2. Та же задача для прямой

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z \quad &= 0, \\ 2x+4y-z+6 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ. Приведенные уравнения (решаем относительно x и z): $x = -2y-2$, $z=2$. Один из видов уравнения в коэффициентах направления:

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}.$$

3. Найти углы, которые прямая, представленная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y-2z+5 &= 0, \\ 4x+4y-z+2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

составляет с осями прямоугольных координат.

Решение. Приведенные уравнения этой прямой будут:

$$x=\frac{5}{4}z-\frac{7}{2},\ y=-z+3;$$

следовательно, коэффициентами направления будут $\left(\frac{5}{4},\ -1,\ 1\right)$, или $(5,\ -4,\ 4)$. Отсюда

$$\cos\alpha=\pm\frac{5}{\sqrt{57}},\ \cos\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{57}},\ \cos\gamma=\pm\frac{4}{\sqrt{57}}.$$

IV. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

Переходя к решению ряда основных задач, связанных с аналитическим представлением прямых и плоскостей в пространстве, мы могли бы сделать ряд предварительных замечаний, аналогичных тем, которые были приведены перед решением задач, касающихся прямой на плоскости. Во избежание повторения мы их не воспроизводим.

В нижеследующем слова: «дана плоскость», «дана прямая», «найти плоскость» и т. п. надо понимать так: «дано уравнение плоскости» и т. п.

§ 136. Задача 1. Найти пересечение двух плоскостей

Две плоскости, заданные уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{2}$$

могут либо пересекаться (иметь общую прямую), либо быть параллельными (иметь общую бесконечно удаленную прямую), либо совпадать (иметь все точки общими).

Мы уже умеем определять заранее, какой из этих случаев будет иметь место (§ 130). В первом случае (когда плоскости пересекаются по прямой на конечном расстоянии) прямая эта определяется системою уравнений (1), (2). В случае надобности мы можем преобразовать эту систему к приведенному виду или в уравнения в коэффициентах направления (см. предыдущий параграф).

§ 137. Задача 2. Найти пересечение трех плоскостей

Координаты точки пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

должны удовлетворять одновременно этим трем линейным уравнениям.

Система (1) допускает одно определенное решение тогда и только тогда, когда определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}$$

отличен от нуля; в этом и только в этом случае плоскости (1) пересекаются в одной определенной точке (на конечном расстоянии). Предоставляя читателю произвести несложное алгебраическое исследование возможных остальных случаев [1]), ограничимся следующими замечаниями, непосредственно вытекающими из известных свойств плоскостей.

Кроме упомянутого случая, когда $\Delta \neq 0$ и когда, следовательно, существует одна точка пересечения, могут представиться следующие случаи (во всех этих случаях $\Delta = 0$):

1) Данные три плоскости могут вовсе не иметь общих точек, т. е. составлять призму (быть параллельными одной и той же прямой, не пересекаясь по одной и той же прямой), или же быть взаимно параллельными, не сливаясь в одну плоскость. В этом (и только в этом) случае система (1) несовместима.

2) Все три данные плоскости могут пересекаться по одной и той же прямой или же сливаться в одну плоскость. Тогда (и только тогда) система (1) допускает бесчисленное множество решений.

Решая систему (1), всегда можно узнать, с каким из перечисленных случаев мы имеем дело.

---

[1]) Ниже (§ 168) мы дадим полное исследование при помощи однородных координат.

Упражнения

1. Найти пересечение трех плоскостей

$$x+y-z=0,\ 2x-y+z-3=0,\ x-y-2z+1=0.$$

Ответ. Точка (1, 0, 1).

2. Найти пересечение трех плоскостей

$$x+2y+3z-1=0,\ x+y+z+1=0,\ 2x+3y+4z=0.$$

Ответ. Последнее уравнение есть следствие первых двух (получается путем сложения первых двух уравнений). Поэтому третье уравнение можно отбросить. Остается удовлетворить первым двум уравнениям. Эти два уравнения определяют прямую

$$x+2y+3z-1=0,$$
$$x+y+z+1=0,$$

по которой пересекаются три данные плоскости.

3. Найти пересечение трех плоскостей

$$x+2y+3z-1=0,\ x+y+z+1=0,\ 2x+3y+4z+5=0.$$

Ответ. Если сложить первые два уравнения и из полученного уравнения вычесть третье, получим $-5=0$, т. е. невозможное равенство. Значит, данные плоскости не пересекаются (пересекаются в бесконечно удаленной точке). Легко проверить, что эти плоскости не параллельны. Следовательно, они составляют призму.

§ 138. Задача 3. Найти формулы перехода к новой системе декартовых координат, плоскости которой заданы уравнениями

Если новые координатные плоскости заданы уравнениями (1) предыдущего параграфа (причем первое изображает плоскость $O'y'z'$, второе $O'z'x'$, а третье $O'x'y'$), то искомые формулы перехода будут (сравн. § 99):

$$\left.\begin{aligned} x' &= k_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1),\\ y' &= k_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2),\\ z' &= k_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где k_1, k_2, k_3 — постоянные, которые можно взять произвольно (разумеется, отличными от нуля), если положительные направления и длины новых координатных векторов безразличны. Мы, конечно, предполагаем, что данные плоскости пересекаются в одной точке, т. е. что $\Delta \neq 0$. Доказательство формул (1) совершенно аналогично доказательству формул § 99.

§ 139. Задача 4. Найти пересечение плоскости и прямой

Если прямая и плоскость заданы общими уравнениями (например прямая представлена первыми двумя уравнениями системы (1) § 137, а плоскость — третьим уравнением той же системы), то мы приходим к задаче, рассмотренной в упомянутом параграфе.

