ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

В предыдущей главе мы ознакомились с основным вопросом геометрии на плоскости — вопросом о представлении плоских линий при помощи уравнений.

В пространстве трех измерений приходится наряду с образами одномерными (линиями) рассматривать еще образы двумерные (поверхности).

Начнем с рассмотрения поверхностей, ибо в смысле аналитического представления они являются, в известной степени, аналогичными линиям на плоскости.

Во всей этой главе система координат предполагается декартовой. Иногда, для упрощения формул, она, кроме того, предполагается прямоугольной; это последнее обстоятельство всегда будет оговорено особо.

§ 116. Уравнение поверхности

В элементарной геометрии не дается общее определение понятия «поверхность». Там обычно рассматриваются только поверхности частного вида, а именно: плоскость, сфера, круговые цилиндр и конус. Мы дадим здесь общее определение поверхности.

Поверхностью называется геометрическое место точек, координаты которых (относительно данной системы координат) *удовлетворяют одному уравнению вида*

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi(x, y, z)$ обозначает функцию трех переменных x, y и z [1]).

Уравнение (1) называется уравнением этой поверхности, отнесенной к данной системе координат. Мы предполагаем, что уравнение (1) фактически содержит по крайней мере одну из переменных x, y, z, относительно которой его можно решить. Например, предположение о разрешимости (1) относительно переменной z дает

---

[1]) Это определение применимо для любой системы координат в пространстве.

возможность переписать уравнение (1) в виде

$$z = \varphi(x, y), \tag{1a}$$

где $\varphi(x, y)$ — однозначная или многозначная функция переменных x и y.

Из нашего определения следует, что *уравнение данной поверхности есть уравнение с тремя* [1]) *переменными, которое удовлетворяется тогда и только тогда, если на место переменных подставить координаты какой-либо точки поверхности.*

Данное выше определение понятия «поверхность» — слишком общее. Под это определение могут подойти образы, далекие от того, что мы привыкли называть «поверхностью». Поэтому при более детальном изучении поверхностей должны быть сделаны некоторые дополнительные предположения относительно функции $\Phi(x, y, z)$ или $\varphi(x, y)$. См. курсы дифференциальной геометрии.

Если дано уравнение поверхности, отнесенной к определенной системе координат, то, чтобы найти уравнение той же поверхности относительно другой системы, достаточно в данное уравнение подставить на место старых координат их выражения через новые.

Например, если

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

представляет собою уравнение поверхности, отнесенной к какой-либо декартовой системе $Oxyz$, то, чтобы найти уравнение той же поверхности относительно другой декартовой системы $O'x'y'z'$, достаточно в предыдущее уравнение подставить выражения x, y, z через x', y', z'; эти выражения имеют вид [§ 66, формулы (1)]

$$\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= b + m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= c + n_1x' + n_2y' + n_3z'. \end{aligned}$$

Поэтому предыдущее уравнение преобразуется в следующее:

$$\Phi_1(x', y', z') = 0,$$

где для краткости введено обозначение

$$\Phi(a + l_1x' + l_2y' + l_3z',\ b + m_1x' + m_2y' + m_3z',$$
$$c + n_1x' + n_2y' + n_3z') \equiv \Phi_1(x', y', z')$$

(сравн. § 82).

Нам остается показать теперь, что поверхности, рассматриваемые в элементарной геометрии, действительно подходят под приведенное выше общее определение поверхностей, т. е. что для каждой из них можно составить уравнение вида (1), которое удовлетво-

[1]) Фактически в уравнение могут входить не все три переменных (см. ниже, § 118).

ряется тогда и только тогда, если на место x, y и z подставить координаты произвольной точки рассматриваемой поверхности. Мы ограничимся выводом уравнений сферы, конуса и цилиндра; уравнение плоскости будет рассмотрено ниже особо.

Для вывода требуемых уравнений мы можем в каждом отдельном случае воспользоваться специально выбранной системой координат, так как переход к любой другой системе, на основании только что сказанного, никаких затруднений не представляет.

§ 117. Уравнение сферы и кругового конуса в прямоугольных координатах

1. Пусть дана *сфера* радиуса r с центром в точке C (a, b, c). Сфера, по определению, есть геометрическое место точек M (x, y, z), расстояние которых до C равно r.

