чения будет бесчисленное множество, и они, как было уже сказано, составят некоторую линию.

Координаты точек пересечения трех поверхностей

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0, \quad F_3(x, y, z)=0$$

удовлетворяют совокупности трех последних уравнений. Так как у нас три уравнения с тремя неизвестными, то в этом случае точки пересечения будут, вообще говоря, отделены друг от друга конечными расстояниями; их будет или конечное число, или бесчисленное множество, но они, вообще говоря, не образуют непрерывной линии. То же относится к точкам пересечения поверхности $F(x, y, z)=0$ с линией, данной уравнениями $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$. Если линия задана параметрически: $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$, то точки пересечения ее с поверхностью $F(x, y, z)=0$ определятся из уравнения (сравн. § 87) $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]=0$.

Наконец, координаты точек пересечения *двух линий* в пространстве, заданных уравнениями $\Phi_1(x, y, z)=0$, $\Psi_1(x, y, z)=0$ и $\Phi_2(x, y, z)=0$, $\Psi_2(x, y, z)=0$, должны удовлетворять всем четырем этим уравнениям. Так как число уравнений превосходит число неизвестных, то, вообще говоря, эти уравнения не имеют решения, т. е. две линии в пространстве, вообще говоря, не пересекаются.

II. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

§ 123. Общее уравнение плоскости. Параметрическое представление

Перейдем теперь к выводу уравнения плоскости, а именно докажем предложение: если x, y, z — декартовы координаты относительно какой-либо системы $Oxyz$, то *всякое уравнение первой степени*

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

изображает плоскость и, обратно, всякая плоскость изображается уравнением первой степени; мы предполагаем, что A, B, C не равны нулю одновременно.

Проще всего доказать это следующим образом. Пусть Π — данная плоскость. Возьмем новую систему $O'x'y'z'$ декартовых координат такую, чтобы оси $O'x'$ и $O'y'$ были расположены в этой плоскости. Тогда в новой системе уравнение $z'=0$ есть, очевидно, уравнение плоскости Π. Возвращаясь к старой системе $Oxyz$, будем иметь формулы перехода следующего вида:

$$z'=Ax+By+Cz+D$$

(и две аналогичные формулы для x' и y'), где A, B, C, D — постоянные [1]), причём A, B, C не равны нулю одновременно, и уравнение $z' = 0$ обращается в уравнение (1).

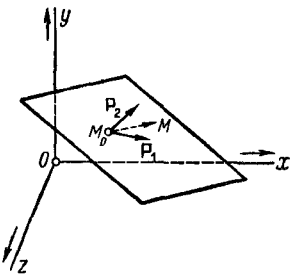
Обратно, если дано уравнение первой степени (1), то, взяв новую систему координат $O'x'y'z'$ такую, чтобы формулы перехода имели вид (см. замечание в конце § 66)

$$\left.\begin{aligned} x' &= l'_1x + l'_2y + l'_3z + a', \\ y' &= m'_1x + m'_2y + m'_3z + b', \\ z' &= Ax + By + Cz + D \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

(где в первых двух строках коэффициенты можно взять совершенно произвольно, с тем, однако, чтобы подстановка была неособенной [2])), преобразуем (1) к виду

$$z' = 0,$$

откуда видно, что уравнение (1) изображает плоскость.



Черт. 101

Для того чтобы иметь возможность составить уравнение плоскости, надо иметь заданным ее положение в пространстве. Один из способов задания заключается в том, что задаются какая-либо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости и два вектора: $\mathbf{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, не параллельные между собою, и параллельные плоскости (черт. 101). Составим уравнение плоскости по этим заданиям.

Пусть $M(x, y, z)$ — какая-либо точка пространства. Для того чтобы она находилась на нашей плоскости, необходимо и достаточ-

---

[1]) См. § 66, формулы (1а).

