III. ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Целесообразность применения обобщенных декартовых координат для изучения аффинных свойств фигур заключается в том, что положение точки в этих координатах определяется при помощи таких величин и таких свойств, которые остаются инвариантными (неизменными) при аффинных преобразованиях (параллельность между прямыми, отношение параллельных векторов).

Нам предстоит в дальнейшем познакомиться с так называемыми проективными преобразованиями, являющимися обобщением аффинных, при которых прямые остаются прямыми, как и при аффинных, но параллельность между прямыми уже нарушается, а также изменяется отношение параллельных отрезков; мы пока имеем в виду лишь так называемые точечные проективные преобразования.

Для изучения свойств, остающихся неизменными при таких преобразованиях, целесообразно ввести координаты более общего типа, чем декартовы, определение которых было бы также основано на свойствах, остающихся неизменными при проективных преобразованиях.

В следующих нескольких параграфах (§ 176—179) мы дадим предварительное понятие о проективных координатах точки и о проективных точечных преобразованиях; ознакомление (даже беглое) с содержанием этих параграфов достаточно для понимания всего дальнейшего основного (т. е. отпечатанного крупным шрифтом) текста книги. Остальные параграфы настоящей главы, отпечатанные мелким шрифтом, предназначены для читателей, желающих несколько глубже проникнуть в геометрическую сущность дела.

§ 176. О дробно-линейных (гомографических) подстановках

В дальнейшем нам придется иметь дело с так называемыми дробнолинейными или гомографическими подстановками, о которых мы скажем здесь несколько слов.

Если переменные x и y связаны соотношением вида

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \tag{1}$$

где α, β, γ, δ — постоянные (действительные или комплексные), то говорят, что y получается из x *дробно-линейной* или *гомографической* подстановкой.

Подстановка (1) называется *неособенной*, если определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$$

отличен от нуля; в противном случае подстановка называется *особенной*.

Во всем дальнейшем мы будем рассматривать лишь неособенные подстановки, ибо особенные подстановки интереса не представляют [1]).

При этом условии подстановка (1) однозначно обратима, т. е. соотношение (1) однозначно разрешимо относительно x. А именно, решая уравнение (1) относительно x, получаем

$$x=\frac{\delta y-\beta}{-\gamma y+\alpha}. \tag{2}$$

Таким образом, x получается из y также гомографической неособенной подстановкой.

При рассмотрении гомографических подстановок целесообразно не исключать значений $x=\infty$, $y=\infty$. А именно, мы условимся говорить, что значению $x=\infty$ соответствует значение $y=\frac{\alpha}{\gamma}$, а значению $y=\infty$ соответствует значение $x=-\frac{\delta}{\gamma}$: эти значения получаются в результате предельного перехода $x\to\infty$, $y\to\infty$ соответственно в формулах (1) и (2).

Если в подстановке (1) имеем $\gamma=0$ (тогда необходимо $\alpha\neq 0$, $\delta\neq 0$, иначе мы имели бы $\Delta=0$), эта подстановка обращается в линейную (вообще неоднородную) подстановку

$$y=\frac{\alpha}{\delta}x+\frac{\beta}{\delta}.$$

Линейную подстановку мы иногда в дальнейшем будем называть *целой линейной*, если требуется противопоставить ее дробно-линейной.

Упражнения и дополнения

1. Исследовать изменение y в зависимости от изменения x в формуле (1), считая α, β, γ, δ действительными величинами.

Решение. Мы решим эту задачу, пользуясь понятием производной (хотя легко обойтись и без этого). Имеем

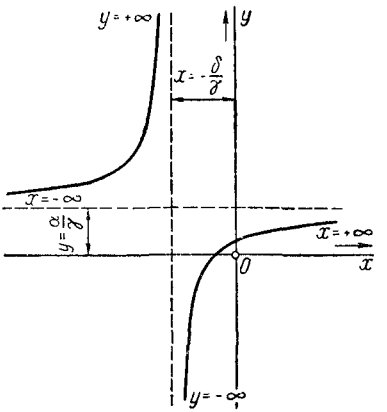
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2}.$$

Следовательно, если $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, то y всегда возрастает с возрастанием x, а если $\alpha\delta-\beta\gamma<0$, то y все время убывает; мы пока исключаем значение $x=-\frac{\delta}{\gamma}$, при котором $y=\infty$. В случае особенной подстановки ($\alpha\delta-\beta\gamma=0$) y остается постоянным.

Исследуем более подробно случай $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ (случай $\alpha\delta-\beta\gamma<0$ исследуется аналогично). Будем считать также, что $\gamma\neq 0$, ибо в противном слу-

[1]) В случае особенной подстановки, т. е. в случае, когда $\alpha\delta-\gamma\beta=0$, числа α, β пропорциональны числам γ, δ, и поэтому правая часть формулы (1) от x фактически не зависит.

чае мы имели бы дело с целой линейной подстановкой, исследование которой совершенно элементарно. Когда x возрастает от $-\infty$ до $-\frac{\delta}{\gamma}$, величина y возрастает от $\frac{\alpha}{\gamma}$ до $+\infty$; при переходе x через значение $-\frac{\delta}{\gamma}$, y перескакивает от значения $+\infty$ к значению $-\infty$. При дальнейшем возрастании x значение y возрастает и при x, стремящемся к $+\infty$, снова стремится к $\frac{\alpha}{\gamma}$. Таким образом, мы имеем график изменения y, изображенный на черт. 112.



Черт. 112

Мы видим, что каждому значению x соответствует одно значение y, и обратно. Мы не различаем здесь значений $x = +\infty$, $-\infty$ и $y = +\infty$, $-\infty$.

2. Показать, что совокупность неособенных гомографических подстановок составляет группу (см. § 78).

Доказательство. Как было уже показано, подстановка, обратная гомографической, есть гомографическая. Остается показать, что последовательность двух неособенных гомографических подстановок есть тоже неособенная гомографическая подстановка. Это доказывается непосредственной проверкой: пусть $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ — гомографическая подстановка, вслед за которой производится другая: $z = \frac{\alpha' y + \beta'}{\gamma' y + \delta'}$. Внося в последнюю формулу предыдущее значение y, получаем

$$z = \frac{\alpha' \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + \beta'}{\gamma' \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + \delta'} = \frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma)\, x + (\alpha'\beta + \beta'\delta)}{(\gamma'\alpha + \delta'\gamma)\, x + (\gamma'\beta + \delta'\delta)}.$$

Это гомографическая подстановка, причем неособенная, так как

$$\begin{vmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 177. Проективные координаты точки

1°. Проективные координаты точки на прямой. Положение точки M на данной прямой может быть, как мы знаем, определяемо однородными декартовыми координатами x_1, x_2, отношение которых

$$\frac{x_1}{x_2} = x$$

представляет собою неоднородную декартову координату x (абсциссу).

Введем в рассмотрение вместо x_1 и x_2 новые величины y_1, y_2, связанные с предыдущими линейной однородной неособенной подстановкой,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2, \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где β_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — постоянные, такие, однако, что определитель

$$B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (это условие и выражает, что рассматриваемая подстановка — неособенная).

Вследствие условия $B \neq 0$ подстановка (1) может быть однозначно обращена, т. е. уравнения (1) могут быть однозначно разрешены относительно x_1, x_2, что приводит к соотношениям вида

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где α_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — постоянные, притом такие, что определитель

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{B}$$

отличен от нуля [1]). Из (1) и (2) следует, что каждому значению декартовой координаты $x = \frac{x_1}{x_2}$ соответствует вполне определенное

---

[1]) См. Добавление § 8. В нашем простом случае двух переменных высказанное утверждение легко проверяется непосредственно. В самом деле, решая систему (1) относительно x_1, x_2, получаем

$$x_1 = \frac{\beta_{22}y_2 - \beta_{12}y_2}{B}, \qquad x_2 = \frac{-\beta_{21}y_1 + \beta_{11}y_2}{B}, \qquad (*)$$

откуда

$$\alpha_{11} = \frac{\beta_{22}}{B}, \quad \alpha_{12} = -\frac{\beta_{12}}{B}, \quad \alpha_{21} = -\frac{\beta_{21}}{B}, \quad \alpha_{22} = \frac{\beta_{11}}{B}. \qquad (**)$$

Для определителя A получаем выражение

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{B^2} \begin{vmatrix} \beta_{22} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{B}.$$

Следовательно, $A \neq 0$. Отметим еще, что на основании (**) вторую формулу 3) можно переписать так:

$$x = \frac{\beta_{22}y - \beta_{12}}{-\beta_{21}y + \beta_{11}}. \qquad (***)$$

значение отношения $\frac{y_1}{y_2} = y$, и обратно, а именно,

$$y = \frac{\beta_{11}x + \beta_{12}}{\beta_{21}x + \beta_{22}}, \quad x = \frac{\alpha_{11}y + \alpha_{12}}{\alpha_{21}y + \alpha_{22}}. \tag{3}$$

Величину y можно также назвать координатой точки M, ибо она вполне определяет положение этой точки. Эта величина называется *неоднородной проективной координатой* точки M на данной прямой; величины же y_1, y_2 называются *однородными проективными координатами* этой точки.

Таким образом, однородные проективные и декартовы координаты одной и той же точки на прямой связаны линейной однородной неособенной подстановкой, а неоднородные координаты — дробно-линейной неособенной подстановкой. В частности, дробно-линейная подстановка (3) может быть и целой линейной (это будет при $\beta_{21} = 0$; тогда и $\alpha_{21} = 0$); в этом случае, как легко видеть, проективная координата y будет, так же как и x, декартовой координатой [1]). Таким образом, декартовы координаты представляют собой частный случай проективных.

Проективные координаты имеют весьма простой геометрический смысл, который будет указан ниже (§ 186).

Здесь же мы остановимся на вопросе *преобразования проективных координат*. На одной и той же прямой можно выбрать бесчисленное множество систем проективных координат. Выбор этот определяется выбором первоначальной системы декартовых координат на прямой (т. е. выбором начала и координатного вектора) и выбором коэффициентов β_{ij} подстановки (1). Не нарушая общности, можно считать, что исходная декартова система зафиксирована раз навсегда. Действительно, если мы, при определении проективных координат y_1, y_2, положим в основу какую-либо новую систему декартовых координат, т. е. вместо формул (1) возьмем формулы вида

$$y_1 = \beta'_{11}x'_1 + \beta'_{12}x'_2, \quad y_2 = \beta'_{21}x'_1 + \beta'_{22}x'_2,$$

где β'_{ij} — некоторые постоянные, такие, что составленный из них определитель отличен от нуля, а x'_1, x'_2 обозначают новые декартовы координаты точки M, то, подставляя в предыдущие соотношения выражения новых декартовых координат через старые [§ 173, формулы (3а)]: $x'_1 = mx_1 + bx_2$, $x'_2 = x_2$, очевидно, получим опять формулы вида (1) при некоторых значениях постоянных β_{ij}, причем, как легко видеть, будем иметь $B \neq 0$.

Таким образом, рассматривая вопрос о преобразовании проективных координат, мы можем считать, что положенная в основу декартова система — всегда одна и та же.

---

[1]) Действительно, в этом случае формулы (3) обращаются в формулы преобразования декартовых координат на прямой.

Итак, пусть мы имеем одну систему проективных координат, определяемую неособенной подстановкой (1), и другую систему, определенную другой неособенной подстановкой

$$y_1' = \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2, \quad y_2' = \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2.$$

Подставляя в последние формулы выражения (2), получим, очевидно, формулы вида

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= m_{11}y_1 + m_{12}y_2, \\ y_2' &= m_{21}y_1 + m_{22}y_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем, как легко видеть, определитель

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля [1]). Решая систему (4) относительно y_1, y_2, получим формулы вида

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l_{11}y_1' + l_{12}y_2', \\ y_2 &= l_{21}y_1' + l_{22}y_2', \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

где определитель $\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Таким образом, *однородные проективные координаты одной и той же точки на прямой относительно различных систем связаны друг с другом линейной однородной неособенной подстановкой.*

2°. **Проективные координаты на плоскости и в пространстве.** Обобщение на случай плоскости и пространства никаких затруднений не представляет.

