1\cdot(F_1-F_2)=0,$$

то, на основании § 113, прямые, представляемые уравнениями (*), проходят через одну точку (в нашем случае $l_1=l_2=l_3=1$).

7. Доказать (см. предыдущее упражнение), что биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса внутреннего угла, не смежного с ними, пересекаются в одной точке.

Доказательство. При обозначениях предыдущего упражнения биссектрисы внешних углов между сторонами F_2, F_3 и сторонами F_3, F_1 будут даны уравнениями

$$F_2+F_3=0, \quad F_3+F_1=0.$$

Биссектриса внутреннего угла между сторонами F_1 и F_2 будет дана уравнением $F_1-F_2=0$. Но так как имеем тождество

$$1\cdot(F_2+F_3)+(-1)\cdot(F_3+F_1)+1\cdot(F_1-F_2)=0,$$

то предложение доказано.

8. Доказать, что радикальные оси (§ 100, упражнение 3) трех окружностей, взятых попарно, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* трех данных окружностей.

Доказательство. Если

$$x^2+y^2+2A_1x+2B_1y+C_1=0,$$
$$x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2=0,$$
$$x^2+y^2+2A_3x+2B_3y+C_3=0$$

суть уравнения данных окружностей в прямоугольных координатах, то уравнения радикальных осей будут (§ 100, упражнение 3):

$2(A_1-A_2)x+2(B_1-B_2)y+C_1-C_2=0$ (для первой и второй окружностей),
$2(A_2-A_3)x+2(B_2-B_3)y+C_2-C_3=0$ (» второй и третьей »),
$2(A_3-A_1)x+2(B_3-B_1)y+C_3-C_1=0$ (» третьей и первой »).

Если сложить левые части этих уравнений, мы, как легко видеть, получим выражение, тождественно равное нулю, а отсюда и следует наше утверждение.