Решение получает более простой вид, если прямая задана, например, параметрически. Пусть

$$x = x_0 + Xt, \quad y = y_0 + Yt, \quad z = z_0 + Zt \tag{1}$$

— параметрическое представление данной прямой и

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

— уравнение данной плоскости. Подставляя выражения (1) в (2), получим

$$(AX + BY + CZ)\,t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{3}$$

Если коэффициент при t не равен нулю, то мы найдем из (3) вполне определенное значение t. Подставив это значение в (1), получим координаты x, y, z точки пересечения.

Но если

$$AX + BY + CZ = 0 \tag{4}$$

и при этом свободный член $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ уравнения (3) отличен от нуля, тогда точки пересечения нет (или, как часто говорят, она находится в бесконечности); это значит, что прямая и плоскость параллельны.

Если, наконец, имеет место равенство (4) и, кроме того,

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{5}$$

то уравнение (3) обращается в тождество: $0 = 0$ и, следовательно, удовлетворяется при всяких значениях t. Это значит, что прямая не только параллельна плоскости, но и расположена на ней.

Те же результаты получим, если прямая задана уравнениями в коэффициентах направления

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Y}. \tag{1a}$$

Запомним, что равенство (4) представляет собою условие параллельности прямой (1), или, что все равно, прямой (1a) и плоскости (2).

Можно также сказать, что равенство (4) есть условие параллельности плоскости (2) и вектора (X, Y, Z).

Совокупность равенств (4) и (5) дает условия совмещения прямой и плоскости.

Если прямая представлена приведенными уравнениями

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{6}$$

то, переписав их в виде

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-0}{1},$$

видим, что условие параллельности плоскости и прямой есть

$$Aa + Bb + C = 0; \tag{4a}$$

условие совмещения прямой и плоскости состоит из равенства (4a) и равенства

$$Ap + Bq + D = 0. \tag{5a}$$

Упражнения

1. Найти точку пересечения прямой $x = 3z + 1$, $y = z - 2$ с плоскостью $4x + y - 11z + 2 = 0$.

Ответ. $(-5, -4, -2)$.

2. При каком значении k прямая $x = kz + 2$, $y = 2kz + 4$ параллельна плоскости $x + y + z = 0$?

Ответ. $k = -\frac{1}{3}$.

§ 140. Задача 5. Найти пересечение: 1° данной поверхности и плоскости; 2° данной поверхности и прямой; 3° данной кривой и плоскости

1°. В пересечении поверхности

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

получается плоская линия, уравнения которой суть (1) и (2). Если поверхность (1) — алгебраическая n-го порядка, то плоскость пересекает ее по алгебраической линии порядка не выше n или входит целиком в поверхность, как составная часть. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим пересечение поверхности (1) с плоскостью Oxy (т. е. с плоскостью $z = 0$). Это пересечение в плоскости Oxy дается уравнением

$$\Phi(x, y, 0) = 0.$$

Ясно, что это — уравнение алгебраической линии порядка не выше n, если только оно не обращается в тождество. Если $\Phi(x, y, 0) = 0$ тождественно, то это значит, что z входит во все

члены полинома [1]) $\Phi(x, y, z)$, т. е. что $\Phi(x, y, z) = z \cdot \Phi_1(x, y, z)$, где Φ_1 — полином $(n-1)$-й степени. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение (1) распадается на два: $z = 0$ и $\Phi_1(x, y, z) = 0$. Для нахождения пересечения поверхности (1) с произвольной плоскостью (2) достаточно принять эту последнюю за новую плоскость Oxy, что на основании предыдущего приводит к результату, указанному вначале. Из этих же рассуждений вытекает, что если плоскость (2) целиком входит в состав поверхности (1), то будем иметь

$$\Phi(x, y, z) = (Ax + By + Cz + D)\,\Phi_1(x, y, z),$$

где Φ_1 — полином $(n-1)$-й степени, и поверхность (1) распадается на две: плоскость (2) и поверхность $(n-1)$-го порядка $\Phi_1(x, y, z) = 0$.

Заметим, что введение некоторых обобщенных понятий [2]) дает возможность утверждать, что линия пересечения — всегда порядка n (если исключить случай распадения). Тогда предыдущий результат не противоречит общему определению порядка алгебраической линии в пространстве [3]), как произведения порядков поверхностей, пересечением которых эта линия является.

2°. Рассмотрим теперь пересечение поверхности (1) с прямою; последнюю представим параметрически:

$$x = x_0 + Xt, \quad y = y_0 + Yt, \quad z = z_0 + Zt. \tag{3}$$

Значения параметра t, соответствующие точкам пересечения, определяются из уравнения

$$\Phi(x_0 + Xt,\ y_0 + Yt,\ z_0 + Zt) = 0. \tag{4}$$

Если поверхность (1) — алгебраическая порядка n, то уравнение (4) будет степени n или низшей; оно может обратиться и в тождество. Таким образом, имеется не более n точек пересечения, если исключить случай, когда прямая принадлежит поверхности; сравн. § 100.

При известных обобщениях [4]) можно утверждать, что если прямая не принадлежит поверхности, число точек пересечения всегда равно n. Таким образом, порядок алгебраической поверхности может быть определен как число точек пересечения поверхности с произвольною прямою, которая не принадлежит поверхности целиком.

3°. Рассмотрим, наконец, пересечение линии в пространстве,

---

[1]) Ср. аналогичные рассуждения в § 100.
[2]) См. ниже, § 174.
[3]) См. § 120.
[4]) См. ниже, § 174.

заданной уравнениями

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad \Psi(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

с плоскостью. Так как всякую плоскость можно принять за плоскость Oxy, то, не нарушая общности, можем ограничиться рассмотрением пересечения с этой плоскостью.