Пусть x_1, x_2, x_3 — однородные декартовы координаты на плоскости. Введем вместо этих величин новые: y_1, y_2, y_3, связанные с ними линейной однородной неособенной подстановкой

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3, \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3, \\ y_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где β_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — постоянные коэффициенты, определитель которых отличен от нуля. Вследствие последнего условия подстановку (5) можно однозначно обратить и выразить x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

[1]) См. Добавление, § 9.

Положение каждой точки M на плоскости определяется отношениями двух из величин x_1, x_2, x_3 к третьей. Из последних формул следует, что положение точки M также вполне определяется отношениями двух из величин y_1, y_2, y_3 к третьей [1]).

Величины y_1, y_2, y_3 называются *однородными проективными координатами* точки M. *Неоднородными* проективными координатами можно назвать отношения любых двух из величин y_1, y_2, y_3 к третьей.

Совершенно аналогично определяются проективные координаты точки в пространстве. Именно, если x_1, x_2, x_3, x_4 — однородные декартовы координаты точки, то величины y_1, y_2, y_3, y_4, связанные с x_1, x_2, x_3, x_4 линейной неособенной подстановкой

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \beta_{14}x_4, \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3 + \beta_{24}x_4, \\ y_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3 + \beta_{34}x_4, \\ y_4 &= \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_2 + \beta_{43}x_3 + \beta_{44}x_4, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где β_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные, определитель которых отличен от нуля, называются *однородными проективными координатами* точки в пространстве. Отношения любых трех из величин y_1, y_2, y_3, y_4 к четвертой можно назвать *неоднородными проективными координатами* точки в пространстве.

Вследствие того, что подстановка (7) — неособенная, она может быть обращена, что дает

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \alpha_{14}y_4, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 + \alpha_{24}y_4, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3 + \alpha_{34}y_4, \\ x_4 &= \alpha_{41}y_1 + \alpha_{42}y_2 + \alpha_{43}y_3 + \alpha_{44}y_4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Геометрическое значение проективных координат на плоскости и в пространстве будет выяснено в § 191. Здесь же мы ограничимся следующими замечаниями относительно преобразования проективных координат.

На плоскости и в пространстве можно выбрать бесчисленное множество систем проективных координат. Выбор этот зависит от выбора исходной системы декартовых координат и от выбора коэффициентов β_{ij} в подстановке (5) или (7). Легко видеть (сравн. случай координат на прямой), что, не нарушая общности, исходную декартову систему можно зафиксировать раз навсегда.

---

[1]) Величины y_1, y_2, y_3 не могут быть равны одновременно нулю; действительно, если в (6) $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, что противоречит условию.

Совершенно так, как в случае координат на прямой, легко доказать, что при замене одной системы проективных координат другой старые и новые однородные проективные координаты связаны линейной однородной неособенной подстановкой.

Таким образом, если y_1, y_2, y_3 и y'_1, y'_2, y'_3 обозначают старые и новые однородные координаты одной и той же точки на плоскости, то

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + m_{13}y_3, \\ y'_2 &= m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + m_{23}y_3, \\ y'_3 &= m_{31}y_1 + m_{32}y_2 + m_{33}y_3, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и обратно,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l_{11}y'_1 + l_{12}y'_2 + l_{13}y'_3, \\ y_2 &= l_{21}y'_1 + l_{22}y'_2 + l_{23}y'_3, \\ y_3 &= l_{31}y'_1 + l_{32}y'_2 + l_{33}y'_3, \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

где m_{ij} и l_{ij} — постоянные, причем определители, составленные из m_{ij} и l_{ij}, отличны от нуля.

Совершенно аналогичные формулы имеем для случая пространства. А именно, если y_1, y_2, y_3, y_4 и y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 — старые и новые однородные проективные координаты точки в пространстве, то

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + m_{13}y_3 + m_{14}y_4, \\ y'_2 &= m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + m_{23}y_3 + m_{24}y_4, \\ y'_3 &= m_{31}y_1 + m_{32}y_2 + m_{33}y_3 + m_{34}y_4, \\ y'_4 &= m_{41}y_1 + m_{42}y_2 + m_{43}y_3 + m_{44}y_4, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и обратно,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l_{11}y'_1 + l_{12}y'_2 + l_{13}y'_3 + l_{14}y'_4, \\ y_2 &= l_{21}y'_1 + l_{22}y'_2 + l_{23}y'_3 + l_{24}y'_4, \\ y_3 &= l_{31}y'_1 + l_{32}y'_2 + l_{33}y'_3 + l_{34}y'_4, \\ y_4 &= l_{41}y'_1 + l_{42}y'_2 + l_{43}y'_3 + l_{44}y'_4, \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

где m_{ij} и l_{ij} — постоянные, такие, что составленные из них определители отличны от нуля.

В § 192 будет разъяснен геометрический смысл преобразования проективных координат на плоскости и в пространстве.

З а м е ч а н и е. Так как на положение точки влияют только отношения однородных координат друг к другу, то формулы, определяющие проективные координаты, мы могли бы написать в несколько более общем виде, чем мы это сделали. Например, вместо формул (5), определяющих однородные координаты точки на пло-

скости, мы могли бы взять формулы

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda(\beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3), \\ y_2 &= \lambda(\beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3), \\ y_3 &= \lambda(\beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3), \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

где λ — произвольный (постоянный или переменный) множитель, отличный от нуля. Но введение такого множителя в большинстве случаев является лишь бесполезным усложнением, так как, написав в правых частях формул (5а) вместо λx_1, λx_2, λx_3 просто x_1, x_2, x_3 (это мы можем сделать, так как x_1, x_2, x_3 и λx_1, λx_2, λx_3 представляют собою координаты одной и той же точки), мы вернемся к формулам (5).

Аналогичное замечание можно сделать относительно формул преобразования однородных проективных координат, например, относительно формул преобразования (9) проективных координат на плоскости.

§ 178. Уравнения алгебраических линий и поверхностей в однородных проективных координатах

Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

где Φ — однородный полином, есть уравнение алгебраической линии на плоскости в однородных декартовых координатах. Подставляя на место x_1, x_2, x_3 их выражения через однородные проективные координаты y_1, y_2, y_3 по формулам (6) § 177:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

получим уравнение такого же вида:

$$\Psi(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

где Ψ — однородный полином, того же порядка, что и Φ. Поэтому при определении порядка линии можно пользоваться не только декартовыми, но и проективными координатами.

Точно так же уравнение алгебраической поверхности в однородных проективных координатах имеет вид

$$\Psi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0, \tag{3}$$

где Ψ — однородный полином, порядок которого есть порядок поверхности.

Все сказанное в § 174 относительно уравнения линии или поверхности без всяких изменений переносится на уравнения в проективных координатах.

В частности, уравнение прямой на плоскости, имеющее в однородных декартовых координатах вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \tag{4}$$

где a_1, a_2, a_3 — постоянные, не равные одновременно нулю, переходит при подстановке (2) в уравнение такого же вида:

$$b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = 0, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \alpha_{31}a_3, \\ b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{32}a_3, \\ b_3 &= \alpha_{13}a_1 + \alpha_{23}a_2 + \alpha_{33}a_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Величины b_1, b_2, b_3 не могут быть равны одновременно нулю, так как a_1, a_2, a_3 не равны одновременно нулю, а определитель коэффициентов α_{ij} отличен от нуля.

Совершенно аналогичные результаты получим для уравнения плоскости в пространстве: если

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \tag{7}$$

есть уравнение плоскости в однородных декартовых координатах, то, выражая x_1, x_2, x_3, x_4 через однородные проективные координаты по формулам (8) § 177, получим уравнение плоскости в однородных проективных координатах: это уравнение имеет вид

$$b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + b_4y_4 = 0, \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \alpha_{31}a_3 + \alpha_{41}a_4, \\ b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{32}a_3 + \alpha_{42}a_4, \\ b_3 &= \alpha_{13}a_1 + \alpha_{23}a_2 + \alpha_{33}a_3 + \alpha_{43}a_4, \\ b_4 &= \alpha_{14}a_1 + \alpha_{24}a_2 + \alpha_{34}a_3 + \alpha_{44}a_4. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Аналогично предыдущему случаю величины b_1, b_2, b_3, b_4 не могут быть равны нулю одновременно.

Величины b_1, b_2, b_3, фигурирующие в уравнении (5), называются *проективными однородными координатами прямой на плоскости*, величины же b_1, b_2, b_3, b_4, фигурирующие в уравнении (8),— *проективными однородными координатами плоскости в пространстве*.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что на плоскости уравнение $y_3 = 0$ уже не изображает, вообще говоря, несобственную прямую, а в пространстве уравнение $y_4 = 0$ не изображает, вообще говоря, несобственную плоскость.

Вообще при применении проективных координат несобственные элементы ничем не выделяются среди собственных.

Укажем, в заключение, формулы преобразования проективных координат прямой на плоскости и координат плоскости в пространстве.

Если в уравнение (5) прямой на плоскости подставить на место y_1, y_2, y_3 их выражения через новые координаты y_1', y_2', y_3', даваемые формулами (9а) предыдущего параграфа, то это уравнение примет вид

$$b_1'y_1' + b_2'y_2' + b_3'y_3' = 0, \tag{5a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_1' &= l_{11}b_1 + l_{21}b_2 + l_{31}b_3, \\ b_2' &= l_{12}b_1 + l_{22}b_2 + l_{32}b_3, \\ b_3' &= l_{13}b_1 + l_{23}b_2 + l_{33}b_3. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эти формулы и выражают новые проективные координаты прямой через старые; мы видим, что новые и старые координаты прямой связаны линейной однородной неособенной подстановкой.

Сравнение формул (10) с формулами (9а) предыдущего параграфа показывает, что координаты точек и прямых контравариантны (§ 68).

Совершенно аналогичные результаты получаются для координат плоскости в пространстве.

Замечание. Пусть Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 — четыре плоскости в пространстве, не пересекающиеся в одной (собственной или несобственной) точке. Тогда всегда можно так подобрать систему проективных координат, чтобы в этой системе уравнения плоскостей Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 имели, соответственно, вид

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Действительно, пусть

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &\equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &\equiv a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{aligned}$$

— уравнения плоскостей Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 в однородных декартовых координатах; определитель, составленный из коэффициентов a_{ij}, отличен от нуля, так как наши плоскости не пересекаются в одной точке (§ 168).

Мы получим, очевидно, искомую систему проективных координат, если определим их, например, формулами [1])

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad y_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

т. е. если в формулах (7) предыдущего параграфа возьмем $\beta_{ij} = a_{ij}$.

Аналогичное замечание можно сделать для случая двух измерений и для случая одного измерения.

---

[1]) Этот вопрос, в несколько иной постановке, будет еще рассмотрен ниже, в § 191.

§ 178а. Параметрическое представление прямой и пучка в проективных координатах

В § 167 мы познакомились с параметрическим представлением прямой на плоскости: пусть M' и M'' — две различные постоянные точки прямой, и пусть x_1', x_2', x_3' и x_1'', x_2'', x_3'' — однородные декартовы координаты этих точек. Тогда однородные декартовы координаты x_1, x_2, x_3 всякой точки M этой прямой даются формулами

$$x_1=\lambda x_1'+\mu x_1'', \quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'', \quad x_3=\lambda x_3'+\mu x_3'', \tag{1}$$

где λ и μ — параметры, не равные одновременно нулю. Внося эти выражения для x_1, x_2, x_3 в формулы (5) § 177, получим, очевидно, совершенно аналогичные формулы

$$y_1=\lambda y_1'+\mu y_1'', \quad y_2=\lambda y_2'+\mu y_2'', \quad y_3=\lambda y_3'+\mu y_3'', \tag{2}$$

где y_1, y_2, y_3; y_1', y_2', y_3'; y_1'', y_2'', y_3'' обозначают уже однородные проективные координаты тех же точек M, M', M''.

Обратим внимание на то, что параметры λ, μ, отвечающие точке M, одни и те же в формулах (1) и (2).