Выражая это определение аналитически, получим, ограничиваясь для простоты случаем прямоугольных координат:

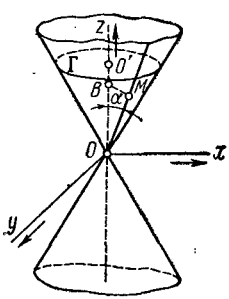
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (1)$$

Это и есть уравнение сферы в прямоугольных декартовых координатах. Если центр сферы совпадает с началом координат, то $a=b=c=0$, и предыдущее уравнение принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (2)$$



Черт. 98

2. *Конусом называется поверхность, образованная прямыми (образующими), проходящими через постоянную точку (вершину) и пересекающими постоянную линию (направляющую).*

Если направляющая есть окружность Г, а вершина O расположена на перпендикуляре, восставленном из центра O' окружности Г к ее плоскости (черт. 98), то конус называется *круговым*, а прямая OO' — *осью* конуса. Всякий конус имеет две полы, расположенные по обеим сторонам вершины (в элементарной геометрии обыкновенно рассматривается только одна пола или даже только часть одной полы, заключенная между вершиной и направляющей).

Для вывода уравнения кругового конуса примем его вершину O за начало прямоугольных координат, а ось Oz направим по оси конуса.

Пусть α — острый угол между образующей конуса и положительным направлением оси Oz. Этот угол, очевидно, есть величина постоянная. Для того чтобы точка M (x, y, z) находилась на кону-

се, необходимо и достаточно, чтобы острый угол между прямыми OM и Oz был равен α. Чтобы выразить это условие аналитически, обозначим через B прямоугольную проекцию точки M на Oz. Тогда наше условие выразится так:

$$\frac{|BM|}{|OB|} = \operatorname{tg} \alpha;$$

замечая, далее, что точка B имеет координаты $(0, 0, z)$, получаем $|OB| = |z|$ и

$$|BM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|} = \operatorname{tg} \alpha,$$

или, по возведении в квадрат и уничтожении знаменателя:

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2, \tag{3}$$

где для краткости введено обозначение $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение (3) и есть требуемое. Вряд ли следует напоминать, что выведенное уравнение относится к специально выбранной системе координат.

Упражнения и дополнения

1. Показать, что уравнение сферы (в прямоугольных координатах) имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0\ ^{1)}, \tag{1a}$$

(причем $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$) и что, обратно, уравнение (1a) выражает сферу радиуса $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$ с центром в точке $(-A, -B, -C)$; сравн. § 80, замечание.

2. Найти уравнение кругового конуса с вершиной в начале координат O, ось которого имеет направление орта $\mathbf{e} = (l, m, n)$ (координаты — прямоугольные).

Решение. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ находилась на конусе, необходимо и достаточно, чтобы угол ϑ между $\overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{e}$ был равен α или $\pi - \alpha$, где α имеет то же значение, что и выше. Следовательно, $\cos \vartheta = \pm \cos \alpha$, $\cos^2 \vartheta = \cos^2 \alpha$. Но (§ 45) $\cos \vartheta = \dfrac{lx + my + nz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Следовательно,

$$\frac{(lx + my + nz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} = a^2,$$

---

[1]) Это уравнение можно еще представить в несколько более общем виде:

$$A_0 (x^2 + y^2 + z^2) + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0,$$

где $A_0 \neq 0$. Действительно, разделив обе части на A_0, получим уравнение вида (1a).

где положено $\cos\alpha = a$, или

$$(lx + my + nz)^2 = a^2 (x^2 + y^2 + z^2). \qquad (4)$$

Это и есть требуемое уравнение. Если $l = m = 0$, $n = \pm 1$, то, как легко видеть, снова получим уравнение (3).

§ 118. Уравнение цилиндра

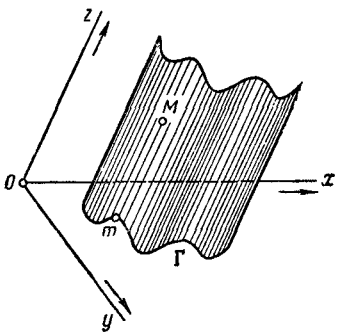
Цилиндром называется поверхность, образованная параллельными между собою прямыми (образующими), пересекающими постоянную линию (направляющую).

Если направляющая есть окружность, а образующие перпендикулярны к плоскости этой окружности, то цилиндр называется *круговым*.

Мы выведем здесь уравнение цилиндра общего вида (а не только кругового).