Подставляя в последние уравнения $z = 0$, получим систему

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \Psi(x, y, 0) = 0. \tag{6}$$

Это — уравнения линий пересечения поверхностей (5) с плоскостью Oxy. Пересечение этих линий между собою и дает искомые точки пересечения линии (5) с плоскостью Oxy. Если поверхности (5) — алгебраические порядков m и n, то линии (6) — алгебраические, порядков m и n, или меньших; мы исключаем случай, когда одно из уравнений (6) обращается в тождество, т. е. когда плоскость Oxy целиком принадлежит одной из поверхностей (5). Следовательно, число точек пересечения линии (5) с плоскостью равно $m \cdot n$ (т. е. порядку линий) или меньше, если исключить из рассмотрения случай, когда линии (6) имеют общие части.

При известных обобщениях понятий можно утверждать, что число точек пересечения плоскости и алгебраической линии всегда равно ее порядку, если исключить случаи, когда точек пересечения бесчисленное множество.

Упражнения и дополнения

1. *Степень точки относительно сферы* определяется так же, как и для окружности (см. § 100, упражнение 2). Доказать, что степень k точки $M(x_0, y_0, z_0)$ относительно сферы, заданной уравнением (см. § 117)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0,$$

равна результату подстановки в левую часть этого уравнения x_0, y_0, z_0 вместо x, y, z.

2. Доказать, что геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно двух сфер, есть плоскость. Эта плоскость называется *радикальною плоскостью* двух данных сфер (сравн. § 100, упражнение 3).

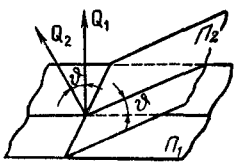
§ 141. Задача 6. Найти углы между данными плоскостями или прямыми

(Координаты предполагаются прямоугольными).

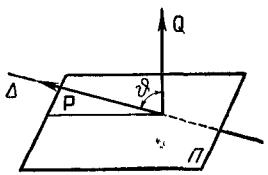
Под углом $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ между двумя прямыми Δ_1 и Δ_2 мы будем понимать любой из двух дополняющих друг друга до π углов, которые составляют прямые, проведенные из одной точки и параллельные данным. Этот угол равен углу ϑ между векторами направлений $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ этих прямых или дополняет его до π.

Под углом $\widehat{\Pi_1, \Pi_2}$ между двумя плоскостями Π_1 и Π_2 мы будем понимать также любой из двух составляемых ими двугранных углов. Этот угол равен углу ϑ между векторами направлений [1]) $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ этих плоскостей (черт. 107) или дополняет его до π.

Наконец, под углом $\widehat{\Delta, \Pi}$ между прямою Δ и плоскостью Π мы будем подразумевать любой из двух углов, дополняющих друг друга до π, которые прямая Δ составляет со своей прямоугольной



Черт. 107



Черт. 108

проекцией на плоскость Π. Этот угол и угол ϑ, составляемый векторами направлений $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ прямой и плоскости, связаны соотношением (черт. 108)

$$\widehat{\Delta, \Pi} = \frac{\pi}{2} \pm \vartheta,$$

если не обращать внимания на слагаемое, кратное π.

Если вспомним теперь, что вектор направления прямой, заданной уравнениями

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}, \tag{1}$$

есть вектор $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ (или всякий, ему параллельный), а вектор направления плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

есть вектор $\mathbf{Q} = (A, B, C)$ (или всякий ему параллельный), то задача нахождения углов между плоскостями и прямыми, заданными уравнениями, непосредственно сводится к задаче нахождения угла между двумя векторами, уже решенной нами в § 45. Пользуясь формулами упомянутого параграфа, сразу получаем следующие результаты:

1. Угол между двумя прямыми Δ_1, Δ_2, заданными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_1}{X_1} &= \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1}, \\ \frac{x-x_2}{X_2} &= \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) Эти векторы перпендикулярны к данным плоскостям (см. § 124).

дается формулой

$$\cos(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \pm \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \tag{4}$$

(двойной знак берется потому, что угол $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ равен либо ϑ, либо $\pi - \vartheta$, где ϑ есть угол между векторами направлений прямых).

2. Угол между двумя плоскостями Π_1, Π_2, заданными уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{5}$$

дается формулой

$$\cos(\widehat{\Pi_1, \Pi_2}) = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{6}$$

(двойной знак берется по той же причине, что и выше).

3. Угол между прямой Δ, заданной уравнениями (1), и плоскостью Π, заданной уравнением (2), дается формулой

$$\sin(\widehat{\Pi, \Delta}) = \pm \frac{AX + BY + CZ}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \tag{7}$$

перед радикалом надо взять такой знак, чтобы $\sin(\widehat{\Pi, \Delta}) \geqslant 0$, ибо по предположению оба значения угла $\widehat{\Pi, \Delta}$ заключены между 0 и π.

Замечание. Если одна или обе из рассматриваемых выше прямых заданы приведенными уравнениями вида

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

то для получения соответствующих формул достаточно вспомнить, что за вектор направления этой прямой можно взять вектор $(a, b, 1)$, так что в этом случае

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = 1.$$

Легко распространить формулы этого параграфа на случай обобщенных декартовых координат, пользуясь формулами § 56. Не надо забывать только, что A, B, C суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{Q}$, перпендикулярного к плоскости (2).

Упражнения

1. Найти угол θ между прямой $x = 2z + 1$, $y = -z + 5$ и плоскостью $x - 3y + z - 5 = 0$.

Ответ. $\sin\theta = \frac{\sqrt{66}}{11}$.

2. Найти угол θ между плоскостями $x + y + z + 2 = 0$ и $x - y + z + 4 = 0$.

Ответ. $\cos\theta = \pm\frac{1}{3}$.

3. Найти угол θ между двумя прямыми $x=5z+1$, $y=2$ и $x=z+3$, $y=4z-3$.

Ответ. $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$.

§ 142. Задача 7. Найти условия перпендикулярности данных прямых и плоскостей

(Координаты предполагаются прямоугольными).