Формулами, взаимными с (1), являются формулы, дающие параметрическое представление пучка (см. конец § 170):

$$a_1=\lambda a_1'+\mu a_1'', \quad a_2=\lambda a_2'+\mu a_2'', \quad a_3=\lambda a_3'+\mu a_3'', \tag{3}$$

где a_1', a_2', a_3' и a_1'', a_2'', a_3'' — однородные декартовы координаты двух постоянных прямых Δ' и Δ'' пучка, a_1, a_2, a_3 — однородные декартовы координаты произвольной прямой Δ пучка, а λ, μ — параметры, не равные одновременно нулю.

Подставляя предыдущие значения a_1, a_2, a_3 в формулы (6) предыдущего параграфа, получим формулы, совершенно аналогичные предыдущим:

$$b_1=\lambda b_1'+\mu b_1'', \quad b_2=\lambda b_2'+\mu b_2'', \quad b_3=\lambda b_3'+\mu b_3'', \tag{4}$$

где b_1, b_2, b_3; b_1', b_2', b_3'; b_1'', b_2'', b_3'' обозначают уже проективные координаты прямых Δ, Δ', Δ''.

Совершенно аналогично, из параметрического представления в декартовых однородных координатах прямой в пространстве (§ 169)

$$x_1=\lambda x_1'+\mu x_1'', \quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'', \quad x_3=\lambda x_3'+\mu x_3'', \quad x_4=\lambda x_4'+\mu x_4'' \tag{5}$$

получим такое же представление в проективных координатах:

$$y_1=\lambda y_1'+\mu y_1'', \quad y_2=\lambda y_2'+\mu y_2'', \quad y_3=\lambda y_3'+\mu y_3'', \quad y_4=\lambda y_4'+\mu y_4''. \tag{6}$$

Так же точно из параметрического представления пучка плоскостей в пространстве в декартовых однородных координатах плоскости (конец § 171):

$$a_1=\lambda a_1'+\mu a_1'', \quad a_2=\lambda a_2'+\mu a_2'', \quad a_3=\lambda a_3'+\mu a_3'', \quad a_4=\lambda a_4'+\mu a_4'' \tag{7}$$

получим аналогичное представление в проективных координатах плоскости:

$$b_1=\lambda b_1'+\mu b_1'', \quad b_2=\lambda b_2'+\mu b_2'', \quad b_3=\lambda b_3'+\mu b_3'', \quad b_4=\lambda b_4'+\mu b_4''; \tag{8}$$

обозначения очевидны.

§ 179. Проективные точечные преобразования

1°. **Проективное точечное преобразование прямой.** Пусть Δ и Δ' — две прямые, как угодно расположенные в пространстве; в частности, они могут быть наложены друг на друга. Выберем на каждой из этих прямых какие-либо системы проективных координат (в частности, это могут быть декартовы координаты). Пусть x_1, x_2 — однородные проективные координаты точки M на Δ, а x_1', x_2' — однородные проективные координаты точки M' на Δ'. Свяжем теперь координаты точек M и M' какой-нибудь неособенной линейной однородной подстановкой:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= l_{11}x_1 + l_{12}x_2, \\ x_2' &= l_{21}x_1 + l_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где l_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — постоянные, такие, что их определитель отличен от нуля.

Эта подстановка вследствие того, что она — неособенная, может быть однозначно обращена, т. е. x_1 и x_2 могут быть однозначно выражены через x_1', x_2', притом также при помощи неособенной линейной однородной подстановки:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_{11}x_1' + m_{12}x_2', \\ x_2 &= m_{21}x_1' + m_{22}x_2'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Неоднородные проективные координаты

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad x' = \frac{x_1'}{x_2'}$$

точек M и M' будут связаны соотношениями, вытекающими из (1) и (2):

$$x' = \frac{l_{11}x + l_{12}}{l_{21}x + l_{22}}, \qquad x = \frac{m_{11}x' + m_{12}}{m_{21}x' + m_{22}}, \tag{3}$$

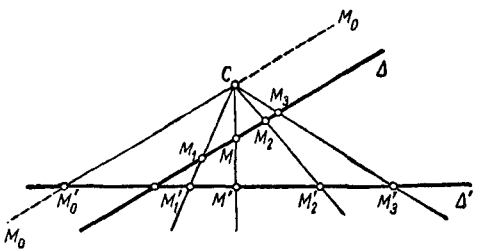
т. е. координата x' связана с координатой x (и обратно) дробно-линейной (или гомографической) неособенной подстановкой (§ 176).

Таким образом, соотношения (1), следствиями которых являются также соотношение (2) и (3), приводят в соответствие каждой точке M прямой Δ одну и только одну точку M' прямой Δ', и обратно; при этом никакого различия между собственными и несобственными точками не делается.

Указанное соответствие между точками прямых Δ и Δ' называется *проективным точечным соответствием* или еще *гомографическим соответствием*.

Говорят еще, что точки прямой Δ' получаются из точек прямой Δ (и обратно) путем *проективного* (или *гомографического*) *преобразования*.

Происхождение названий «проективное соответствие» или «проективное преобразование» следующее. Легко показать (это будет сделано ниже, в § 185), что прямые Δ и Δ', между точками которых установлено указанное выше соответствие, можно привести (путем их переноса) в такое положение, чтобы точки M_1', M_2', M_3', ... прямой Δ', соответствующие точкам M_1, M_2, M_3, ... прямой Δ, представляли собою центральные проекции (из некоторого центра C) точек M_1, M_2, M_3, ... прямой Δ на прямую Δ'. Центральной проекцией точки M на прямую Δ' из центра C называется точка M' пересечения луча CM с прямой Δ' (черт. 113). Центр C может быть удален в бесконечность, и тогда мы будем иметь дело с параллельными проекциями, которые были подробно изучены в гл. I.



Черт. 113

Как было уже сказано, при проективном преобразовании не делается никакого различия между собственными и несобственными точками; несобственная точка прямой Δ переходит, вообще говоря, в собственную точку прямой Δ', и обратно. Например, на черт. 113 несобственная точка M_0 прямой Δ (она проектируется лучом CM_0', параллельным прямой Δ) переходит в собственную точку M_0' прямой Δ'.

Проективные преобразования прямой будут подробнее рассмотрены в дальнейших параграфах этой главы.

Замечание. Не уменьшая общности, можно всегда считать, что в формулах (1), определяющих гомографическое соответствие точек прямых Δ и Δ', величины x_1, x_2 и x_1', x_2' являются однородными декартовыми координатами на прямых Δ и Δ' (а не обязательно проективными общего вида). В самом деле, если в формулах (1) x_1, x_2 и x_1', x_2' обозначают проективные координаты, то, выразив эти координаты через однородные декартовы координаты на прямых Δ и Δ' (это, по самому определению проективных координат, сводится к линейным однородным неособенным подстановкам), мы, как легко видеть, придем опять к формулам вида (1), связывающим уже декартовы координаты.

2°. **Проективные точечные преобразования плоскости и пространства.** Перейдем к определению проективного точечного соответствия между двумя плоскостями. Так называется обратимо-однозначное соответствие между двумя плоскостями Π и Π' (различными или наложенными друг на друга), при котором однородные проективные координаты точки одной плоскости получаются из однородных проективных координат

соответствующей точки другой плоскости путем линейной однородной неособенной подстановки.

Таким образом, если $M(x_1, x_2, x_3)$ и $M'(x_1', x_2', x_3')$ — точки плоскостей Π и Π', соответствующие друг другу, то

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3, \\ x_2' &= l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + l_{23}x_3, \\ x_3' &= l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где l_{ij} — постоянные, причем определитель, составленный из них, отличен от нуля. Величины x_1, x_2, x_3 выражаются через x_1', x_2', x_3' аналогичными формулами, полученными решением системы (4) относительно x_1, x_2, x_3:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_{11}x_1' + m_{12}x_2' + m_{13}x_3', \\ x_2 &= m_{21}x_1' + m_{22}x_2' + m_{23}x_3', \\ x_3 &= m_{31}x_1' + m_{32}x_2' + m_{33}x_3', \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

где m_{ij} — постоянные, определитель которых отличен от нуля.

Легко видеть (сравн. замечание в конце пункта 1°), что мы не потеряем в общности, если будем считать, что в формулах (4) x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' обозначают однородные декартовы координаты, а не обязательно проективные общего вида.

Проективное точечное соответствие называется также *гомографическим соответствием* (*гомографией*) или *коллинеарным соответствием* (*коллинеацией*); последнее название указывает на то, что при таком соответствии коллинеарным точкам одной плоскости соответствуют также коллинеарные точки другой, как это будет доказано ниже в этом же параграфе.

Каждой фигуре плоскости Π соответствует определенная фигура плоскости Π' и обратно. Эти фигуры называются *гомографически* (или *коллинеарно*) *соответствующими*. Говорят также, что одна фигура получается из другой гомографическим (коллинеарным) преобразованием.

Отметим основные свойства гомографических преобразований.

a) Два гомографических преобразования, произведенных одно за другим, дают опять гомографическое преобразование. Преобразование, обратное гомографическому,— также гомографическое [1]). Эти свойства, непосредственно вытекающие из свойств линейных подстановок (см. Добавление, § 9), показывают, что *совокупность гомографических преобразований образует группу* (см. § 78).

b) Каждой прямой на одной плоскости соответствует прямая на другой. Действительно, пусть

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{5}$$

[1]) Эти свойства имеют место также для случая гомографического преобразования прямой, рассмотренного в пункте 1°.

есть прямая на плоскости П. Уравнение соответствующей прямой на П′ получим, подставляя в (5) на место x_1, x_2, x_3 их выражения (4а) через x'_1, x'_2, x'_3, что дает уравнение такого же вида:

$$a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + a'_3x'_3 = 0, \tag{5a}$$

где a'_1, a'_2, a'_3 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= m_{11}a_1 + m_{21}a_2 + m_{31}a_3, \\ a'_2 &= m_{12}a_1 + m_{22}a_2 + m_{32}a_3, \\ a'_3 &= m_{13}a_1 + m_{23}a_2 + m_{33}a_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Так как a_1, a_2, a_3 не равны нулю одновременно (как коэффициенты уравнения определенной прямой), то и a'_1, a'_2, a'_3 не равны одновременно нулю (ибо определитель подстановки отличен от нуля). Следовательно, прямой (5) соответствует прямая (5а).

с) Гомографическое соответствие плоскостей П и П′ приводит в гомографическое соответствие точки прямых Δ и Δ′, соответствующих друг другу. Иными словами, пусть при рассматриваемом гомографическом соответствии плоскостей П и П′ какая-либо прямая Δ плоскости П переходит в прямую Δ′ плоскости П′. В силу формул (4) и (4а) каждой точке прямой Δ′ будет соответствовать одна и только одна точка прямой Δ′, и обратно; это соответствие между точками прямых Δ и Δ′ будет гомографическим в смысле определения гомографического соответствия между прямыми, данного в пункте 1° настоящего параграфа. Доказательство этого утверждения будет дано ниже (§ 193, пункт 2°). Указанным только что свойством (а также свойством, которое будет доказано ниже, в § 193, пункт 3°) и объясняется название «проективное соответствие».

Перенесение понятия гомографии (т. е. проективного точечного соответствия) на *случай пространства* напрашивается само собою. Две фигуры пространства называются гомографически (или коллинеарно) соответствующими, если однородные координаты соответствующих точек связаны линейной однородной неособенной подстановкой.

И здесь, очевидно, гомографические преобразования образуют группу.

Легко показать (мы предоставляем это читателю), что при гомографическом преобразовании пространства плоскости переходят в плоскости, прямые — в прямые.

Нетрудно показать также, что свойство с), указанное выше, распространяется и на случай гомографического преобразования пространства и что имеет место аналогичное свойство для плоскостей, соответствующих друг другу при гомографическом преобразовании пространства.

Аффинные преобразования составляют подгруппу гомографических. В случае двух измерений эта аффинная подгруппа характеризуется тем, что несобственная прямая плоскости П соответствует несобственной прямой плоскости П' (если П и П' совмещены, то несобственная прямая переходит сама в себя). Действительно, будем применять теперь однородные *декартовы* координаты. Несобственная прямая плоскости П характеризуется уравнением

$$x_3 = 0.$$

Соответствующая ей прямая имеет, в силу (4а), уравнение

$$m_{31}x_1' + m_{32}x_2' + m_{33}x_3' = 0.$$

Для того чтобы и эта прямая была несобственной, т. е. имела уравнением $x_3' = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $m_{31} = m_{32} = 0$, $m_{33} \neq 0$; но тогда подстановка (4а) сводится к следующей (мы можем положить $m_{33} = 1$, так как мы имеем право заменять однородные координаты пропорциональными им величинами):

$$x_1 = m_{11}x_1' + m_{12}x_2' + m_{13}x_3',$$
$$x_2 = m_{21}x_1' + m_{22}x_2' + m_{23}x_3',$$
$$x_3 = x_3',$$

которая, очевидно, и характеризует аффинное преобразование.

