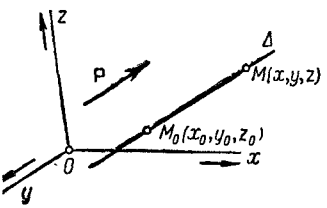
III. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 132. Уравнения в коэффициентах направления. Параметрическое представление

Выведем теперь уравнения прямой в пространстве методом, аналогичным методу § 88. Пусть Δ есть данная прямая; положение ее вполне определяется заданием одной из ее точек M_0 (x_0, y_0, z_0) и какого-либо параллельного ей вектора $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$, не равного нулю (черт. 105). Этот вектор мы будем называть *вектором направления* прямой Δ. Для того чтобы точка M (x, y, z) находилась на Δ, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ был параллелен вектору $\mathbf{P}$; это же дает (§ 37)



Черт. 105

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}. \qquad (1)$$

Последнее условие представляет собою систему двух уравнений, которые можно написать, например, так:

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{z-z_0}{Z}, \quad \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}. \qquad (1a)$$

Так как уравнения эти выражают необходимое и достаточное условие того, чтобы точка (x, y, z) находилась на данной прямой, то они и представляют собою уравнения этой прямой.

Мы видим, что прямая в пространстве изображается *двумя* уравнениями, как это и должно быть согласно сказанному выше об аналитическом представлении линии в пространстве (§ 120). Для прямой характерно то, что оба эти уравнения — л и н е й н ы е.

Величины X, Y, Z вполне определяют направление данной прямой; они поэтому называются *коэффициентами направления* этой прямой, а в соответствии с этим уравнения (1) называются *уравнениями в коэффициентах направления*.

Ясно, что, обратно: всякие уравнения вида (1), где X, Y, Z не равны одновременно нулю, выражают прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) и параллельную вектору (X, Y, Z).

Так как вектор $\mathbf{P}$ можно заменить любым другим, параллельным ему, то величины X, Y, Z можно заменить любыми величинами, им пропорциональными. Из этого следует, что направление прямой зависит не от самих величин X, Y, Z, а от их отношений, например от отношений (сравн. § 88)

$$a = \frac{X}{Z}, \qquad b = \frac{Y}{Z}. \qquad (2)$$

Эти отношения можно назвать *угловыми коэффициентами* данной прямой (см. следующий параграф).

Из уравнений (1) легко получить и параметрическое представление прямой. Для этого достаточно обозначить общее значение отношений (1) через t, что дает (сравн. § 88)

$$x = x_0 + Xt, \quad y = y_0 + Yt, \quad z = z_0 + Zt. \tag{3}$$

Параметр t имеет то же геометрическое значение, что и в § 88.

Если вместо вектора **P** произвольной длины взять орт $\mathbf{e} = (l, m, n)$, то уравнения (1) примут вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}; \tag{4}$$

величины l, m, n называются *координатами направления* прямой Δ, уравнения (4) — *уравнениями в координатах направления*.

Соответствующее параметрическое представление примет вид

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt; \tag{5}$$

параметр t в этом случае представляет собою расстояние переменной точки M (x, y, z) до постоянной точки M_0 (x_0, y_0, z_0), снабженное знаком (сравн. § 88).

Замечание. Если даны коэффициенты направления X, Y, Z прямой Δ, то, чтобы найти координаты направления l, m, n, достаточно умножить величины X, Y, Z на такой множитель k, чтобы длина вектора (kX, kY, kZ) равнялась единице.

В случае прямоугольных координат это дает

$$(kX)^2 + (kY)^2 + (kZ)^2 = 1,$$

откуда

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

и

$$\left.\begin{aligned} l = \pm \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad m = \pm \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ n = \pm \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Двойной знак [1]) берется потому, что если l, m, n суть координаты направления прямой, то $-l$, $-m$, $-n$ будут также координатами направления той же прямой.

Вспомним, что в рассматриваемом случае (прямоугольных координат) l, m, n являются в то же время косинусами направления, т. е.

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos\beta, \quad n = \cos\gamma, \tag{7}$$

[1]) Надо одновременно брать либо верхние, либо нижние знаки.

где α, β, γ обозначают углы орта $\mathbf{e} = (l, m, n)$ с осями координат. Орту $-\mathbf{e} = (-l, -m, -n)$ будут соответствовать углы $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$.

Под углами прямой Δ с осями координат мы будем, безразлично, понимать либо углы орта $\mathbf{e}$ с этими осями (т. е. углы α, β, γ), либо углы орта $-\mathbf{e}$ с этими осями (т. е. углы $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$).

Итак, формулы (6) дают возможность *найти углы прямой, заданной уравнениями* (1), *с осями координат.*

Упражнения и дополнения

1. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (1, 0, 1) и параллельной вектору $\mathbf{P} = (3, 2, 1)$.

Ответ. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z - 1$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (2, 3, 2) и параллельной вектору (0, 3, 5).

Ответ. $\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{5}$, или $x = 2$, $\frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{5}$.

3. Найти общий вид уравнений прямой, параллельной плоскости Oxy.

Ответ. $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{0}$, или $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y}$, $z = z_0$.