Пользуясь формулами предыдущего параграфа или же известными уже нам условиями перпендикулярности и параллельности двух векторов, немедленно получаем при обозначениях предыдущего параграфа:

1. *Условие перпендикулярности двух прямых* Λ_1 *и* Λ_2:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \tag{1}$$

2. *Условие перпендикулярности двух плоскостей* Π_1 *и* Π_2:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{2}$$

3. *Условие перпендикулярности прямой* Δ *и плоскости* Π:

$$\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}=\frac{C}{Z}. \tag{3}$$

Напомним для сравнения *условия параллельности*, выведенные нами ранее и пригодные также для декартовых координат общего вида:

Для двух прямых

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}. \tag{1a}$$

Для двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{2a}$$

Для прямой и плоскости

$$AX+BY+CZ=0. \tag{3a}$$

Легко также вывести и эти последние формулы, пользуясь условием параллельности и перпендикулярности двух векторов.

Следует обратить внимание на разницу между видом условий для плоскости и прямой и видом соответствующих условий для двух прямых или двух плоскостей.

§ 143. Задача 8. Найти расстояние данной точки до данной плоскости

Задача эта решается аналогично задаче § 103.

Рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям упомянутого параграфа, показывают, что если плоскость задана нормальным уравнением в прямоугольных координатах

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

то расстояние h точки $M(x, y, z)$ до плоскости дается формулой

$$h = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p, \tag{1}$$

т. е. h есть результат подстановки координат точки в левую часть нормального уравнения плоскости.

Если плоскость задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

то

$$h = \lambda(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D), \tag{3}$$

где λ — нормирующий множитель:

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4}$$

Результат (3) остается справедливым и в случае декартовых координат общего вида, только постоянная λ представляется более сложной формулой, чем (4).

Формулы (1) и (3) приписывают расстоянию h определенный знак, как в § 103. Нам важно помнить лишь то, что для точек, расположенных по разные стороны плоскости, h имеет различные знаки.

Упражнения

(Координаты — прямоугольные)

1. Найти расстояние точки (2, 3, 1) до плоскости

$$3x + 2y + z + 5 = 0.$$

Ответ. $h = -\frac{18}{\sqrt{14}}$.

2. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$2x + 3y + 2z - 3 = 0 \text{ и } 4x + 6y + 4z - 1 = 0.$$

Указание. Взяв произвольную точку на одной из плоскостей, найдите ее расстояние до другой.

Ответ. $\frac{5\sqrt{17}}{34}$.

§ 144. Задача 9. Найти отношение, в котором данная плоскость делит отрезок, соединяющий две данные точки

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — данные точки, а

$$Ax+By+Cz+D=0$$

— уравнение данной плоскости, то рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям § 104, приводят к формуле

$$k=\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}, \qquad (1)$$

где M обозначает точку пересечения данной плоскости с прямой, соединяющей точки M_1 и M_2.

§ 145. Число независимых постоянных, определяющих положение плоскости и прямой в пространстве

Прежде чем перейти к решению задач, требующих нахождения прямой или плоскости по определенным условиям, сделаем замечание, аналогичное замечанию § 105.

Уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

можно переписать так:

$$z=ax+by+c, \qquad (2)$$

где положено

$$a=-\frac{A}{C}, \qquad b=-\frac{B}{C}, \qquad c=-\frac{D}{C} \qquad (3)$$

(мы предполагаем, что $C\neq 0$; если бы $C=0$, то мы могли бы решить уравнение (1) относительно x или y).

Следовательно, для того чтобы написать уравнение плоскости, достаточно знать три величины a, b и c; в соответствии с этим говорят, что положение плоскости зависит от трех независимых постоянных [в уравнении (2) этими постоянными являются a, b и c].

Общий вид уравнения (1) плоскости не противоречит этому положению, так как существенную роль в нем играют не сами четыре коэффициента A, B, C, D, а отношения трех из них к четвертому; это ясно из того, что если все коэффициенты уравнения (1) заменить величинами, им пропорциональными, оно будет выражать ту же плоскость (сравн. § 105).

Положение прямой в пространстве определяется *четырьмя* независимыми постоянными, как это явствует из приведенных уравне-

ний прямой

$$x = az + p, \quad y = bz + q. \tag{4}$$

На основании геометрического значения постоянных a, b, p, q очевидно, что все эти четыре постоянные существенны, так как изменение каждой из них влечет за собою изменение положения прямой.

Нельзя того же сказать о постоянных x_0, y_0, z_0, X, Y, Z, входящих в уравнения в коэффициентах направления

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z};$$

действительно, положение прямой не изменится, если вместо точки x_0, y_0, z_0 взять любую другую ее точку, например точку $(p, q, 0)$ пересечения прямой с плоскостью Oxy; кроме того, величины X, Y, Z можно заменить любыми величинами, им пропорциональными, например величинами $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$, 1.

В результате остаются только четыре величины p, q, a, b (где положено $a = \frac{X}{Z}$, $b = \frac{Y}{Z}$), задание которых вполне определяет прямую.

Из сказанного ясно, что для определения положения плоскости требуется, вообще говоря, три условия, а для определения положения прямой в пространстве — четыре условия [1]).

§ 146. Связка прямых и плоскостей. Пучок плоскостей

Совокупность прямых пространства, проходящих через данную точку M_0 (x_0, y_0, z_0), называется *связкой* прямых; те прямые связки, которые находятся в одной и той же плоскости, составляют пучок (§ 106). Точка M_0 называется *центром* связки.

Уравнения любой прямой, принадлежащей связке с центром в точке M_0 (x_0, y_0, z_0), очевидно, могут быть написаны в виде

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}, \tag{1}$$

где X, Y, Z — коэффициенты направления прямой. Придавая им различные значения (не равные одновременно нулю), можно придать прямой (1) любое направление, т. е. получить любую прямую связки.