Аналогично, аффинные преобразования пространства выделяются среди гомографических тем, что при аффинных преобразованиях несобственная плоскость переходит сама в себя.

Свойства фигур, остающиеся неизменными при гомографических преобразованиях, называются *проективными*. Предметом *проективной геометрии* является изучение проективных свойств фигур.

В проективной геометрии несобственные элементы ничем не выделяются среди прочих. Наоборот, в аффинной геометрии несобственные элементы играют особую роль.

С этим связано то обстоятельство, что при аффинном преобразовании параллельные плоскости и прямые остаются параллельными, а при проективном преобразовании параллельность, вообще говоря, нарушается.

Свойство параллельности не является, таким образом, проективным свойством.

Отношение двух отрезков одной и той же прямой, остающееся неизменным при любом аффинном преобразовании, при проективном преобразовании, вообще говоря, изменяется, т. е. не является инвариантным.

Поэтому при более подробном изучении проективных свойств фигур приходится вводить в рассмотрение другую величину, уже инвариантную по отношению к проективным преобразованиям. Это — так называемое двойное или ангармоническое отношение

четырех коллинеарных точек, которое будет рассмотрено в следующем параграфе и которое играет основную роль в проективной геометрии.

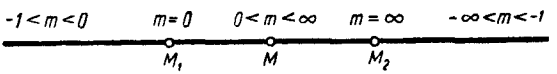
§ 180. Двойное отношение четырех точек

Как было отмечено в конце предыдущего параграфа, основную роль в проективной геометрии играет понятие двойного отношения четырех коллинеарных точек, к рассмотрению которого мы теперь и переходим.

Начнем с определения *простого отношения трех точек*, расположенных на прямой, с которым мы уже, в сущности, встречались раньше (§ 41). Пусть M_1, M_2, M — точки прямой Δ. Приписав этой прямой какое-либо положительное направление (безразлично какое), составим отношение алгебраических значений отрезков M_1M и MM_2:

$$m = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Это отношение имеет определенный знак, не зависящий от того, какое направление на Δ выбрано в качестве положительного (ибо при изменении



Черт. 114

направления на обратное и числитель и знаменатель изменяют знак на обратный). А именно, $m > 0$, когда M находится между M_1, M_2, и $m < 0$, когда M находится вне отрезка M_1M_2. С таким отношением мы уже имели дело в § 41 («отношение, в котором точка M делит отрезок M_1M_2»). Теперь мы назовем его *простым отношением трех точек* M_1, M_2, M (рассматриваемых в указанном порядке) и будем обозначать через (M_1, M_2, M), так что

$$m = (M_1, M_2, M) = \frac{M_1M}{MM_2}. \tag{1}$$

Непосредственно очевидно, что если точки M_1 и M_2 остаются неподвижными, а M пробегает прямую Δ, то m изменяется следующим образом (черт. 114): когда M пробегает отрезок M_1M_2, m изменяется от 0 до $+\infty$, когда M переходит через M_2, m из $+\infty$ обращается в $-\infty$ и затем непрерывно возрастает, стремясь к -1, когда M удаляется в бесконечность. Наконец, когда точка M движется от M_1 в противоположную сторону; m убывает от 0 до -1; таким образом, несобственной точке прямой Δ соответствует значение $m = -1$. Вообще каждому значению m соответствует одно положение точки M, и обратно. В частности, при $m = \pm\infty$ имеем также только одну точку M_2; поэтому нет надобности различать значений $m = +\infty$ и $m = -\infty$.

Если взять на Δ определенную систему декартовых координат, то положение любой точки на Δ определяется абсциссой x; если x_1, x_2, x — абсциссы точек M_1, M_2, M, то, очевидно,

$$m = (M_1, M_2, M) = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \tag{2}$$

Последнюю величину называют также *простым отношением трех чисел* и обозначают через (x_1, x_2, x), так что

$$(x_1, x_2, x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \tag{2a}$$

Эта формула еще раз показывает, что каждому положению точки M, т. е. каждому значению x, соответствует одно значение m, и обратно.

Перейдем теперь к определению *двойного* (или *ангармонического*) отношения четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4, расположенных на одной прямой. Так называется величина, которую получим следующим образом: составим сперва простое отношение двух первых точек и третьей (M_1, M_2, M_3); затем составим простое отношение опять двух первых точек и четвертой (M_1, M_2, M_4) и, наконец, разделим первое на второе. Двойное отношение λ четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 мы будем обозначать символом (M_1, M_2, M_3, M_4). Таким образом, согласно определению

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{(M_1, M_2, M_3)}{(M_1, M_2, M_4)}, \tag{3}$$

или

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{M_1M_3}{M_3M_2} : \frac{M_1M_4}{M_4M_2}, \tag{4}$$

или еще

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{M_1M_3}{M_3M_2} \cdot \frac{M_4M_2}{M_1M_4}. \tag{4a}$$

Легко выяснить, какой знак имеет величина λ. Числитель и знаменатель в (3) одновременно положительны или отрицательны, когда точки M_3 и M_4 находятся одновременно внутри или вне отрезка M_1M_2. Если же одна из двух точек M_3, M_4 находится внутри отрезка M_1M_2, а другая — вне, то числитель и знаменатель в (3) — различных знаков. Последний случай можно характеризовать, говоря, что *пары точек* (M_1, M_2) и (M_3, M_4) *разделяют друг друга* (т. е. между двумя точками любой из двух пар имеется точка другой). Итак, мы можем сказать: $\lambda > 0$, если пары (M_1, M_2) и (M_3, M_4) не разделяют друг друга, и $\lambda < 0$, если эти пары разделяют друг друга.

До сих пор мы подразумевали, что точки M_1, M_2, M_3, M_4 различны; но и дальнейшем мы будем допускать и случаи, когда две из этих точек совпадают; при этом для λ может получиться и значение ∞, как, например, в случае, когда M_4 совпадает с M_1. Это надо понимать в том смысле, что если точка M_4 стремится совпасть с M_1, то λ стремится к бесконечности (мы и здесь не различаем $+\infty$ и $-\infty$).

Посмотрим теперь, как изменяется λ, когда точки M_1, M_2, M_3 остаются неподвижными, а M_4 пробегает прямую Δ; мы считаем точки M_1, M_2, M_3 различными. Обозначая временно M_4 через M, будем иметь на основании (4a):

$$\lambda = k \cdot \frac{MM_2}{M_1M} \quad \left(\text{где } k = \frac{M_1M_3}{M_3M_2}\right), \tag{4b}$$

откуда следует[1]), что λ пробегает все действительные значения, включая $\lambda = \infty$, когда M пробегает Δ, и что каждому значению λ соответствует одно и только одно положение M.

---

[1]) Формула (4b) дает

$$\lambda = \frac{k}{m}, \quad \text{где} \quad m = \frac{M_1M}{MM_2};$$

отсюда и следует утверждение текста.

В частности, когда M совпадает с точками M_1, M_2, M_3, величина λ принимает соответственно следующие значения: ∞, 0, 1; это надо хорошо запомнить.

Вводя абсциссы точек на прямой Δ и обозначая через x_1, x_2, x_3, x_4 абсциссы точек M_1, M_2, M_3, M_4, будем, очевидно, иметь

$$\lambda=(M_1, M_2, M_3, M_4)=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}; \tag{5}$$

последнюю величину называют также *двойным отношением четырех чисел* x_1, x_2, x_3, x_4 и обозначают символом (x_1, x_2, x_3, x_4), так что, по определению,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_1-x_4}. \tag{6}$$

Этот символ применяют и к случаю, когда одно из чисел x_1, x_2, x_3, x_4 — бесконечность. Например, если $x_1=\infty$, будем иметь [1])

$$(\infty, x_2, x_3, x_4)=\frac{x_2-x_4}{x_2-x_3}. \tag{7}$$

Отметим равенства, которые нам будут часто встречаться (их получим, полагая $x_1=\infty$, $x_2=0$, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$, или $x_1=\infty$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=k$):

$$(\infty, 0, \alpha, \beta)=\frac{\beta}{\alpha}, \quad (\infty, 0, 1, k)=k. \tag{8}$$

Двойное отношение четырех данных точек на прямой зависит, конечно, от порядка, в котором они рассматриваются. Переставляя в символе (M_1, M_2, M_3, M_4) всевозможным образом элементы M_1, M_2, M_3, M_4, мы будем получать различные значения. Так как существует $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ перестановки четырех элементов, то на первый взгляд может показаться, что получатся 24 различных значения.

На самом же деле может получиться всего 6 различных значений; это вытекает из следующего простого предложения: *двойное отношение не изменяется, если поменять местами два каких-либо элемента и одновременно два других*. Например:

$$(M_1, M_2, M_3, M_4)=(M_3, M_4, M_1, M_2).$$

Это предложение читатель легко докажет непосредственной проверкой при помощи формулы (4а).

Поэтому, чтобы получить все возможные значения, которые принимает символ (M_1, M_2, M_3, M_4) при перестановке элементов, достаточно переставлять, например, элементы M_2, M_3, M_4, оставляя на месте M_1; действительно, если мы имеем какую-либо перестановку, то всегда можно, не изменяя значения символа, поставить M_1 на первое место, поменяв его местом с элементом, стоящим на этом месте, и поменяв одновременно местами два других элемента. Поэтому наш символ может иметь только $1\cdot2\cdot3=6$ различ-

---

[1]) На основании (6) имеем

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{x_3-x_1}{x_4-x_1}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_2-x_3}.$$

Переходя к пределу при $x_1\to\infty$, получим формулу текста, ибо, очевидно,

$$\lim_{x_1\to\infty}\frac{x_3-x_1}{x_4-x_1}=1.$$

ных значений. Легко показать (см. ниже, упражнения), что если

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \lambda,$$

то, переставляя всевозможным образом элементы, мы будем получать следующие 6 значений:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

В частности, из (4) непосредственно вытекает, что *если поменять местами два первых или два последних элемента, то значение двойного отношения изменится на обратное*, т. е.

$$(M_2, M_1, M_3, M_4) = (M_1, M_2, M_4, M_3) = \frac{1}{\lambda}.$$

Упражнения и дополнения

1. Доказать тождество

$$(x_1-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_3-x_4)=(x_2-x_3)(x_1-x_4).$$

Доказательство получается непосредственной проверкой. Еще проще получить указанный результат так: имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ибо в определителе первая строка пропорциональна третьей. Вычитая вторую строку из первой, получим

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1-x_3 & x_1-x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, получим требуемое тождество.

2. Пользуясь предыдущим тождеством, доказать, что если в символе (M_1, M_2, M_3, M_4) переставить два средних элемента, то получим значение, дополняющее предыдущее до 1, т. е.

$$(M_1, M_2, M_3, M_4)+(M_1, M_3, M_2, M_4)=1.$$

Доказательство непосредственно вытекает из формул

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}, \quad (x_1, x_3, x_2, x_4)=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}.$$

3. Применяя предыдущие результаты, доказать, что если

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \lambda,$$

то

$$(M_1, M_2, M_4, M_3)=\frac{1}{\lambda}, \quad (M_1, M_3, M_2, M_4)=1-\lambda, \quad (M_1, M_3, M_4, M_2)=\frac{1}{1-\lambda},$$

$$(M_1, M_4, M_2, M_3)=1-\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda}, \quad (M_1, M_4, M_3, M_2)=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Так как мы произвели все возможные перестановки трех последних элементов, то этим исчерпываются все возможные значения для двойного отношения четырех данных точек, в зависимости от порядка рассмотрения этих точек.