4. Найти общий вид уравнений прямой, параллельной оси Oz.

Ответ. $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{Z}$, или $x = x_0$, $y = y_0$.

5. Найти углы, которые прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{3}$ составляет с осями (прямоугольных) координат.

Ответ. $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \pm\frac{3}{\sqrt{14}}$.

§ 133. Приведенные уравнения прямой

Предполагая $Z \neq 0$, можно уравнения (1а) предыдущего параграфа переписать так:

$$x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0), \tag{1}$$

где по-прежнему a и b обозначают постоянные

$$a = \frac{X}{Z}, \quad b = \frac{Y}{Z}, \tag{2}$$

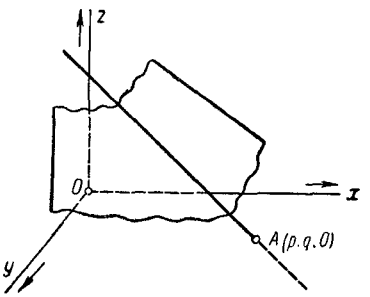
или еще так:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где p и q обозначают некоторые постоянные (именно, $p = x_0 - az_0$, $q = y_0 - bz_0$). Система уравнений (3) называется *простейшей*, или *приведенной* системой уравнений прямой.

Каждое из этих уравнений, например уравнение $x = az + p$, взятое само по себе, изображает плоскость (ибо это — уравнение первой степени). Так как координаты точек прямой Δ удовлетворяют обоим этим уравнениям, то эта прямая принадлежит одновременно обеим этим плоскостям, т. е. представляет собою прямую их пересечения.

Так как первое уравнение не содержит y, а второе x, то первая плоскость параллельна оси Oy, а вторая — оси Ox. Следовательно, плоскости, изображаемые уравнениями (3), представляют собою соответственно плоскости, проектирующие данную прямую на плоскости Ozx и Oyz (проекции берутся соответственно параллельно осям Oy и Ox) (черт. 106).



Черт. 106

Коэффициенты a, b, p и q в уравнениях (3) имеют весьма простое геометрическое значение. Именно, ясно, что p и q представляют собою не что иное, как *координаты следа прямой* (3) *на плоскости* Oxy. В самом деле, чтобы найти координаты этого следа, т. е. координаты точки A пересечения прямой (3) с плоскостью Oxy, надо в системе (3) положить $z = 0$, что и дает

$$x = p, \quad y = q.$$

Для выяснения геометрического значения коэффициентов a, b ограничимся случаем прямоугольных координат. В этом случае, при обозначениях предыдущего параграфа,

$$a = \frac{X}{Z} = \frac{l}{n}, \qquad b = \frac{Y}{Z} = \frac{m}{n},$$

или

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \qquad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \tag{4}$$

где α, β, γ обозначают углы прямой Δ с осями координат; заметим, что значения a и b не изменятся, если заменить одновременно α, β, γ на $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$.

Если даны приведенные уравнения (3), то их всегда можно преобразовать в уравнения в коэффициентах направления; для этого достаточно переписать уравнения (3) так:

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-0}{1}. \tag{5}$$

Из предыдущего следует, что уравнения (3) всегда изображают прямую, проходящую через точку $(p, q, 0)$ и имеющую коэффициенты направления a, b, 1 (или всякие три числа, пропорциональные числам a, b, 1).

Замечание 1. Одна из величин a, b или обе могут быть, в частности, равны 0. Если, например, $a = 0$, то уравнения прямой примут вид $x = p$, $y = bz + q$; в этом случае наша прямая лежит в плоскости $x = p$, параллельной плоскости Oyz, т. е. прямая параллельна этой последней плоскости. Если $a = b = 0$, то уравнения прямой примут вид $x = p$, $y = q$; прямая в этом случае параллельна оси Oz.

Замечание 2. Выводя уравнения (3), мы предполагали, что $Z \neq 0$. Если $Z = 0$, то по крайней мере одна из величин X, Y не равна нулю (так как все три величины X, Y, Z не могут по условию обращаться в 0). Пусть, например, $X \neq 0$; тогда мы сможем написать приведенные уравнения, меняя ролями переменные z и x.

Упражнения и дополнения
(Координаты прямоугольные)

1. Найти углы, которые прямая, данная приведенными уравнениями (3), составляет с осями координат.

Ответ. Из формулы (5) этого параграфа и из формулы (6) предыдущего параграфа следует

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+\beta^2+1}}.$$

2. Найти острый угол γ, который прямая, данная уравнениями $x = z + 2$, $y = -2z + 3$, составляет с осью Oz.

Ответ. $\cos\gamma = +\frac{1}{\sqrt{6}}$.

§ 134. Условия параллельности и совпадения двух прямых

Из самого определения коэффициентов направления следует, что для параллельности двух прямых, заданных уравнениями

$$\frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы векторы направлений (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) были параллельны, т. е. чтобы

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}. \tag{2}$$

Последние равенства выражают условия параллельности прямых (1).