[2]) Это значит, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l'_1 & l'_2 & l'_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

должен быть отличным от нуля. Это всегда можно сделать. Действительно, по условию среди чисел A, B, C по крайней мере одно отлично от нуля. Если например, $C \neq 0$, то достаточно взять $l'_1 = 1$, $l'_2 = 0$, $l'_3 = 0$, $m'_1 = 0$, $m'_2 = 1$, $m'_3 = 0$, и тогда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = C \neq 0.$$

При $\Delta \neq 0$ систему (*) можно решить относительно x, y, z и получить выражение старых координат через новые, что приведет к формулам вида (1) § 66; это вполне определит положение нового начала и новые координатные векторы.

но, чтобы вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \qquad (**)$$

был компланарен с векторами $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, т. е. чтобы (§ 39)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Это и есть уравнение данной плоскости. Разлагая определитель по элементам первой строки, представим уравнение (2) в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (3)$$

где положено

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix};$$

величины A, ,B C не могут быть равны нулю одновременно, так как, по условию, векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ не параллельны между собою [1]).

Наконец, раскрывая скобки и обозначая свободный член через D, получим уравнение (1).

Легко также найти параметрическое представление плоскости. Действительно, так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$ компланарен с $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, будем иметь [§ 39, формула (1)]

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\mathbf{P} + \mu\mathbf{Q}, \qquad (4)$$

где λ и μ — некоторые числа (параметры). Изменяя λ и μ, можем получить любую точку M нашей плоскости. Из (4) следует, если принять во внимание формулу (**),

$$x - x_0 = \lambda X_1 + \mu X_2,\ y - y_0 = \lambda Y_1 + \mu Y_2,\ z - z_0 = \lambda Z_1 + \mu Z_2$$

или окончательно:

$$x = x_0 + \lambda X_1 + \mu X_2,\ y = y_0 + \lambda Y_1 + \mu Y_2,\ z = z_0 + \lambda Z_1 + \mu Z_2. \qquad (5)$$

Это и есть искомое параметрическое представление; параметрами являются λ и μ.

Замечание. Выше мы исключили случай, когда в общем уравнении $A = B = C = 0$. Однако и в этом случае (мы считаем, что при этом $D \neq 0$) говорят, что уравнение изображает плоскость,

---

[1]) Если бы $A = B = C = 0$, т. е. $Y_1Z_2 - Y_2Z_1 = 0$, $Z_1X_2 - Z_2X_1 = 0$, $X_1Y_2 - X_2Y_1 = 0$, то было бы:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

т. е. векторы были бы параллельны.

а именно, *бесконечно удаленную* или *несобственную плоскость* [1]); об этом см. подробнее в главе VI. В нижеследующем, если противное не оговорено особо, мы будем считать, как выше, что не все три величины A, B, C равны нулю. Случай $A = B = C = D = 0$ не представляет интереса. Однако иногда имеет смысл рассматривать и этот случай («неопределенная плоскость»).

§ 124. Геометрическое значение коэффициентов A, B, C

В случае прямоугольных координат коэффициенты A, B, C в общем уравнении

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

имеют весьма простое геометрическое значение, а именно, легко показать, что *вектор*

$$\mathbf{P} = (A, B, C)$$

перпендикулярен к плоскости (1). Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что вектор $\mathbf{P}$ перпендикулярен к любому отрезку M_1M_2, расположенному на плоскости. Пусть координаты M_1 суть x_1, y_1, z_1, а координаты M_2 суть x_2, y_2, z_2. Так как обе эти точки принадлежат плоскости (1), то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$; вычитая, получим

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

откуда и следует, что вектор (A, B, C) перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Вектор $\mathbf{P}$ мы будем называть ***вектором направления*** плоскости П.

Все сказанное выше будет справедливым и в случае общих декартовых координат, если под $\mathbf{P}$ будем подразумевать вектор, *ковариантные* координаты которого суть A, B, C.

§ 125. Частные случаи

Равенство нулю одного или нескольких коэффициентов в общем уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

характеризует некоторые особенности в ее расположении относительно осей координат, которые следует отметить.

1. Если в уравнении (1) свободный член $D = 0$, то это уравнение принимает вид

$$Ax + By + Cz = 0; \tag{2}$$

[1]) Сравн. § 90, замечание.