---

[1]) См. § 105, сноска. Заметим, между прочим, что требование, чтобы прямая в пространстве проходила через данную точку x_0, y_0, z_0, выражается двумя условиями:

$$x_0 = az_0 + p, \quad y = bz_0 + q.$$

Уравнения (1) можно написать и так (при $Z \neq 0$):

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= a(z - z_0), \\ y - y_0 &= b(z - z_0), \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

где $a = \frac{X}{Z}$, $b = \frac{Y}{Z}$; следовательно, положение прямой, принадлежащей связке, зависит от двух независимых постоянных.

Вспомним (§ 106), что положение прямой, принадлежащей пучку, зависит от одной постоянной.

Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку M_0 (x_0, y_0, z_0), называется *связкой плоскостей*, а точка M_0 — *центром* связки.

Найдем общее уравнение плоскости, принадлежащей связке. Для того чтобы плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

проходила через точку M_0, необходимо и достаточно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению (1), т. е. чтобы

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Это — единственное условие, которое должно связывать неопределенные коэффициенты A, B, C и D. Последнее условие можно переписать и так:

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0;$$

подставляя в (2) вместо D это значение, получим уравнение, удовлетворяющее условиям задачи:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Придавая коэффициентам A, B и C в уравнении (3) различные значения, мы получим различные плоскости, проходящие через точку M_0.

Положение каждой плоскости связки характеризуется значениями коэффициентов A, B и C в уравнении (3). Но ясно, что существенную роль играют в нем не сами эти коэффициенты, а их отношения. В этом мы сразу убедимся, решив уравнение (3), например, относительно $z - z_0$:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

где положено

$$a = -\frac{A}{C}, \qquad b = -\frac{B}{C}.$$

Следовательно, положение каждой плоскости связки с данным центром вполне характеризуется *двумя* постоянными, так же как и положение прямой, принадлежащей связке прямых.

Пучком плоскостей называется совокупность плоскостей, проходящих через данную прямую Δ, называемую *осью* пучка.

Постараемся найти общий вид уравнения плоскости, принадлежащей пучку.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

суть уравнения прямой Δ (т. е. оси пучка). Каждое из двух написанных выше уравнений, взятое в отдельности, изображает некоторую плоскость; обозначим эти плоскости через Π_1 и Π_2. Прямая Δ есть пересечение плоскостей Π_1, Π_2, которые, следовательно, принадлежат пучку.

Итак, наша задача состоит в нахождении общего вида уравнения плоскостей, проходящих через пересечение двух данных. В этой формулировке задача вполне аналогична вопросу, рассмотренному в § 111.

Составим уравнение

$$l_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+l_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (5)$$

где l_1 и l_2 — произвольные постоянные, не равные одновременно нулю. Уравнение (5), которое можно переписать так:

$$(l_1A_1+l_2A_2)\,x+(l_1B_1+l_2B_2)\,y+(l_1C_1+l_2C_2)\,z+l_1D_1+l_2D_2=0,$$

есть уравнение плоскости, ибо оно — первой степени.

Эта плоскость удовлетворяет условиям задачи, т. е. проходит через линию пересечения плоскостей Π_1 и Π_2. Действительно, координаты любой точки линии пересечения упомянутых плоскостей одновременно удовлетворяют уравнениям (4), а потому обращают в нуль выражения, заключенные в скобки в левой части уравнения (5), и значит, всю левую часть его. Следовательно, любая точка пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 лежит на плоскости (5), а это и требовалось доказать.

Введем для краткости обозначения

$$F_1(x,\,y,\,z)=A_1x+B_1y+C_1z+D_1,$$
$$F_2(x,\,y,\,z)=A_2x+B_2y+C_2z+D_2.$$

Тогда уравнение (5) можно переписать так:

$$l_1F_1(x,\,y,\,z)+l_2F_2(x,\,y,\,z)=0. \qquad (6)$$

Придавая различные значения величинам l_1 и l_2, мы получим различные плоскости, проходящие через прямую (1). Что мы получим таким образом *все* такие плоскости, будет ясно из решения задачи § 152.

Вместо двух постоянных l_1 и l_2 можно ввести одну постоянную

$$k = \frac{l_2}{l_1}$$

и написать уравнение (6) в виде

$$F_1(x, y, z) + kF_2(x, y, z) = 0. \tag{7}$$

Мы видим, что положение плоскости, принадлежащей пучку, зависит от *одной* постоянной (так же как и в случае прямых на плоскости).

Если уравнения плоскостей $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ взяты в нормальной форме, то постоянная k приобретает весьма простое значение, которое предоставляем выяснить читателю (сравн. § 115).

Легко видеть, что если плоскости $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ параллельны, то все плоскости, представляемые уравнением (6) или (7), будут параллельны. В этом случае также говорят, что мы имеем дело с пучком, но ось его находится в бесконечности («несобственная ось»).

Совершенно аналогично сказанному в § 113 легко показать [1]), что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы *три плоскости*, заданные уравнениями

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

принадлежали одному пучку, заключается в следующем: *существуют три числа* l_1, l_2, l_3, *не равные одновременно нулю, и такие, что имеем тождественно* (т. е. для всех x, y, z):

$$l_1F_1(x, y, z) + l_2F_2(x, y, z) + l_3F_3(x, y, z) = 0. \tag{9}$$

Аналогично, для того чтобы *четыре плоскости*

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ F_2(x, y, z) &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ F_3(x, y, z) &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ F_4(x, y, z) &= A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

принадлежали одной связке [т. е. имели общую точку [2])], необходимо и достаточно, чтобы существовали четыре числа l_1, l_2, l_3, l_4,

---

[1]) Утверждения, высказанные в остальной части этого параграфа, будут доказаны ниже (в главе VI, § 168).

[2]) Сюда включается и случай, когда общая точка — бесконечно удаленная («несобственная»), т. е. когда все четыре плоскости параллельны одной и той же прямой. См. подробнее в главе VI, § 168.