4. Если обозначить через λ^* одну из величин (см. предыдущее упражнение)

$$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1}, \tag{A}$$

то величины

$$\lambda^*,\ \frac{1}{\lambda^*},\ 1-\lambda^*,\ \frac{1}{1-\lambda^*},\ \frac{\lambda^*-1}{\lambda^*},\ \frac{\lambda^*}{\lambda^*-1} \tag{A*}$$

суть те же величины (A), только в ином порядке. Действительно, $\lambda^* = (M_i, M_j, M_k, M_l)$, где i, j, k, l обозначают значки 1, 2, 3, 4 в некотором порядке. Переставляя эти значки, мы получим величины (A*); но, кроме того, мы знаем, что при этом получаются величины (A).

5. Каково должно быть расположение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 для того, чтобы среди величин (A) предыдущего упражнения не все были различны? Предполагается, что рассматриваемые точки различны.

Решение. На основании сказанного в предыдущем упражнении, достаточно исследовать случай, когда λ равно одному из остальных чисел (A).

a) Пусть $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, тогда $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda = +1$, то две из рассматриваемых точек должны совпадать[1]); но мы исключили случай совпадения. Следовательно, $\lambda = -1$; числа ряда (A) сводятся к следующим:

$$-1,\ -1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2};$$

эти числа равны попарно. В случае $\lambda = -1$ говорят, что пары точек (M_1, M_2) и (M_3, M_4) разделяют друг друга *гармонически* (см. следующий параграф).

b) При $\lambda = 1-\lambda$ имеем $\lambda = \frac{1}{2}$ и числа (A) сводятся к следующим:

$$\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ -1,\ -1;$$

мы имеем такие же числа, что и в случае a), только в другом порядке. Следовательно, переставляя порядок элементов M_1, M_2, M_3, M_4, приходим к предыдущему случаю.

c) $\lambda = \frac{1}{1-\lambda}$, т. е. $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Этот случай невозможен, если ограничиться рассмотрением действительных точек.

d) $\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, т. е. $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$; тот же случай, что и c).

e) $\lambda = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, т. е. $\lambda = 0$ или $\lambda = 2$. При $\lambda = 0$ две из рассматриваемых точек, очевидно, совпадают. При $\lambda = 2$ числа ряда (A) сводятся к следующим:

$$2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ 2;$$

мы, таким образом, приходим к случаю a).

---

[1]) Если, например, M_1 и M_2 различны, то, как показывает формула (3), при $\lambda = 1$ точки M_3 и M_4 совпадают.

Итак, если ограничиться рассмотрением действительных несовпадающих точек, числа ряда (A) могут быть не все различными только тогда, когда рассматриваемые четыре точки представляют собою две пары, разделяющие друг друга гармонически.

§ 181. Гармоническое разделение

Если

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = -1, \tag{1}$$

то говорят, что *точки* M_1, M_2 *разделяются точками* M_3, M_4 *гармонически* или, что *точки* M_3, M_4 *гармонически сопряжены относительно точек* M_1, M_2.

На основании сказанного в предыдущем параграфе, соотношение (1) не нарушается, если поменять местами пары M_1, M_2 и M_3, M_4; оно также не нарушится, если переставить элементы в одной из пар[1]). Поэтому не обращая внимания на порядок элементов в каждой паре, мы можем просто говорить, что *пары точек* (M_1, M_2) и (M_3, M_4) *разделяют друг друга гармонически*. То, что они действительно *разделяют* друг друга, следует из того, что двойное отношение точек M_1, M_2, M_3, M_4 отрицательно.

Из самого определения гармонического разделения следует, что если пара M_3, M_4 гармонически разделяет пару M_1, M_2, то точки M_3, M_4 разделяют отрезок M_1M_2 в одном и том же (по абсолютной величине) отношении, причем одна точка разделяет отрезок внутренним образом, а другая—внешним. Будем считать точки M_1 и M_2 неподвижными и различными. Легко видеть, что если точка M_4 уходит в бесконечность, гармонически сопряженная с ней точка M_3 попадает на середину отрезка M_1M_2. Действительно, как легко видеть на основании формулы (4a) предыдущего параграфа, если M_4 уходит в бесконечность, то

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = -\frac{M_1M_3}{M_3M_2},$$

откуда на основании (1)

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2} = 1,$$

т. е. M_3 есть середина M_1M_2.

Далее, если M_3 приближается к M_1 (или M_2), то и M_4 приближается к M_1 (или M_2); это следует из той же формулы (4a) предыдущего параграфа. Действительно, если в числителе M_1M_3 стремится к нулю, то и в знаменателе M_1M_4 должно стремиться к нулю, иначе λ не могло бы оставаться конечным (в нашем случае $\lambda = -1$); так же докажем, что если M_2M_3 стремится к нулю, то и M_2M_4 стремится к нулю.

Итак, точка M_1 сопряжена сама с собой (относительно пары M_1, M_2); точно так же точка M_2 сопряжена сама с собой; других «самосопряженных» точек (относительно пары M_1, M_2), очевидно, нет.

§ 182. Инвариантность двойного отношения при гомографической подстановке.

Главным свойством двойного отношения, благодаря которому оно играет основную роль в проективной геометрии, является его инвариантность (неизменность) по отношению к гомографическим или дробно-линейным подстановкам. Докажем это свойство.

---

[1]) Мы знаем, что в этом случае (см. предыдущий параграф) λ заменяется на $\frac{1}{\lambda}$; но при $\lambda = -1$ имеем $\lambda = \frac{1}{\lambda}$.

Пусть переменные x и y связаны гомографической неособенной подстановкой (§ 176)

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}. \tag{1}$$

Свойство, которое мы хотим доказать, заключается в следующем: если x_1, x_2, x_3, x_4 — какие-либо четыре значения переменной x, а y_1, y_2, y_3, y_4 — соответствующие значения переменной y, то

$$(y_1, y_2, y_3, y_4)=(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{2}$$

Для доказательства рассмотрим сперва простое отношение

$$(y_1, y_2, y)=\frac{y-y_1}{y_2-y}.$$

Элементарное вычисление дает

$$y-y_1=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}-\frac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)(\gamma x_1+\delta)}(x-x_1),$$

$$y_2-y=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)(\gamma x_2+\delta)}(x_2-x),$$

откуда следует

$$(y_1, y_2, y)=k(x_1, x_2, x), \tag{3}$$

где величина $k=\frac{\gamma x_2+\delta}{\gamma x_1+\delta}$ зависит только от x_1 и x_2. Мы видим, между прочим, что простое отношение трех точек *не инвариантно* относительно гомографической подстановки общего вида[1]). Подставляя в (3) последовательно $x=x_3$, $x=x_4$, получим

$$(y_1, y_2, y_3)=k(x_1, x_2, x_3), \quad (y_1, y_2, y_4)=k(x_1, x_2, x_4),$$

откуда

$$(y_1, y_2, y_3, y_4)=\frac{(y_1, y_2, y_3)}{(y_1, y_2, y_4)}=\frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1, x_2, x_4)}=(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

а это и требовалось доказать. Читатель легко проверит, что результат останется в силе и тогда, когда одно из чисел x_1, x_2, x_3, x_4 или y_1, y_2, y_3, y_4 обращается в бесконечность.

Легко видеть, что имеет место и обратное предложение, а именно: если x и y — две переменные, связанные друг с другом так, что двойное отношение (x_1, x_2, x_3, x) равно двойному отношению (y_1, y_2, y_3, y), где x_1, x_2, x_3 — три какие-либо различные частные значения x, а y_1, y_2, y_3 — соответствующие значения y, то x и y связаны дробно-линейной подстановкой. Действительно, имеем по условию

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{x_2-x}{x_1-x}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}\cdot\frac{y_2-y}{y_1-y},$$

т. е.

$$\frac{x_2-x}{x_1-x}=k\,\frac{y_2-y}{y_1-y},$$

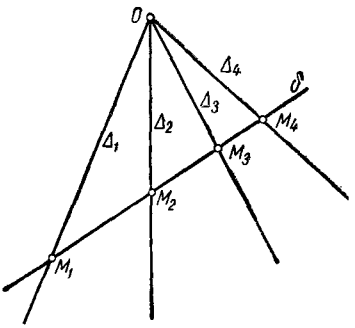
---

[1]) Но оно инвариантно относительно (целой) линейной подстановки, т. е. подстановки вида $y=lx+a$, выражающей аффинное преобразование точек прямой. Это следует из известных нам свойств аффинных преобразований, а также из формулы (3), ибо при $\gamma=0$ (в этом случае дробно-линейная подстановка обращается в линейную) имеем $k=1$.

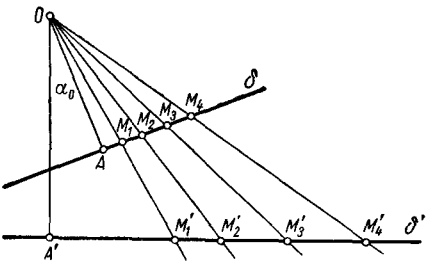
где k — некоторая постоянная. Решая последнее уравнение относительно y (или x), получим дробно-линейную функцию от x (или y), которая, в частности, может быть и целой линейной.

§ 183. Двойное отношение четырех прямых и четырех плоскостей пучка

Мы определили в § 180 двойное отношение для точек прямолинейного ряда. Распространим теперь это понятие на элементы двух других образов первой ступени (т. е. на элементы пучка прямых и пучка плоскостей; см. § 172).



Черт. 115



Черт. 116

Пусть дан *пучок прямых*, т. е. совокупность прямых, расположенных в одной плоскости и проходящих через одну точку. Пересечем пучок прямою δ, не проходящей через центр (черт. 115). Двойным отношением (Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4) четырех прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, принадлежащих пучку, называется двойное отношение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 пересечения этих прямых с δ. Таким образом, по определению,

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4). \qquad (1)$$

Это определение имеет смысл, ибо, как мы сейчас покажем, двойное отношение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 не зависит от выбора прямой δ.

Проще всего убедиться в этом так. Будем пока считать, что центр пучка O — собственная точка (черт. 116). Опустим из O перпендикуляр на δ и примем основание A этого перпендикуляра за начало отсчета абсцисс на прямой δ, которую будем рассматривать как ось, приписав ей определенное положительное направление (безразлично какое); в качестве координатного вектора возьмем, для простоты, орт.

Если x есть абсцисса точки пересечения прямой Δ пучка с δ (эта абсцисса, очевидно, вполне определяет прямую Δ, и обратно), то

$$x = h \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где $h = |OA|$, а α — угол, который прямая Δ составляет с $\overrightarrow{OA}$, причем этот угол отсчитывается в определенном положительном направлении (а именно в том, которое согласуется с положительным направлением, выбранным на δ).

Вводя обозначение

$$\operatorname{tg} \alpha = m,$$

будем иметь $x = h \cdot m$, откуда ясно, что величина m вполне характеризует положение прямой Δ и обратно. Величину m можно назвать *тангенс-координатой* прямой пучка.

Имеем, при очевидных обозначениях:

$$(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4)=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4),$$

откуда

$$(\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4)=(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4). \qquad (2)$$

Если теперь пересечь пучок другой прямой δ' и через m' обозначить соответствующую тангенс-координату прямой Δ пучка, то для новых точек пересечения будем иметь аналогично

$$(M_1',\ M_2',\ M_3',\ M_4')=(m_1',\ m_2',\ m_3',\ m_4'),$$

причем $m'=\operatorname{tg}\alpha'$, где α' — угол, который прямая Δ составляет с $\overrightarrow{OA'}$; A' — основание перпендикуляра, опущенного из O на δ' (черт. 116). Легко видеть, что $\alpha'=\alpha_0+\alpha$, где α_0 — угол, который составляет $\overrightarrow{OA}$ с $\overrightarrow{OA'}$ (мы выбираем для отсчета всех углов одно и то же положительное направление и отбрасываем слагаемое, кратное π, не имеющее значения); следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha'=\operatorname{tg}(\alpha_0+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_0+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha_0\operatorname{tg}\alpha},$$

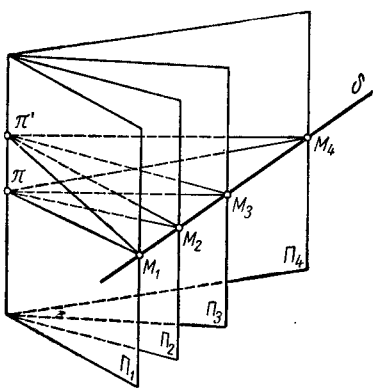
откуда

$$m'=\frac{m_0+m}{1-m_0m}, \qquad (3)$$

причем $m_0=\operatorname{tg}\alpha_0$.