очевидно, что соответствующая плоскость проходит через начало координат (ибо последнее уравнение удовлетворяется значениями $x = y = z = 0$).

2. Пусть в уравнении (1) равен нулю один из коэффициентов при переменных; например, пусть $C = 0$. Тогда это уравнение принимает вид

$$Ax + By + D = 0. \tag{3}$$

Соответствующая плоскость параллельна оси Oz и пересекает плоскость Oxy по прямой, уравнение которой в этой плоскости есть уравнение (3) (см. § 118, 2°).

Очевидно, наш результат можно формулировать так: *если в уравнении плоскости отсутствует член, содержащий одну из координат, то плоскость параллельна соответствующей оси координат.*

3. Пусть два коэффициента при переменных равны нулю; например, пусть $B = C = 0$. Тогда плоскость будет, в силу предыдущего, параллельна всей плоскости Oyz.

Этот результат с очевидностью вытекает также из рассмотрения уравнения

$$Ax + D = 0,$$

которое может быть переписано так:

$$x = -\frac{D}{A}.$$

Очевидно, рассматриваемая плоскость отсекает на оси Ox отрезок, равный $-\frac{D}{A}$, если за единицу длины на Ox принять $|\mathbf{u}|$.

В частности, уравнение $x = 0$ изображает плоскость Oyz. Аналогично для уравнений $y = 0$ и $z = 0$.

§ 126. Знак четырехчлена $Ax + By + Cz + D$

Так же, как в § 92, легко заключить, что плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

разбивает все пространство на две части, в одной из которых выражение

$$Ax + By + Cz + D$$

принимает положительные значения, а в другой — отрицательные. На самой плоскости это выражение обращается в нуль.

§ 127. Уравнение в отрезках на осях[1])

Если в уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

[1]) Сравн. § 93.

коэффициент D не равен нулю, то, разделив обе части этого уравнения на $-D$ и полагая

$$-\frac{A}{D}=\frac{1}{p}, \quad -\frac{B}{D}=\frac{1}{q}, \quad -\frac{C}{D}=\frac{1}{r}, \tag{1}$$

его можно привести к виду

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1. \tag{2}$$

Коэффициенты p, q и r в уравнении (2) имеют простое геометрическое значение.

Действительно, найдем пересечение плоскости (2) с осью Ox. Искомая точка пересечения есть та точка плоскости (2), для которой $y = z = 0$. Подставляя эти значения в уравнение (2), найдем

$$\frac{x}{p}=1,$$

или $x = p$. Поступая аналогично относительно двух других осей, выводим, что p, q и r обозначают отрезки, отсекаемые данной плоскостью на осях координат Ox, Oy, Oz, если за единицы длин отрезков на этих осях принять длины $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$ соответствующих координатных векторов.

Замечание. Если один из коэффициентов A, B, C равен нулю, например, $C = 0$, то вместо уравнения (2) получим, очевидно,

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \tag{3}$$

где p и q имеют те же значения (1) и тот же геометрический смысл; уравнение (3) получается из (2), если положить $r = \infty$, что и понятно, так как при $C = 0$ плоскость параллельна оси Oz, т. е. отсекает на ней отрезок бесконечно большой длины.

§ 128. Построение плоскости, заданной уравнением

Для того чтобы построить плоскость, заданную уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

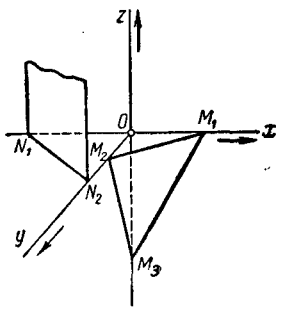
достаточно найти три какие-либо ее точки (не лежащие на одной прямой). Чтобы найти какую-либо точку плоскости, достаточно придать в её уравнении (1) двум из координат (например x и y) произвольные значения, а третью координату вычислить на основании этого уравнения.

В большинстве случаев проще всего найти точки пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz и по этим точкам построить плоскость.