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 z + p_1, \\ y &= b_1 z + q_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x &= a_2 z + p_2, \\ y &= b_2 z + q_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то, переписав эти уравнения в виде уравнений (5) предыдущего параграфа и применяя условия (2), убедимся, что условия параллельности выражаются равенствами

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2. \tag{4}$$

На основании геометрического значения коэффициентов p и q (см. предыдущий параграф) ясно также, что *для совпадения двух прямых* (3) необходимо и достаточно условие

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad p_1 = p_2, \quad q_1 = q_2. \tag{5}$$

§ 135. Уравнения прямой в общем виде

Приведенные уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

дают нам прямую как пересечение двух плоскостей: $x - az - p = 0$ и $y - bz - q = 0$, параллельных соответственно осям Oy и Ox. Но, конечно, для аналитического представления прямой можно воспользоваться любыми двумя плоскостями, пересекающимися вдоль данной прямой (но не сливающимися друг с другом). Пусть

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

— уравнения этих плоскостей. Совокупность двух последних уравнений представляет собою уравнения данной прямой в общем виде.

Обратно, система двух уравнений (2) всегда представляет некоторую прямую; предполагается, что плоскости, изображаемые каждым из этих уравнений в отдельности, не параллельны (и не сливаются). Это очевидно непосредственно, так как мы знаем, что система (2) представляет пересечение двух упомянутых плоскостей, т. е. прямую.

Ясно, что систему (2) мы можем заменить бесчисленным множеством других, ей эквивалентных. Это сводится к тому, что вместо двух взятых плоскостей мы можем взять любые две другие, пересекающиеся вдоль данной прямой. В частности, систему (2) можно всегда привести к простейшему виду (1) (или аналогичному виду, где роль z исполняет x или y). Для этого достаточно решить систему (2)

относительно двух из переменных x, y, z, что всегда можно сделать, как сейчас будет показано.

Заметим, прежде всего, что среди определителей [1])

$$B_1C_2-B_2C_1, \quad C_1A_2-C_2A_1, \quad A_1B_2-A_2B_1 \tag{3}$$

по крайней мере один не равен нулю, так как если бы все эти три величины были равны нулю, то мы имели бы

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

и плоскости, изображаемые уравнениями системы (1), были бы параллельны, что противоречит условию.

Предположим для определенности, что не равна нулю третья из величин (3), т. е. что

$$A_1B_2-A_2B_1 \neq 0. \tag{4}$$

Тогда, решив систему (2) относительно переменных x и y, мы получим уравнения вида (1).

Итак, чтобы получить приведенные уравнения из общих, достаточно эти последние решить относительно двух из переменных.

В свою очередь, приведенные уравнения можно всегда сразу преобразовать в уравнения в коэффициентах направления (см. предыдущий параграф.).

З а м е ч а н и е. Если плоскости, представляемые уравнениями (2), параллельны, то все-таки удобно говорить, что эти плоскости пересекаются по прямой, но что прямая их пересечения — *бесконечно удаленная*, или *несобственная*.

Упражнения

1. Даны уравнения прямой в общем виде:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+5&=0,\\ 2x-y-2z+1&=0.\end{aligned}\right\}$$

Найти приведенные уравнения и уравнения в коэффициентах направления.

Ответ. Приведенные уравнения: $x=\frac{1}{3}z-2$, $y=-\frac{4}{3}z-3$. Один из видов уравнения в коэффициентах направления:

$$\frac{x+2}{\frac{1}{3}}=\frac{y+3}{-\frac{4}{3}}=\frac{z}{1}, \text{ или } \frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z}{3}.$$

---

[1]) Это — определители, составленные из таблицы

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2. \end{matrix}$$

2. Та же задача для прямой

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z \quad &= 0, \\ 2x+4y-z+6 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ. Приведенные уравнения (решаем относительно x и z): $x = -2y-2$, $z=2$. Один из видов уравнения в коэффициентах направления:

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}.$$

3. Найти углы, которые прямая, представленная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y-2z+5 &= 0, \\ 4x+4y-z+2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

составляет с осями прямоугольных координат.

Решение. Приведенные уравнения этой прямой будут:

$$x=\frac{5}{4}z-\frac{7}{2},\ y=-z+3;$$

следовательно, коэффициентами направления будут $\left(\frac{5}{4},\ -1,\ 1\right)$, или $(5,\ -4,\ 4)$. Отсюда

$$\cos\alpha=\pm\frac{5}{\sqrt{57}},\ \cos\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{57}},\ \cos\gamma=\pm\frac{4}{\sqrt{57}}.$$

IV. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

Переходя к решению ряда основных задач, связанных с аналитическим представлением прямых и плоскостей в пространстве, мы могли бы сделать ряд предварительных замечаний, аналогичных тем, которые были приведены перед решением задач, касающихся прямой на плоскости. Во избежание повторения мы их не воспроизводим.

В нижеследующем слова: «дана плоскость», «дана прямая», «найти плоскость» и т. п. надо понимать так: «дано уравнение плоскости» и т. п.

§ 136. Задача 1. Найти пересечение двух плоскостей

Две плоскости, заданные уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{2}$$

могут либо пересекаться (иметь общую прямую), либо быть параллельными (иметь общую бесконечно удаленную прямую), либо совпадать (иметь все точки общими).