Таким образом, m' есть дробно-линейная функция m и, на основании сказанного в предыдущем параграфе, $(m_1',\ m_2',\ m_3',\ m_4')=(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$.

Поэтому $(M_1',\ M_2',\ M_3',\ M_4')=(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4)$, а это и требовалось доказать.



Черт. 117

Последнее наше заключение остается в силе и тогда, когда центр пучка — несобственная точка, т. е. прямые пучка параллельны между собою. В этом случае равенство $(M_1',\ M_2',\ M_3',\ M_4')=(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4)$ устанавливается непосредственно, ибо отрезки прямых δ и δ', отсекаемые параллельными прямыми, пропорциональны.

Пусть теперь дан *пучок плоскостей*. Пересечем его какой-нибудь плоскостью π, не принадлежащей пучку. В пересечении получим пучок прямых (центр которого — точка пересечения плоскости π с осью пучка). Двойным отношением $(\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4)$ четырех плоскостей Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 пучка называется двойное отношение прямых, получающихся при пересечении этих плоскостей с плоскостью π.

Это отношение не зависит от выбора плоскости π. Действительно, пусть π' — другая плоскость, пересекающая пучок, и пусть δ — прямая пересечения плоскостей π и π' (черт. 117). Тогда двойное отношение четырех прямых, получающихся при пересечении пучка плоскостями π или π', равно двойному отношению четырех точек пересечения прямой δ с плоскостями Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; значит, оно одинаково для обеих плоскостей π и π'. Мы подразумевали, что прямая δ не пересекает оси пучка. В противном случае, для доказательства нашего утверждения достаточно взять третью плоскость π'', которая пересекается как с π, так и с π' по прямым, не пересекающим оси пучка. Наше заключение справедливо и в том случае, когда ось пучка — несобственная прямая, т. е когда плоскости пучка параллельны между собою.

Понятие *гармонического разделения*, введенное выше для точек прямолинейного ряда, переносится без всяких изменений на элементы двух других образов первой ступени.

Замечание. Определяя в § 180 двойное отношение четырех точек на данной прямой, мы считали, что эта прямая — собственная. Теперь мы можем обобщить понятие двойного отношения и на случай точек, расположенных на несобственной прямой. А именно, под двойным отношением четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4, расположенных на данной несобственной прямой, мы будем подразумевать двойное отношение четырех прямых OM_1, OM_2, OM_3, OM_4, где O — произвольно выбранная собственная точка. Эти последние прямые принадлежат пучку, находящемуся в плоскости, которая проходит через O и через данную несобственную прямую.

Аналогично определяется двойное отношение четырех прямых, принадлежащих пучку, расположенному на несобственной плоскости.

Упражнения и дополнения

1. Доказать следующую формулу для двойного отношения четырех прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, принадлежащих пучку с собственным центром:

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \frac{\sin(\Delta_1, \Delta_3)}{\sin(\Delta_3, \Delta_2)} : \frac{\sin(\Delta_1, \Delta_4)}{\sin(\Delta_4, \Delta_2)}, \tag{4}$$

где через (Δ_i, Δ_k) обозначен угол, отсчитываемый от Δ_i до Δ_k. При этом предполагается, что на плоскости пучка выбрано определенное направление отсчета углов (безразлично какое) и что прямые Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 рассматриваются (при отсчете углов) как оси (так что этим прямым приписываются определенные положительные направления, безразлично какие).

Доказательство. Прежде всего ясно, что значение правой части (4) не изменится, если изменить направление отсчета углов на обратное (ибо тогда изменят знаки все четыре синуса) или если изменить на обратное положительное направление любой из прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 (ибо тогда изменят знаки два синуса).

На основании (2) имеем, обозначая через α_1, α_2, α_3, α_4 значения α, соответствующие прямым Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4:

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2, \operatorname{tg}\alpha_3, \operatorname{tg}\alpha_4) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3} : \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_4}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_3} - \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\cos\alpha_3\cos\alpha_1}$; написав аналогичные формулы для других разностей тангенсов и подставив в предыдущую формулу, получим (так как все косинусы сократятся)

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} : \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

откуда непосредственно следует требуемая формула (4).

2. Доказать, что для двойного отношения четырех плоскостей пучка с собственной осью получается формула, совершенно аналогичная формуле (4).

Для доказательства достаточно пересечь пучок плоскостью, перпендикулярной к оси.

§ 184. Проектирования и сечения

Введем теперь некоторые элементарные понятия, которые окажутся для нас полезными в дальнейшем. Мы имеем в виду так называемые основные проективные операции: *проектирования и сечения*.

1°. Проектирование из данного центра данной фигуры, состоящей из точек и прямых, заключается в том, что из данной точки («центра») проводятся прямые и плоскости, проходящие через точки и прямые фигуры.

Например, проектируя из данного центра данный прямолинейный ряд точек, получаем пучок прямых. Проектируя из данного центра плоскую систему точек (или прямых), получим связку прямых (или плоскостей).

2°. Проектирование из данной прямой данной фигуры, состоящей из точек, заключается в том, что через данную прямую проводятся плоскости, проходящие через точки данной фигуры.

Например, проектируя из данной прямой данный прямолинейный ряд точек, получим пучок плоскостей.

Операциями, взаимными по отношению к двум предыдущим, являются следующие:

3°. Сечение плоскостью фигуры, состоящей из прямых и плоскостей, заключается в пересечении элементов данной фигуры данной плоскостью (в пересечении получим точки и прямые).

4°. Сечение прямою данной фигуры, состоящей из плоскостей, заключается в пересечении данной фигуры прямою (в пересечении получаются точки).

Два данных основных образа (§ 172) называются *перспективными* или находящимися в *перспективном соответствии*, если один из них получается из другого проектированием или сечением или если два данных образа получаются в результате проектирования или сечения одного и того же образа.

Например, прямолинейный ряд точек и проектирующий его пучок прямых (черт. 115) — перспективны. Также перспективны прямолинейный ряд точек и проектирующий его пучок плоскостей. Далее, два прямолинейных ряда, получаемых сечением одного и того же пучка прямых двумя прямыми δ и δ', перспективны (черт. 116), и т. д.

Если два прямолинейных ряда представляют собою сечения одного и того же пучка прямых двумя прямыми δ и δ' (черт. 116), то говорят, что второй ряд получен из первого (или первый из второго) путем проектирования ряда δ на ряд δ' (или δ' на δ) из центра O, где O — центр пучка.

Аналогично говорят о проектировании одного прямолинейного ряда на другой из прямой Δ, если эти ряды суть сечения одного и того же пучка плоскостей с осью Δ.

Также говорят о проектировании из центра O одной плоской системы точек на другую, если обе плоские системы суть сечения и одной и той же связки прямых с центром в O двумя плоскостями Π и Π'.

§ 185. Проективное соответствие между образами первой ступени

В § 179 (пункт 1°) мы ввели понятие проективного соответствия между точками двух прямых. Теперь мы распространим это понятие на образы первой ступени[1]) вообще. На основании сказанного в § 183 ясно, что если два основных образа первой ступени находятся в обратимо-однозначном перспективном соответствии (см. предыдущий параграф), то двойное отношение четырех элементов одного образа равно двойному отношению соответствующих элементов другого.

[1]) См. § 172.

Перспективное соответствие является частным случаем *проективного* соответствия, которое мы определим теперь для образов первой ступени следующим образом:

Проективным соответствием между двумя образами первой ступени называется такое обратимо-однозначное соответствие, при котором двойное отношение любых четырех элементов одного образа равно двойному отношению соответствующих элементов другого [1]).

О двух образах, находящихся в проективном соответствии, говорят еще, что один из них получается из другого путем *проективного преобразования*.

Проективное соответствие между двумя образами первой ступени вполне определяется заданием трех элементов A', B', C' одного образа, которые соответствуют трем заданным различным элементам A, B, C другого. Действительно, пусть M — какой-либо элемент последнего образа, а M' — соответствующий элемент первого. Имеем по определению проективного соответствия:

$$(A', B', C', M') = (A, B, C, M),$$

что вполне определяет элемент M', если задан элемент M, и обратно. В зависимости от того, какие образы первой ступени мы рассматриваем, буквы могут здесь обозначать или точки прямолинейного ряда, или прямые пучка или плоскости пучка.

Геометрический смысл проективного преобразования выясняется следующим предложением:

Если два образа первой ступени находятся в проективном соответствии, то любой из них может быть получен из другого путем конечного числа последовательных проектирований и сечений; обратное предложение также справедливо.

Справедливость обратного предложения очевидна, ибо при каждом проектировании и сечении двойные отношения соответствующих элементов равны между собою.

Доказательство прямого предложения достаточно провести для двух прямолинейных рядов точек, расположенных на одной и той же плоскости. Действительно, от всякого пучка прямых или плоскостей, при помощи сечения, можно перейти к прямолинейному ряду точек. Далее, если два прямолинейных ряда не расположены на одной плоскости, то, проектируя оба ряда из какой-либо точки (не принадлежащей ни одному из этих рядов) и пересекая полученные два пучка плоскостью, получим два прямолинейных ряда на одной плоскости. Наконец, мы можем всегда считать, что данные ряды не расположены на одной и той же прямой (ибо путем проектирования и сечения мы можем заменить один из данных рядов другим, расположенным на другой прямой).

Рассмотрим сперва тот частный случай, когда точки A и A' двух данных прямолинейных рядов, совпадающие с точкой пересечения прямых δ и δ', на которых данные ряды расположены, соответствуют друг другу. Пусть B, C — две другие точки первого ряда, а B', C' — соответствующие точки второго. Проведем прямые BB' и CC' и пусть O — точка их пересечения [2]) (черт. 118,*а*). Докажем теперь, что наши ряды получаются путем проектирования δ' на δ из O. Действительно, пусть D — какая-либо точка первого ряда, а D' — соответствующая точка второго. Имеем, по определению проективного соответствия:

$$(A', B', C', D') = (A, B, C, D). \qquad (1)$$

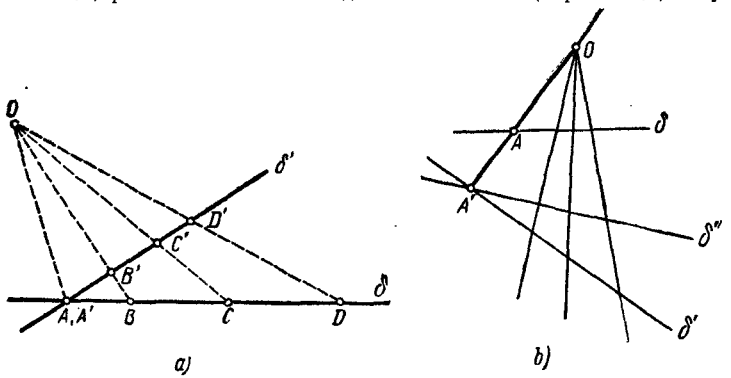
---

[1]) Ниже (в § 189) будет показано, что это определение, в применении к точкам прямолинейных рядов, согласуется с определением, данным раньше (§ 179, пункт 1°).

[2]) Точка O может быть и несобственной.

Докажем, что D и D' находятся на одной прямой с O. Пусть D'' — точка пересечения прямой OD с прямой δ', на которой расположен второй ряд. Имеем, на основании свойств двойного отношения: $(A', B', C', D'') = (A, B, C, D)$; следовательно, на основании (1), $(A', B', C', D'') = (A', B', C', D')$. Отсюда следует, что D'' совпадает с D', ибо существует только одна точка D' прямой, для которой двойное отношение (A', B', C', D') имеет данное значение при неизменных A', B', C'. Таким образом, наше предложение доказано для рассматриваемого частного случая[1]).