не равные одновременно нулю, и такие, что

$$l_1F_1(x, y, z)+l_2F_2(x, y, z)+l_3F_3(x, y, z)+l_4F_4(x, y, z)\equiv 0;$$

это условие эквивалентно условию

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0. \qquad (11)$$

§ 147. Задача 10. Найти прямую, проходящую через заданную точку и параллельную заданной прямой (или вектору)

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — заданная точка, а X, Y, Z — коэффициенты направления заданной прямой (или координаты заданного вектора), то уравнения искомой прямой, очевидно, напишутся в виде

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}.$$

§ 148. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярную к заданной плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

(Координаты предполагаются прямоугольными). Эта задача сводится к предыдущей, так как искомая прямая должна быть параллельна вектору (A, B, C).

§ 149. Задача 12. Найти прямую, проходящую через две заданные точки

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — заданные точки, то, очевидно (сравн. § 108), уравнения

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

представляют искомую прямую.

Этот результат можно получить непосредственно, исходя из условий коллинеарности трех точек (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (см. § 38).

§ 150. Задача 13. Найти плоскость, проходящую через заданную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и параллельную заданной плоскости

Пусть

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

есть уравнение заданной плоскости.

Чтобы решить поставленную задачу, надо так подобрать коэффициенты A, B и C в общем уравнении

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (2)$$

плоскостей, проходящих через заданную точку (см. § 146), чтобы плоскость, изображаемая последним уравнением, была параллельна плоскости (1). Но ведь для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты A, B и C были пропорциональны коэффициентам A_1, B_1 и C_1. Подставляя в уравнение (2) вместо A, B и C пропорциональные им величины A_1, B_1 и C_1, найдем уравнение искомой плоскости:

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0.$$

§ 151. Задача 14. Найти плоскость, проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярную к заданной прямой или вектору

(Координаты предполагаются прямоугольными). Если X, Y, Z обозначают коэффициенты направления заданной прямой (или координаты заданного вектора), то, при обозначениях предыдущего параграфа, коэффициенты A, B, C должны быть пропорциональны этим величинам (см. § 142, 3). Поэтому задача решается, как предыдущая (вместо A_1, B_1, C_1 надо взять X, Y, Z).

В случае декартовых координат общего вида получим то же решение, если под X, Y, Z будем подразумевать ковариантные координаты данного вектора.

§ 152. Задача 15. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и заданную точку

Пусть $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ представляют уравнения данной прямой. Мы знаем, что уравнение

$$F_1(x, y, z) + kF_2(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

представляет некоторую плоскость, проходящую через данную прямую (§ 146). Постараемся теперь подобрать постоянную k так, чтобы эта плоскость проходила через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не расположенную на заданной прямой. Выражая условие расположения M_1 на плоскости (1), получим

$$F_1(x_1, y_1, z_1) + kF_2(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{F_1(x_1, y_1, z_1)}{F_2(x_1, y_1, z_1)}. \qquad (2)$$

Подставляя это значение k в (1), получим уравнение искомой плоскости. В том (и только в том) случае, когда точка M_1 находится на плоскости $F_2(x, y, z) = 0$, для k получается значение ∞, так как в этом (и только в этом) случае знаменатель в выражении для k, т. е. $F_2(x_1, y_1, z_1)$, обращается в нуль [1]). Условившись считать, что при $k = \infty$ уравнение (1) сводится к уравнению $F_2(x, y, z) = 0$, мы видим, что наша задача допускает всегда одно определенное решение.

Из этого следует, в частности, что, придавая постоянной k в уравнении (1) подходящее значение, можно получить *любую* плоскость, проходящую через заданную прямую.

Пусть, например, требуется провести плоскость через прямую

$$x = 2z - 1, \qquad y = z + 5$$

и через точку $M_1(1, 3, 2)$.

Общее уравнение плоскостей, проходящих через данную прямую, будет

$$(x - 2z + 1) + k(y - z - 5) = 0.$$

Чтобы эта плоскость проходила через точку (1, 3, 2), должно выполняться условие $(1 - 2\cdot 2 + 1) + k(3 - 2 - 5) = 0$, откуда $k = -\frac{1}{2}$. Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получим, после упрощений, уравнение искомой плоскости:

$$2x - y - 3z + 7 = 0.$$

§ 153. Задача 16. Найти плоскость, проходящую через три заданные неколлинеарные точки

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три данные точки, то решение задачи непосредственно получим,

---

[1]) По условию, точка M_1 не расположена на данной прямой, поэтому числитель $F_1(x_1, y_1, z_1)$ и знаменатель $F_2(x_1, y_1, z_1)$ не могут быть одновременно равными нулю.

выражая, что любая точка $M(x, y, z)$ искомой плоскости компланарна с тремя данными. Это дает (§ 40)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Разлагая определитель в левой части (1) по элементам первой строки, получим уравнение первой степени, т. е. уравнение плоскости, которая, очевидно, удовлетворяет условиям задачи.

Легко видеть, что так как данные три точки не расположены на одной прямой, то коэффициенты при x, y, z в этом уравнении не могут быть равны нулю одновременно.

Нашу задачу можно свести также к задаче предыдущего параграфа. Для этого достаточно составить уравнения прямой, проходящей через две из заданных точек (что мы умеем делать, § 149), а затем составить уравнение плоскости, проходящей через эту прямую и третью из заданных точек (что составляет задачу, решенную в предыдущем параграфе).

Поясним сказанное примером.