Возьмем декартову систему координат, ось Oz которой параллельна образующим цилиндра. Пусть Г есть линия пересечения цилиндра с плоскостью Oxy (черт 99). Пусть, далее,

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (1)$$



Черт. 99

есть уравнение линии Г на плоскости Oxy. Для того чтобы какая-либо точка $M(x, y, z)$ пространства лежала на нашем цилиндре, необходимо и достаточно, чтобы проекция m этой точки на плоскость Oxy, взятая параллельно Oz, лежала на Г. Следовательно, для того чтобы точка $M(x, y, z)$ находилась на данном цилиндре, необходимо и достаточно, чтобы координаты x и y этой точки были связаны уравнением (1) (каково бы ни было значение третьей координаты z). Иными словами, уравнение (1), *если его рассматривать как уравнение, связывающее координаты точек пространства*, есть уравнение данного цилиндра.

Это уравнение представляет собою частный вид уравнения (1) § 116; характерною особенностью его является отсутствие в нем координаты z.

Очевидно, что и обратно, всякое уравнение вида (1) есть уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны Oz и линия пересечения которой с плоскостью Oxy изображается в этой плоскости уравнением (1) [1]).

[1]) Мы подчеркиваем слова «в этой плоскости», так как хотим обратить внимание на то, что нельзя просто называть уравнение $\Phi(x, y) = 0$ уравнением линии Г; это уравнение выражает в пространстве цилиндр, и только те точки этого цилиндра, для которых $z = 0$, составляют линию Г.

Аналогично, уравнения вида

$$\Phi(x, z) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(y, z) = 0$$

выражают цилиндры, образующие которых параллельны соответственно осям Oy и Ox.

Иногда, для краткости, вместо того, чтобы говорить, что образующие данного цилиндра параллельны данной прямой (оси), мы будем говорить, что цилиндр параллелен этой прямой (оси).

Итак, *если в уравнении поверхности отсутствует одна из координат, то эта поверхность есть цилиндр, параллельный соответствующей оси.*

Рассмотрим несколько частных случаев.

1°. Круговой цилиндр. Если взять прямоугольную систему координат и предположить, что линия Г есть окружность, то уравнение (1) обратится в уравнение кругового цилиндра, параллельного оси Oz. Если обозначить через (a, b) координаты центра окружности в плоскости Oxy, а через r радиус ее, то рассматриваемое уравнение напишется так (см. § 80):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0. \tag{2}$$

2°. Уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

очевидно, изображает в пространстве плоскость, параллельную оси Oz и пересекающую плоскость Oxy по прямой, изображаемой в последней плоскости тем же уравнением (3). (Плоскость есть частный вид цилиндрической поверхности, соответствующий случаю, когда линия Г — прямая).

§ 119. Классификация поверхностей

По виду своего уравнения в *декартовых* координатах поверхности разделяются на алгебраические и трансцендентные так же, как и плоские кривые (сравн. § 85). Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение можно представить в виде

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, y, z)$ — полином (целая рациональная функция относительно x, y, z). Все неалгебраические поверхности называются *трансцендентными*.

Алгебраические поверхности, в свою очередь, разделяются на поверхности различных *порядков*. Именно, если степень полинома $F(x, y, z)$ в уравнении поверхности (1) равна n, то говорят, что поверхность n-го порядка. Например, сфера, круговой конус и круговой цилиндр суть алгебраические поверхности второго порядка (см. их уравнения, выведенные в предыдущих параграфах).

Плоскость же есть поверхность первого порядка, как это следует из уравнения (3) предыдущего параграфа.

Легко показать, что порядок поверхности не зависит от выбора системы декартовых координат. Доказательство совершенно аналогично доказательству, проведенному § 85, и мы его повторять здесь не будем.

Также непосредственно может быть перенесено на наш случай сказанное в § 85 относительно возможности замены уравнения $F(x, y, z) = 0$ уравнением низшей степени (см. об этом подробнее ниже, в § 174).

Алгебраическая поверхность может быть *распадающейся* (*приводимой*) или *нераспадающейся* (*неприводимой*) в зависимости от того, возможно или нет разложить полином $F(x, y, z)$ на множители, являющиеся также полиномами (подробнее см. ниже, в § 174)

§ 120. Уравнение линии

Линию в пространстве можно определить как *пересечение двух поверхностей*, т. е. как геометрическое место точек, находящихся одновременно на двух поверхностях. Пусть $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$ — уравнения поверхностей, пересечением которых является данная линия. Координаты каждой точки линии должны, очевидно, одновременно удовлетворять обоим предыдущим уравнениям, и обратно, точки, координаты которых одновременно удовлетворяют обоим этим уравнениям, принадлежат данной линии. Короче, данная *линия есть геометрическое место точек, координаты которых одновременно удовлетворяют системе двух уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= 0, \\ \Psi(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Уравнения (1) называются *уравнениями данной линии*.