Рассмотрим теперь самый общий случай двух прямолинейных рядов на прямых δ и δ', расположенных на одной плоскости (черт. 118,*b*). Пусть A



Черт. 118

и A' — какие-либо соответствующие точки этих рядов. Проведем через эти точки прямую AA' и возьмем на ней какую-либо точку O, не совпадающую с A и A'. Спроектируем, далее, первый ряд из O на какую-либо прямую δ'', проходящую через A', но не совпадающую с δ'. Тогда мы получим, вместо ряда на δ, новый ряд на δ'', который расположен по отношению к ряду на δ' так, как в предыдущем частном случае.

Из этого вытекает справедливость высказанного общего предложения.

§ 186. Геометрическое значение проективных координат на прямой

В § 177 (пункт 1°) было введено понятие проективных координат на прямой. Теперь легко выяснить геометрический смысл этих координат.

Напомним, что если x обозначает (неоднородную) декартову координату точки на данной прямой, то (неоднородная) проективная координата той же точки определяется формулой

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \tag{1}$$

где α, β, γ, δ — постоянные, такие, что $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

[1]) Из этого, в частности, вытекает утверждение, высказанное без доказательства в § 179 (пункт 1°), что если между точками прямых Δ и Δ' установлено проективное соответствие, то эти прямые можно перенести в такое положение, чтобы точки прямой Δ', соответствующие точкам прямой Δ, получались путем проектирования из некоторого центра O. Действительно, для этого достаточно поместить прямые Δ и Δ' так, чтобы они не совпадали, но чтобы совместились какие-либо их точки A и A', соответствующие друг другу; тогда мы будем иметь случай, рассмотренный в тексте.

Однородными же проективными координатами называются числа y_1, y_2, не равные одновременно нулю, такие, что $\frac{y_1}{y_2}=y$. Для выяснения геометрического смысла координаты y отметим прежде всего следующее: если M, M', M'', M''' — четыре точки нашей прямой с (неоднородными) декартовыми координатами x, x', x'', x''' и проективными y, y', y'', y''', то

$$(M,\ M',\ M'',\ M''')=(x,\ x',\ x'',\ x''')=(y,\ y',\ y'',\ y'''),$$

ибо переменные y и x связаны дробно-линейной подстановкой. Возьмем теперь на нашей прямой три точки A, B, E, соответствующие следующим значениям y: ∞, 0, 1, т. е. следующим значениям однородных координат y_1, y_2: (1, 0), (0, 1), (1, 1), или всяким, им пропорциональным. Тогда [см. § 180, формула (8)]

$$(A,\ B,\ E,\ M)=(\infty,\ 0,\ 1,\ y)=y.$$

Итак, *проективной неоднородной координатой y точки M является двойное отношение трех постоянных точек A, B, E и точки M:*

$$y=\frac{y_1}{y_2}=(A,\ B,\ E,\ M). \tag{2}$$

Обратно, взяв на прямой три произвольные точки A, B, E и определяя y равенством (2), получим, что y есть дробно-линейная функция x, т. е. y есть (неоднородная) проективная координата в том смысле, как было определено нами это понятие с самого начала.

Точки A и B называются *основными точками*, а E — *единичной точкой* данной системы проективных координат.

Для дальнейшего важно отметить, что (неоднородные) *координаты y и y' точек M и M', гармонически сопряженных относительно основных точек A и B, равны по величине и обратны по знаку*. Действительно, из условия $(A,\ B,\ M,\ M')=-1$ следует

$$(\infty,\ 0,\ y,\ y')=\frac{y'}{y}=-1,$$

т. е.

$$y'=-y. \tag{*}$$

Вопрос о преобразовании проективных координат на данной прямой, уже рассмотренный в § 177 (пункт 1°), можно теперь представить в наглядной геометрической форме.

Возьмем вместо A, B, E новые точки A', B', E' и пусть z — проективная координата точки M в этой новой системе:

$$z=(A',\ B',\ E',\ M).$$

Если y', y'', y''' — проективные координаты точек A', B', E' относительно старой системы, то

$$z=(y',\ y'',\ y''',\ y),$$

т. е. z есть дробно-линейная функция от y:

$$z=\frac{ay+b}{cy+d}, \tag{3}$$

где a, b, c, d — постоянные. Обратно, меняя ролями y и z, получим y как дробно-линейную функцию от z. Из этого следует, что подстановка (3) неособенная (что также легко доказать непосредственно).

Переходя к однородным координатам и полагая $z=\frac{z_1}{z_2}$, $y=\frac{y_1}{y_2}$, получаем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ay_1+by_2}{cy_1+dy_2}.$$

Имея в виду, что важно только отношение z_1 к z_2, можно положить

$$z_1=ay_1+by_2, \quad z_2=cy_1+dy_2. \tag{4}$$

Следовательно, однородные проективные координаты преобразуются линейной однородной неособенной подстановкой, как было показано и раньше (§ 177).

Замечание. Разумеется, в качестве одной из основных точек можно взять и несобственную точку прямой. Если, например, A — несобственная точка, то при $x=\infty$ мы должны иметь $y=\infty$, т. е. при $x_2=0$ должно быть $y_2=0$.

Поэтому в формуле (1) $\gamma=0$ и мы будем иметь

$$y=\frac{\alpha}{\delta}x+\frac{\beta}{\delta}=lx+a \quad \left(l=\frac{\alpha}{\delta}, \quad a=\frac{\beta}{\delta}\right),$$

т. е. в этом случае y есть обычная абсцисса в некоторой системе декартовых координат на нашей прямой.

§ 187. Двойное отношение четырех точек на прямой, заданной параметрически

Пусть прямая Δ на плоскости задана двумя своими различными точками $M'(y_1', y_2', y_3')$ и $M''(y_1'', y_2'', y_3'')$; тогда однородные проективные координаты ее точек даются формулами (§ 178а)

$$y_1=\lambda y_1'+\mu y_1'', \quad y_2=\lambda y_2'+\mu y_2'', \quad y_3=\lambda y_3'+\mu y_3'', \tag{1}$$

где λ и μ — параметры, отношение которых

$$h=\frac{\lambda}{\mu} \tag{2}$$

определяет положение точки $M(y_1, y_2, y_3)$ на прямой. Докажем теперь, что *двойное отношение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 этой прямой равно двойному отношению соответствующих значений h*, т. е.

$$(M_1, M_2, M_3, M_4)=(h_1, h_2, h_3, h_4); \tag{3}$$

здесь h_1, h_2, h_3, h_4 обозначают значения h, соответствующие точкам M_1, M_2, M_3, M_4.

При доказательстве мы можем заменить, на основании сказанного в § 178а вслед за формулами (2), представление (1) представлением

$$x_1=\lambda x_1'+\mu x_1'', \quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'', \quad x_3=\lambda x_3'+\mu x_3'', \tag{1a}$$

где на этот раз фигурируют однородные декартовы координаты точек. Считая пока, что рассматриваемая прямая — собственная, введем неоднородные декартовы координаты $x=\frac{x_1}{x_3}$ и $y=\frac{x_2}{x_3}$; тогда (1а) дает

$$x=\frac{hx_1'+x_1''}{hx_3'+x_3''}, \quad y=\frac{hx_2'+x_2''}{hx_3'+x_3''}. \tag{1b}$$

Не нарушая общности, можно считать, что прямая Δ не параллельна оси Oy (в противном случае мы провели бы рассуждения, поменяв ролями оси Ox

и Oy). В этом случае двойное отношение $(M_1, M_2, M_3, M_4)=(N_1, N_2, N_3, N_4)$, где N_1, N_2, N_3, N_4 — проекции точек M_1, M_2, M_3, M_4 на ось Ox, взятые параллельно оси Oy. Но $(N_1, N_2, N_3, N_4)=(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, где $x^{(1)}, x^{(2)}$ $x^{(3)}, x^{(4)}$ — значения x, которые получим, подставляя в первую формулу (1b) последовательно h_1, h_2, h_3, h_4. А так как x есть дробно-линейная функция от h, то $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})=(h_1, h_2, h_3, h_4)$ и наше предложение доказано.

Из (3) следует, что *параметр* $h=\frac{\lambda}{\mu}$, *определяющий положение точки* M *на* Δ, *есть проективная координата, если за основные точки принять* M' *и* M'', *а за единичную точку — точку* E, *которая соответствует значению* $h=1$ (т. е. $\lambda=\mu$). Действительно, точкам M' и M'' соответствуют значения $h=\infty$ и $h=0$, поэтому

$$(M', M'', E, M)=(\infty, 0, 1, h)=h.$$

Предыдущие результаты останутся справедливыми и в том случае, когда прямая Δ — несобственная, т. е. когда $x_3'=x_3''=0$. Тогда имеем параметрическое представление

$$x_1=\lambda x_1'+\mu x_1'', \quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'', \quad x_3=0. \tag{4}$$

Рассмотрим наряду с несобственной прямой (4) собственную прямую (1a), где x_1', x_1'', x_2', x_2'' обозначают то же, что в (1a), а x_3' и x_3'' отличны от нуля, а в остальном — произвольны. Легко видеть, что прямая δ, соединяющая начало координат с некоторой точкой прямой (4), проходит и через точку прямой (1a), соответствующую тому же значению $\frac{\lambda}{\mu}=h$; действительно, прямая, соединяющая начало с точкой прямой (4) соответствующей данному значению h, имеет угловой коэффициент, равный $\frac{hx_2'+x_2''}{hx_1'+x_1''}$; но такой же угловой коэффициент имеет и прямая, соединяющая начало с точкой прямой (1a), соответствующей данному h. Поэтому двойное отношение четырех прямых пучка с центром в O, проходящих через данные четыре точки несобственной прямой Δ (а это двойное отношение и есть двойное отношение четырех данных точек), равно двойному отношению четырех точек прямой (1a), соответствующих тем же значениям h. Отсюда и следует наше утверждение.

Совершенно аналогичные результаты получаем для точек прямой в пространстве, заданной параметрически (§ 178a).

Замечание. Из того, что h является проективной координатой при основных точках M' и M'', вытекает, на основании сказанного в предыдущем параграфе, что если h_1 и h_2 обозначают значения параметра h, соответствующие двум точкам A и B, сопряженным гармонически относительно M' и M'', то

$$h_1+h_2=0.$$

§ 188. Двойное отношение четырех прямых (плоскостей) пучка, заданного параметрически. Проективные координаты в пучке

Переходя от прямолинейного ряда точек к взаимному образу — пучку прямых, — мы можем ввести понятие проективной координаты прямой пучка.

Пусть пучок определяется двумя своими прямыми $\Delta'(b_1', b_2', b_3')$ и $\Delta''(b_1'', b_2'', b_3'')$, где буквы в скобках обозначают однородные проективные координаты соответствующих прямых. Координаты всякой прямой $\Delta(b_1, b_2, b_3)$ пучка представятся так (см. § 178a):

$$b_1=\lambda b_1'+\mu b_1'', \quad b_2=\lambda b_2'+\mu b_2'', \quad b_3=\lambda b_3'+\mu b_3''. \tag{1}$$

Положение прямой Δ вполне характеризуется отношением

$$h=\frac{\lambda}{\mu}; \tag{2}$$

в частности, при $h=\infty$ прямая Δ совпадает с Δ' а при $h=0$ — с Δ''.

Легко показать, что *двойное отношение четырех прямых* Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 *пучка равно двойному отношению значений* h_1, h_2, h_3, h_4 *параметра* h, *соответствующих этим прямым, т. е.*

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)=(h_1, h_2, h_3, h_4). \tag{3}$$

И здесь, аналогично предыдущему параграфу, мы можем, при доказательстве, исходить из параметрического представления пучка в декартовых однородных координатах прямой, т. е. из представления (см. § 178а):

$$a_1=\lambda a_1'+\mu a_1'', \quad a_2=\lambda a_2'+\mu a_2'', \quad a_3=\lambda a_3'+\mu a_3''. \tag{1a}$$

Уравнение прямой $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ есть (в декартовых однородных координатах):

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$

или, на основании (1а):

$$(\lambda a_1'+\mu a_1'')x_1+(\lambda a_2'+\mu a_2'')x_2+(\lambda a_3'+\mu a_3'')x_3=0,$$

или еще, переходя к неоднородным координатам $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$:

$$(\lambda a_1'+\mu a_1'')x+(\lambda a_2'+\mu a_2'')y+(\lambda a_3'+\mu a_3'')=0.$$

Абсциссу x точки пересечения этой прямой с осью Ox получим, полагая в предыдущем уравнении $y=0$, что дает[1])

$$x=-\frac{\lambda a_3'+\mu a_3''}{\lambda a_1'+\mu a_1''}=-\frac{ha_3'+a_3''}{ha_1'+a_1''}.$$

Двойное отношение четырех прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 равно двойному отношению четырех точек пересечения этих прямых с осью Ox, т. е. величине $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, где $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ обозначают значения x, которые получим, подставляя в предыдущую формулу h_1, h_2, h_3, h_4 вместо h. Но так как x есть дробно-линейная функция от h, как это показывает предыдущая формула, то мы будем иметь

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})=(h_1, h_2, h_3, h_4),$$

откуда и следует формула (3).