Пусть требуется провести плоскость через три точки $M_1(1, 3, 7)$, $M_2(2, 3, 8)$ и $M_3(0, 1, 2)$. Уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, суть

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-7}{1},$$

или

$$\left.\begin{aligned} y-3&=0, \\ x-z+6&=0. \end{aligned}\right\}$$

Общее уравнение плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$(y-3)+k(x-z+6)=0.$$

Теперь надо подобрать k так, чтобы это уравнение изображало плоскость, проходящую и через точку $M_3(0, 1, 2)$. Выражая это условие, получим

$$-2+k\cdot 4=0,$$

т. е. $k=\frac{1}{2}$. Подстановка этого значения k в предыдущее уравнение приводит нас к уравнению искомой плоскости:

$$x+2y-z=0.$$

§ 154. Задача 17. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и параллельную другой заданной прямой или вектору

Предполагается, что заданные прямые не параллельны, иначе задача была бы, очевидно, неопределенной. Если

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

— уравнения прямой, через которую мы проводим плоскость, а (X', Y', Z') — вектор направления другой заданной прямой, то решение задачи получим, написав уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум векторам: (X, Y, Z) и (X', Y', Z'). Уравнение это нами уже выведено в § 123 и имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Задачу эту можно решить иным способом: написать общее уравнение плоскостей, проходящих через данную прямую [§ 146, уравнение (7)], и подобрать значение постоянной k так, чтобы эта плоскость была параллельна другой данной прямой (или вектору).

Пусть, например, требуется через прямую

$$4x \quad 5z-2, \qquad y=-3z-1$$

провести плоскость, параллельную вектору $\mathbf{P}=(2, 6, 1)$.

Уравнение любой плоскости, проходящей через данную прямую, имеет вид

$$(4x-5z+2)+k(y+3z+1)=0,$$

или

$$4x+ky+(3k-5)z+2+k=0. \qquad (*)$$

Условие параллельности этой плоскости и вектора $\mathbf{P}$ дает

$$2\cdot 4+6k+1\cdot(3k-5)=0,$$

откуда получаем $k=-\frac{1}{3}$. Подставляя это значение в (*), получаем требуемое уравнение:

$$12x-y-18z+5=0.$$

§ 155. Задача 18. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и перпендикулярную к заданной плоскости

Эта задача (для случая прямоугольных координат) решается аналогично предыдущей задаче.

§ 156. Задача 19. Найти условия компланарности (пересечения) двух данных прямых

Две прямые в пространстве вообще не пересекаются и не компланарны.

Если две прямые компланарны, то они пересекаются в конечной или бесконечно удаленной точке (под последним мы, как всегда, подразумеваем, что прямые параллельны). Найдем условие того, чтобы две прямые

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_0}{Z_1} \tag{1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2} \tag{2}$$

были компланарны (т. е. пересекались в конечной или бесконечно удаленной точке).

Напишем для этого уравнение плоскости, проходящей через прямую (1) и параллельную прямой (2). Согласно формуле (1) § 154, это уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Для того чтобы наши прямые были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы прямая (2) была не только параллельна этой плоскости, но и принадлежала ей, а для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы хоть одна из точек прямой (2) принадлежала плоскости (3). Выражая, что точка (x_2, y_2, z_2) находится на плоскости (3), получаем требуемое условие:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 z + p_1, \\ y &= b_1 z + q_1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x &= a_2 z + p_2, \\ y &= b_2 z + q_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то можно взять

$$(X_1, Y_1, Z_1) = (a_1, b_1, 1), \quad (X_2, Y_2, Z_2) = (a_2, b_2, 1),$$
$$x_1 = p_1, \quad y_1 = q_1, \quad z_1 = 0, \quad x_2 = p_2, \quad y_2 = q_2, \quad z_2 = 0,$$

и условие (4) примет вид

$$\begin{vmatrix} p_2 - p_1 & q_2 - q_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, вычитая вторую строку из третьей, легко получаем

$$\begin{vmatrix} p_2 - p_1 & q_2 - q_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4a}$$

§ 157. Задача 20. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из заданной точки M на заданную прямую Δ

(Координаты предполагаются прямоугольными). Искомый перпендикуляр мы можем определить как линию пересечения плоскости, проходящей через точку M и прямую Δ, с плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной к прямой Δ. Уравнения обеих плоскостей мы умеем найти (§ 152 и 151). Совокупность этих двух уравнений и будет изображать искомую прямую.

Упражнения и дополнения (к § 146—157)

1. Найти прямую, проходящую через точку (5, 6, 0) и параллельную прямой

$$y = 9x - 1, \quad z = 2x + 5.$$

Ответ. $x - 5 = \frac{y-6}{9} = \frac{z}{2}$.

2. Найти прямую, проходящую через точку (—3, 2, 1) и перпендикулярную к плоскости $x + 3z - 1 = 0$ (координаты — прямоугольные).

Ответ. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{3}$, или $y - 2 = 0$, $3x - z + 10 = 0$.

3. Найти прямую, проходящую через точки (1, 3, 5) и (2, 3, 7).

Ответ. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-5}{2}$, или $y-3=0$, $2x-z+3=0$.

4. Найти плоскость, проходящую через точку (0, —3, 1) и перпендикулярную к вектору (6, 8, 10) (координаты—прямоугольные).

Ответ. $6x+8(y+3)+10(z-1)=0$, или $6x+8y+10z+14=0$.

5. Найти плоскость, проходящую через прямую

$$y=2x+4,\ z=-x+1$$

и через точку (2, 0, 0).

Ответ. $6x+y+8z-12=0$.

6. Найти плоскость, проходящую через точки (—1, 1, 1), (1, —1, 1), (1, 1, —1).

Ответ. $x+y+z-1=0$.

7. Найти плоскость, проходящую через прямую

$$x+y+1=0,\ x+2y+2z=0$$

и перпендикулярную к плоскости $2x-y-z=0$ (координаты—прямоугольные).

Ответ. $3x+4y+2z+2=0$.

8. Найти (в прямоугольных координатах) уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (1, 0, 1) на прямую

$$x=3z+2,$$
$$y=2z;$$

найти основание этого перпендикуляра.