Пусть, например, дано уравнение

$$2x+4y-z-8=0. \qquad (2)$$

Полагая $y=z=0$, найдем $x=4$; полагая, далее, $z=x=0$, найдём $y=2$ и, наконец, полагая $x=y=0$, найдём $z=-8$. Поэтому наша плоскость пересекает оси координат в точках M_1 (4, 0, 0), M_2 (0, 2, 0) и M_3 (0, 0, —8) (черт. 102).



Черт. 102

Тот же результат получим, написав уравнение (2) в виде

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-8}=1,$$

откуда ясно, что плоскость отсекает на осях координат отрезки $4|\mathbf{u}|$, $2|\mathbf{v}|$ и $-8|\mathbf{w}|$.

Возьмем еще уравнение плоскости

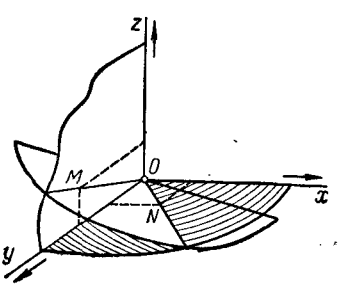
$$2x-3y+12=0. \qquad (3)$$

Эта плоскость параллельна оси Oz. Полагая в последнем уравнении $y=0$, найдем $x=-6$, полагая же $x=0$, получим $y=4$; следовательно, наша плоскость проходит через точки N_1 (—6, 0, 0) и N_2 (0, 4, 0), будучи параллельной оси Oz, на основании сказанного выше (черт. 102).

Тот же результат мы получим, если напишем уравнен е (3) в виде

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{4}=1,$$

откуда видно, что плоскость отсекает на осях координат отрезки $-6|\mathbf{u}|$, $4|\mathbf{v}|$ и ∞.



Черт. 103

Если плоскость проходит через начало координат O, то все три точки пересечения ее с осями совпадают с O. Чтобы построить ещё две какие-либо принадлежащие ей точки, проще всего взять точки, лежащие на плоскостях координат.

Пусть, например, дано уравнение

$$x-y+2z=0.$$

Полагая, скажем, $x=0$, $y=2$, найдем $z=1$, полагая же $z=0$, $x=1$, получим $y=1$; поэтому наша плоскость проходит через точки O (0, 0, 0), M (0, 2, 1) и N (1, 1, 0) (черт. 103).

§ 129. Следы плоскости на плоскостях координат

Построение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

можно также произвести, найдя *следы* этой плоскости на плоскостях координат, т. е. прямые пересечения данной плоскости с плоскостями Oyz, Ozx и Oxy.

Пересечение плоскости (1), например с плоскостью Oxy, есть, очевидно, геометрическое место точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнению (1) и условию $z=0$. Поэтому уравнение искомого следа на плоскости Oxy будет

$$Ax+By+D=0. \tag{2}$$

Точно так же уравнение следа на плоскости Oyz ($x=0$) будет

$$By+Cz+D=0, \tag{3}$$

и наконец, уравнение следа на плоскости Ozx ($y=0$) будет

$$Ax+Cz+D=0. \tag{4}$$

Замечание. В сущности уравнения следа на плоскости Oxy надо было бы писать так:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+D&=0,\\ z&=0,\end{aligned}\right\}$$

ибо уравнение (2) само по себе изображает плоскость, параллельную оси Oz. Добавочное же уравнение $z=0$ заменено выше словесным указанием на то, что уравнение (2) относится к точкам плоскости Oxy.

То же самое относится и к уравнениям (3) и (4).

Читателю предлагается построить следы плоскостей, рассмотренных в предыдущем параграфе, и при помощи этих следов произвести построение самих плоскостей.

Упражнения

1. Найти следы плоскости $4x+7y+3z+5=0$ на плоскостях координат.
Ответ. $7y+3z+5=0$; $4x+3z+5=0$; $4x+7y+5=0$.

2. Найти следы плоскости $x+y+1=0$ на плоскостях координат (и построить, пользуясь этим, данную плоскость).
Ответ. $y+1=0$; $x+1=0$; $x+y+1=0$.