Заметим, что данную линию можно представить двумя уравнениями бесчисленным множеством способов: действительно, вместо данных двух поверхностей мы можем взять любую пару поверхностей, пересекающихся по этой линии. Аналитически это соответствует тому, что вместо системы (1) можно взять любую эквивалентную ей систему.

Например, вообще говоря, систему (1) можно разрешить относительно двух из переменных, скажем, x и y; тогда вместо системы (1) мы получим эквивалентную ей систему вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(z), \\ y &= \psi(z). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

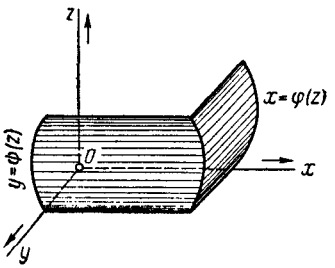
Уравнения последней системы представляют собою уравнения цилиндров, первый из которых параллелен оси Oy, а второй —

оси Ox. Это, очевидно, цилиндры, проектирующие данную линию на плоскости Ozx и Oyz соответственно параллельно осям Oy и Ox (черт. 100).

Возьмем, например, систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ x=a. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

В прямоугольных координатах первое из уравнений этой системы есть уравнение сферы радиуса r с центром в начале координат, а второе — уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz и отсекающей на оси Ox отрезок a. Пересечение этих двух поверхностей есть, очевидно, окружность с центром на оси Ox, плоскость которой перпендикулярна к этой оси и отсекает на ней отрезок a. Очевидно, пересечение существует лишь тогда, когда $a \leqslant r$.



Черт. 100

Систему (3) можно заменить эквивалентной системой

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2=r^2-a^2, \\ x=a. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Первое уравнение этой системы изображает круговой цилиндр, осью которого служит Ox, а радиус поперечного сечения равен

$$\sqrt{r^2-a^2}.$$

Наша окружность есть линия пересечения этого цилиндра с плоскостью $x=a$.

Если линия может быть представлена как пересечение двух алгебраических поверхностей, т. е. может быть представлена системой уравнений

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0, \qquad (5)$$

где F_1 и F_2 обозначают полиномы относительно x, y и z, то она называется *алгебраической* линией.

Порядком линии называется произведение степеней уравнений (5).

Всякая неалгебраическая линия называется *трансцендентной*.

§ 121. Параметрическое представление линий и поверхностей

В предыдущем параграфе линия была определена как пересечение двух поверхностей. Можно рассматривать линию и с другой точки зрения: именно, представлять ее как путь, описываемый точ-

кой, движущейся по определенному закону. Мы придем, таким образом (ср. § 81), к *параметрическому представлению*, когда координаты x, y и z выражаются как функции вспомогательной переменной t:

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t),\quad z=\varphi_3(t), \tag{1}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$ обозначают непрерывные в известном промежутке функции. Если t изменяется в этом промежутке, то точка (x, y, z) перемещается непрерывным образом в пространстве, описывая линию.

В том, что это новое определение линии совпадает, по существу, с предыдущим, можно убедиться, исключив t из уравнений (1). Решая, например, третье из уравнений (1) относительно t, т. е. выражая t через z, и подставляя найденное выражение в первые два из уравнений (1), мы получим для x и y выражения через z:

$$x=\varphi(z),\quad y=\psi(z), \tag{2}$$

т. е. уравнения (2) предыдущего параграфа.

Обратно, если линия задана уравнениями вида (2), то, взяв произвольную функцию $\varphi_3(t)$ и полагая $z=\varphi_3(t)$, получим уравнения вида (1):

$$x=\varphi[\varphi_3(t)],\quad y=\psi[\varphi_3(t)],\quad z=\varphi_3(t),$$

или

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t),\quad z=\varphi_3(t),$$

где введены обозначения

$$\varphi[\varphi_3(t)]=\varphi_1(t),\quad \psi[\varphi_3(t)]=\varphi_2(t).$$

Например, если линия задана уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2&=r^2,\\ x&=a \end{aligned}\right\}$$

(в прямоугольных координатах это есть окружность, параллельная плоскости Oyz, с центром на оси Ox), то, полагая $z=r\sin t$, получим

$$y=\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}=r\cos t,$$

что дает простое параметрическое представление данной кривой:

$$x=a,\quad y=r\cos t,\quad z=r\sin t\,^{1)}.$$

Также и *поверхность* можно представить параметрически, только здесь координаты x, y, z будут функциями *двух* параметров.

---

[1]) Мы не взяли двойного знака перед радикалом в выражении y, ибо двойной знак перед $\cos t$ не дал бы ничего нового; действительно, точку $x=a$, $y=-r\cos t$, $z=r\sin t$ получим из уравнений в тексте заменой t на $\pi-t$.