Ответ. Уравнения перпендикуляра

$$x-2y+z-2=0,$$
$$3x+2y+z-4=0.$$

Координаты основания перпендикуляра

$$\left(\frac{11}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{1}{7}\right).$$

9. Найти значение p, при котором прямые $x=z+p$, $y=-z$ и $x=2z+1$, $y=3z+2$ пересекаются; найти точку пересечения.

Ответ. $p=\frac{1}{2}$; координаты точки пересечения будут $\left(0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

§ 158. Задача 21. Найти расстояние заданной точки до заданной прямой [1])

(Координаты предполагаются прямоугольными). Под расстоянием точки M_1 (x_1, y_1, z_1) от прямой Δ подразумевается, конечно, кратчайшее расстояние, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из M_1 на Δ. Эту длину легко найти следующим образом. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к Δ. Точка пересечения K этой плоскости с Δ есть основание упомянутого перпендикуляра. Так как эту точку мы умеем найти, то сможем вычислить и расстояние $|M_1K|$.

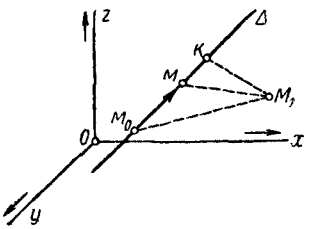
[1]) При первом чтении этот параграф можно опустить.

Другой способ быстрее ведет к цели. Пусть

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \qquad (1)$$

— уравнения данной прямой Δ. Мы можем всегда для наглядности считать, что вектор $\mathbf{P}=\overrightarrow{M_0M}=(X, Y, Z)$ расположен на самой прямой Δ и приложен к точке M_0 (x_0, y_0, z_0) этой прямой (черт. 109). Обозначим через $\mathbf{Q}$ векторное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\mathbf{P}$[1]), т. е. положим

$$\mathbf{Q}=\overrightarrow{M_1M_0}\times\mathbf{P}. \qquad (2)$$



Черт. 109

Мы знаем (§ 25), что $|\mathbf{Q}|=2$ площ. $M_0MM_1=|\mathbf{P}|\cdot h$, где h — искомое расстояние. Следовательно,

$$h=\frac{|\mathbf{Q}|}{|\mathbf{P}|}. \qquad (3)$$

Но координаты вектора $\mathbf{Q}$, который представляет собою векторное произведение векторов

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}=(X, Y, Z),$$

равны соответственно определителям (§ 51)

$$\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y \end{vmatrix};$$

следовательно, длина $|\mathbf{Q}|$ равна корню квадратному из суммы квадратов этих определителей. Таким образом, формула (3) дает

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

§ 159. Задача 22. Найти уравнения общего перпендикуляра к двум прямым[2])

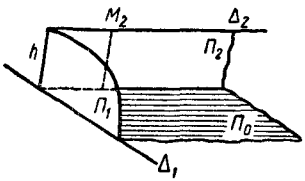
Мы знаем, что две прямые Δ_1, Δ_2 в пространстве вообще не пересекаются. Легко показать, что существует одна и только

[1]) $\mathbf{Q}$ есть не что иное, как векторный момент вектора $\mathbf{P}$ относительно точки M_1; см. § 25, упражнение 1.

[2]) При первом чтении этот параграф можно опустить.

одна [1]) прямая, пересекающая эти две прямые и перпендикулярная к ним обеим (*общий перпендикуляр*). Эту прямую можно найти следующим образом.

Проведем через прямую Δ_1 (черт. 110) плоскость Π_0, параллельную прямой Δ_2. Затем проведем две плоскости, перпендикулярные к Π_0: одну (Π_1) — через Δ_1 и другую (Π_2) — через Δ_2. Пересечение плоскостей Π_1 и Π_2 и даст нам искомый общий перпендикуляр. Если координаты прямоугольные, то уравнения его легко найти, ибо мы умеем найти уравнения всех упомянутых плоскостей, в частности, плоскостей Π_1 и Π_2.



Черт. 110

Легко убедиться, что отрезок h этого общего перпендикуляра, заключенный между точками пересечения с Δ_1 и Δ_2, есть кратчайшее расстояние между прямыми Δ_1 и Δ_2 (т. е. что расстояние между любыми двумя другими точками, взятыми соответственно на Δ_1 и Δ_2, больше h).

§ 160. Задача 23. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми [2])

(Координаты предполагаются прямоугольными). Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа. Для вычисления h нет необходимости находить уравнения общего перпендикуляра. Достаточно найти только уравнение плоскости Π_0, а затем взять любую точку на Δ_2 и найти ее расстояние до плоскости Π_0. Это расстояние как раз равно h, ибо прямая Δ_2 параллельна плоскости Π_0.

Пусть

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2} \tag{1}$$

суть уравнения прямых Δ_1 и Δ_2.

Уравнение плоскости, проходящей через Δ_1 и параллельной прямой Δ_2, будет (см. § 154).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0, \tag{2}$$

---

[1]) Исключение представляет случай, когда данные прямые параллельны, тогда общих перпендикуляров — бесчисленное множество.

[2]) При первом чтении этот параграф можно опустить.

или, разлагая по элементам первой строки:

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}+(y-y_1)\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}+(z-z_1)\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Остается теперь найти расстояние какой-либо точки прямой Δ_2 до плоскости (2). Проще всего с этой целью взять точку $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$.

Согласно общему правилу, это расстояние найдется, если в уравнение (2), предварительно приведенное к нормальному виду, мы подставим на место x, y, z координаты точки M_2. Следовательно [1])

$$h=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}; \qquad (4)$$

знак перед радикалом следует подобрать так, чтобы $h>0$.

[1]) Чтобы привести уравнение (2) к нормальному виду, достаточно, как известно, умножить его на $\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где A, B, C обозначают коэффициенты при x, y, z уравнения (2), написанного в разложенном виде (3).