§ 130. Условия параллельности и совпадения двух плоскостей

Сказанное в предыдущем параграфе позволяет вывести условие параллельности двух плоскостей

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Действительно, для того чтобы эти плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы были параллельны их следы на плоскостях координат (черт. 104).

Условие параллельности следов

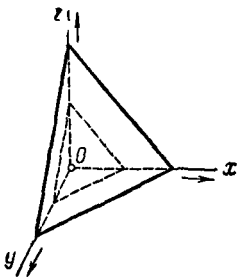
$$A_1x+B_1y+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+D_2=0 \tag{2}$$

на плоскости Oxy дает (см. § 97):

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1};$$

написав аналогичные равенства для двух других плоскостей координат, получим окончательно условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}. \tag{3}$$



Черт. 104

Итак, *для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы в их уравнениях были пропорциональны коэффициенты при соответствующих переменных.*

Частным случаем параллельности является совпадение.

Для совпадения двух плоскостей необходимо и достаточно совпадение их следов на плоскостях координат. Условие же совпадения следов на плоскости Oxy [см. уравнения (2)] дает равенства

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{D_2}{D_1};$$

написав аналогичные равенства для двух других плоскостей координат, получим окончательно требуемое условие

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}. \tag{4}$$

Итак, *для того чтобы две плоскости совпадали, необходимо и достаточно, чтобы все соответственные коэффициенты в их уравнениях были пропорциональны.*

Если k обозначает общее значение отношений (4), то предыдущее условие можно записать так:

$$A_2=kA_1, \quad B_2=kB_1, \quad C_2=kC_1, \quad D_2=kD_1. \tag{5}$$

Отсюда следует (сравн. § 97), что для совпадения плоскостей, данных уравнениями (1), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое постоянное число k, при котором имеет место тождество (т. е. равенство, справедливое для всех значений x, y, z):

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1). \tag{5a}$$

§ 131. Нормальное уравнение плоскости

Совершенно аналогично тому, что было сделано в § 96, мы можем привести уравнение плоскости в прямоугольных координатах

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

к так называемому *нормальному виду*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — косинусы некоторого направления, а $p \geqslant 0$. Для этого достаточно умножить обе части (1) на постоянную λ, подобрав ее так, чтобы вектор

$$\mathbf{V} = (\lambda A,\ \lambda B,\ \lambda C) \tag{3}$$

был ортом и, кроме того, чтобы $\lambda D \leqslant 0$. Из первого требования следует $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 + (\lambda C)^2 = 1$, откуда

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \tag{4}$$

знак подбирается согласно второму требованию (при $D = 0$ знак произволен). Полагая

$$\lambda A = \cos\alpha, \quad \lambda B = \cos\beta, \quad \lambda C = \cos\gamma, \tag{5}$$

приведем уравнение к требуемому виду (2); λ называется *нормирующим множителем*.

Из (3), на основании сказанного в § 124, следует, что орт $\mathbf{V}$ перпендикулярен к плоскости (1). Совершенно так же, как в § 96, покажем, что орт $\mathbf{V}$ направлен, при $D \neq 0$, от начала координат к плоскости и что p есть расстояние начала координат до плоскости.

Упражнения

1. Длина перпендикуляра OK, опущенного из начала координат на плоскость, равна 3; вектор $\overrightarrow{OK}$ составляет с осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$; с осью Oz он составляет острый угол. Найти нормальное уравнение плоскости (координаты — прямоугольные).

Решение. Угол γ вектора $\overrightarrow{OK}$ с осью Oz найдем из формулы

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

так как $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получим $\cos\gamma = +\frac{1}{2}$ (мы взяли знак $+$, так как, по условию, угол γ острый). Следовательно, искомое нормальное уравнение будет

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z - 3 = 0.$$

2. Привести уравнение плоскости $x + 3y + 3z + 1 = 0$ к нормальному виду.

Ответ. $\dfrac{x + 3y + 3z + 1}{-\sqrt{19}} = 0.$