Пусть, действительно, уравнение данной поверхности есть

$$z = f(x, y). \tag{3}$$

Положим $x = \varphi(p, q)$, $y = \psi(p, q)$, где $\varphi(p, q)$, $\psi(p, q)$ — две произвольно выбранные функции двух переменных p и q, такие, что последние уравнения разрешимы относительно p и q, т. е. что p и q могут быть обратно выражены через x и y. Внося в (3) выражения x и y через p и q, получим $z = f[\varphi(p, q), \psi(p, q)]$. Обозначая последнюю функцию через $\omega(p, q)$, будем иметь

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q), \quad z = \omega(p, q). \tag{4}$$

Обратно, всякие уравнения вида (4), из которых какие-либо два разрешимы относительно p и q, представляют некоторую поверхность. Действительно, пусть, например, первые два уравнения разрешимы относительно p и q, так что, решая эти два уравнения, получим $p = f_1(x, y)$, $q = f_2(x, y)$. Внося эти значения в третье из уравнений (4), получим уравнение вида (3), т. е. уравнение поверхности.

Короче, чтобы из параметрического представления (4) вывести уравнение поверхности, достаточно из трех уравнений (4) исключить две переменные p и q. Тогда получим одно уравнение, содержащее переменные x, y, z; это и будет уравнением поверхности.

Например, если дана сфера с центром в начале прямоугольных координат и радиусом, равным r, то ее уравнение будет

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Полагая $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, где φ и ϑ играют роль параметров p и q, и внося в предыдущее уравнение, получим $r \sin^2\vartheta + z^2 = r^2$, откуда $z^2 = r^2 \cos^2\vartheta$ или $z = r \cos\vartheta$ [1]). Итак, параметрическое представление сферы может быть дано в виде

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta. \tag{5}$$

Читатель легко выяснит геометрическое значение параметров ϑ и φ (см. § 61) На основании этого геометрического значения ясно, что для получения всех точек сферы достаточно предполагать $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$.

§ 122. О пересечении поверхностей и линий в пространстве

Координаты точек пересечения *двух* поверхностей, данных уравнениями $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, удовлетворяют совокупности этих двух уравнений; так как в этом случае имеются два уравнения с тремя переменными, то, вообще говоря, точек пересе-

---

[1]) Мы не берем двойного знака перед $\cos\vartheta$, так как он не дал бы ничего нового (см. сноску на предыдущей странице).

чения будет бесчисленное множество, и они, как было уже сказано, составят некоторую линию.

Координаты точек пересечения трех поверхностей

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0, \quad F_3(x, y, z)=0$$

удовлетворяют совокупности трех последних уравнений. Так как у нас три уравнения с тремя неизвестными, то в этом случае точки пересечения будут, вообще говоря, отделены друг от друга конечными расстояниями; их будет или конечное число, или бесчисленное множество, но они, вообще говоря, не образуют непрерывной линии. То же относится к точкам пересечения поверхности $F(x, y, z)=0$ с линией, данной уравнениями $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$. Если линия задана параметрически: $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$, то точки пересечения ее с поверхностью $F(x, y, z)=0$ определятся из уравнения (сравн. § 87) $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]=0$.

Наконец, координаты точек пересечения *двух линий* в пространстве, заданных уравнениями $\Phi_1(x, y, z)=0$, $\Psi_1(x, y, z)=0$ и $\Phi_2(x, y, z)=0$, $\Psi_2(x, y, z)=0$, должны удовлетворять всем четырем этим уравнениям. Так как число уравнений превосходит число неизвестных, то, вообще говоря, эти уравнения не имеют решения, т. е. две линии в пространстве, вообще говоря, не пересекаются.

II. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

§ 123. Общее уравнение плоскости. Параметрическое представление

Перейдем теперь к выводу уравнения плоскости, а именно докажем предложение: если x, y, z — декартовы координаты относительно какой-либо системы $Oxyz$, то *всякое уравнение первой степени*

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

изображает плоскость и, обратно, всякая плоскость изображается уравнением первой степени; мы предполагаем, что A, B, C не равны нулю одновременно.

Проще всего доказать это следующим образом. Пусть Π — данная плоскость. Возьмем новую систему $O'x'y'z'$ декартовых координат такую, чтобы оси $O'x'$ и $O'y'$ были расположены в этой плоскости. Тогда в новой системе уравнение $z'=0$ есть, очевидно, уравнение плоскости Π. Возвращаясь к старой системе $Oxyz$, будем иметь формулы перехода следующего вида:

$$z'=Ax+By+Cz+D$$