В частности, применяя формулу (3) к прямым Δ', Δ'', E, Δ, где E обозначает прямую пучка, соответствующую $h=1$ (т. е. $\lambda=\mu$), а Δ — произвольную прямую, будем иметь

$$(\Delta', \Delta'', \mathrm{E}, \Delta)=(\infty, 0, 1, h)=h.$$

Итак,

$$h=\frac{\lambda}{\mu}=(\Delta', \Delta'', \mathrm{E}, \Delta). \tag{4}$$

---

[1]) Мы считаем, что ось Ox не принадлежит пучку. Если это не так, то мы можем провести аналогичные рассуждения, взяв вместо Ox ось Oy. Наконец, если O является центром пучка, то мы можем рассмотреть пересечение прямых пучка с какой-либо прямою, параллельною одной из осей, например с прямою $y=c$, где $c\neq 0$. Окончательный результат будет тот же.

Величина $h=\frac{\lambda}{\mu}$ называется (*неоднородной*) *проективной координатой прямой* Δ, *принадлежащей пучку, а* λ, μ—*однородными проективными координатами* той же прямой.

Прямые Δ' и Δ'', соответствующие значениям $h=\infty$ и $h=0$, суть «*основные прямые*», а E, соответствующая $h=1$,—«*единичная прямая*» принятой системы координат. Прямые Δ', Δ'', E могут быть выбраны совершенно произвольно; они только должны быть различны.

Совершенно аналогично можно ввести *проективную координату* h *плоскости, принадлежащей пучку*, или *однородные проективные координаты* λ, μ. А именно, здесь мы будем иметь

$$h=\frac{\lambda}{\mu}=(\Pi',\ \Pi'',\ \mathrm{E},\ \Pi), \tag{5}$$

где Π', Π''—постоянные «*основные плоскости*», E—«*единичная плоскость*», соответствующая $h=1$, а Π—плоскость, которой соответствует h.

Замечание. Если α обозначает угол, составляемый прямою Δ пучка с некоторым постоянным направлением, то величину $m=\operatorname{tg}\alpha$ (тангенс-координату) можно рассматривать, как проективную координату. Действительно, пусть Δ', Δ'', E—три прямые пучка, соответствующие значениям $m=\infty$, $m=0$ и $m=1$ $\left(\text{т. е. } \alpha=\frac{\pi}{2},\ \alpha=0 \text{ и } \alpha=\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда[1])

$$(\Delta',\ \Delta'',\ \mathrm{E},\ \Delta)=(\infty,\ 0,\ 1,\ m)=m;$$

следовательно, m есть проективная координата, если за основные прямые взять Δ', Δ'', а за единичную—прямую E.

§ 189. Аналитическое выражение проективного соответствия двух образов первой ступени

Пусть даны два образа первой ступени, элементы которых приведены в проективное соответствие.

Рассмотрим, для определенности, два прямолинейных ряда точек, расположенных на прямых Δ и Δ'. Пусть h и h'—проективные координаты соответствующих друг другу точек M и M' на Δ и Δ'. По определению проективного соответствия имеем

$$(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M)=(M_1',\ M_2',\ M_3',\ M'), \tag{1}$$

где M_1, M_2, M_3—три какие-либо различные точки прямой Δ, а M_1', M_2', M_3'—соответствующие точки прямой Δ'. Из (1) следует (§ 187)

$$(h_1,\ h_2,\ h_3,\ h)=(h_1',\ h_2',\ h_3',\ h'),$$

откуда заключаем, что h' есть дробно-линейная функция h, и обратно:

$$h'=\frac{\alpha h+\beta}{\gamma h+\delta},\quad h=\frac{\alpha' h'+\beta'}{\gamma' h'+\delta'}. \tag{2}$$

Вводя вместо неоднородных координат h и h' однородные $(\lambda,\ \mu)$ и $(\lambda',\ \mu')$:

$$h=\frac{\lambda}{\mu},\quad h'=\frac{\lambda'}{\mu'},$$

---

[1]) На основании формулы (2) § 183, двойное отношение четырех прямых пучка равно двойному отношению соответствующих значений m.

подставляя их в предыдущие формулы и приняв во внимание, что однородные координаты можно заменять пропорциональными им величинами, можем положить

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \alpha\lambda + \beta\mu, & \lambda &= \alpha'\lambda' + \beta'\mu', \\ \mu' &= \gamma\lambda + \delta\mu, & \mu &= \gamma'\lambda' + \delta'\mu', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

т. е. однородные проективные координаты соответствующих точек, при проективном соответствии, связаны линейной однородной неособенной подстановкой [1]).

Обратно, если имеет место (2) или (3), то соответствие проективное, ибо тогда имеет место (1) для любых четырех точек одного прямолинейного ряда и соответствующих точек другого.

Сказанное, очевидно, непосредственно переносится и на другие образы первой ступени (пучок прямых или плоскостей), и мы получаем следующее предложение:

Если два образа первой ступени находятся в проективном соответствии, то неоднородные проективные координаты соответствующих элементов связаны (неособенной) дробно-линейной подстановкой, и обратно. Однородные координаты связаны линейной однородной (неособенной) подстановкой.

Вернемся к случаю прямолинейных рядов. Если A, B, E — основные и единичная точки системы координат на первой прямой, а A', B', E' — аналогичные точки на второй, то, по определению проективной координаты,

$$h = (A, B, E, M), \quad h' = (A', B', E', M').$$

Пусть рассматриваемые ряды находятся в проективном соответствии и пусть в качестве A', B', E' взяты точки, соответствующие точкам A, B, E; если M, M' — соответствующие точки, то $(A, B, E, M) = (A', B', E', M')$, и, следовательно,

$$h = h'. \tag{4}$$

Итак, в этом случае, соотношения (2) сводятся просто к равенству проективных координат соответствующих точек.

Это непосредственно распространяется на другие образы первой ступени.

Например, если данный прямолинейный ряд и пучок прямых приведены в проективное соответствие, то координаты h и h' соответствующих элементов (точки ряда и прямой пучка) равны между собою, если в качестве основных и единичных элементов в обоих образах взяты соответствующие друг другу элементы.

§ 190. Наложенные образы первой ступени. Инволюция

Рассмотрим для определенности сперва два прямолинейных ряда точек. Эти ряды могут быть расположены на двух различных прямых Δ и Δ' или на одной и той же прямой.

В этом последнем случае говорят, что рассматриваемые ряды наложены друг на друга. И здесь удобно представлять себе (как мы делали это и раньше в подобных случаях), что мы имеем две наложенные друг на друга прямые Δ и Δ', на которых расположены рассматриваемые ряды. Дело в следующем. Пусть точки M и M' рассматриваемых рядов приведены в обратимо-однозначное соответствие, так что

$$x' = \varphi(x), \quad x = \psi(x'), \tag{1}$$

---

[1]) В § 179 (пункт 1°) это свойство было принято в качестве определения проективного соответствия двух прямолинейных рядов точек; теперь же оно получено как следствие другого (геометрического) определения, данного в § 185. Мы видим, что оба определения эквивалентны.

где x и x' — абсциссы точек M и M', а φ, ψ — однозначные функции. Пусть теперь N — какая-либо точка прямой, на которой расположены оба ряда. Если не указано, какому из двух рядов эта точка принадлежит, то мы не будем знать, по какой из двух формул (1) следует вычислять абсциссу соответствующей точки; поэтому-то и удобно рассматривать наложенные ряды, как расположенные на наложенных друг на друга двух прямых: указывая, на какой из прямых находится N, мы тем самым указываем, какому ряду она принадлежит.

Но есть весьма важный случай, когда такое различие излишне, — это когда соответствие между двумя рядами таково, что точка M', соответствующая данной точке M, занимает одно и то же положение независимо от того, рассматривается ли M как точка первого или второго ряда. Аналитически это выражается тем, что функции φ и ψ — одинаковые (если точки обоих рядов отнесены к одной и той же системе координат). В этом случае *нет надобности отличать прямые Δ и Δ' и, вообще, первый ряд от второго*: можно просто говорить, что точки одного и того же ряда приведены в соответствие попарно таким образом, что если точке M соответствует точка M', то, обратно, точке M' соответствует точка M.

Такое соответствие называется *инволюторным*. В дальнейшем мы будем называть *инволюцией* проективное инволюторное соответствие.

Найдем общее аналитическое выражение для инволюции. Пусть h — проективная координата точки M рассматриваемого ряда; если M' — соответствующая точка, а h' — ее координата относительно той же системы, то

$$h' = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

ибо, по условию, соответствие — проективное.

Соотношение это можно переписать и так:

$$\gamma h h' - \alpha h + \delta h' - \beta = 0.$$

Так как соответствие между M и M' — инволюторное, то это соотношение должно быть эквивалентно соотношению

$$\gamma h' h - \alpha h' + \delta h - \beta = 0,$$

получаемому перестановкой h и h'. Вычитая второе равенство из первого, получим

$$(\alpha + \delta)(h' - h) = 0.$$

Если $\alpha + \delta \neq 0$, то мы имеем

$$h' = h,$$

т. е. наша инволюция состоит попросту в том, что каждая точка соответствует самой себе. Отбрасывая этот случай, не представляющий интереса, мы должны считать

$$\alpha + \delta = 0,$$

и соотношение между h и h', выражающее инволюцию, принимает вид

$$\gamma h h' + \delta(h + h') - \beta = 0,$$

или, полагая для симметрии $\gamma = a$, $\delta = -\alpha = b$, $-\beta = c$,

$$a h h' + b(h + h') + c = 0, \tag{2}$$

где a, b, c — постоянные, такие, что

$$ac - b^2 \neq 0;$$

это последнее условие вытекает из условия $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Найдем теперь *двойные точки инволюции*, т. е. такие, которые соответствуют самим себе. Если точка M' совпадает с соответствующей ей точкой M, то $h'=h$ и (2) дает

$$ah^2+2bh+c=0, \tag{3}$$

откуда находим для h два значения:

$$h=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}. \tag{4}$$

Значит, всегда имеются две двойные точки A и B; эти точки действительны, если $b^2-ac>0$, мнимые сопряженные, если $b^2-ac<0$.

Если двойные точки совпадают с основными точками A ($h=\infty$) и B ($h=0$) системы координат, то уравнение (3) должно иметь корни $h=0$ и $h=\infty$, откуда следует, что $a=c=0$, и соотношение (2) принимает вид

$$h+h'=0,$$

т. е. координаты соответствующих точек равны по величине и противоположны по знаку. Из этого следует (см. замечание в конце § 187), что точки M и M' гармонически сопряжены относительно точек A и B. Итак, всякая инволюция представляет собою гармоническое сопряжение относительно двух действительных или мнимых точек. Очевидно, что и обратно, попарное соответствие точек, гармонически сопряженных относительно двух заданных точек A, B, есть инволюция с двойными точками A и B.

Все сказанное здесь может быть в точности перенесено на другие образы первой ступени, т. е. на пучок прямых и пучок плоскостей.

Два пучка прямых (или плоскостей) называются наложенными друг на друга, если их центры (или оси) совпадают. К этим пучкам можно применить все сказанное выше, заменив всюду слово «точка» словом «прямая» (или «плоскость»).

Рассмотрим, в качестве примера, *ортогональную инволюцию прямых пучка*, при которой каждой прямой соответствует прямая, к ней перпендикулярная. Для аналитического выражения этой инволюции возьмем в качестве проективной координаты тангенс-координату $m=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, который прямая пучка составляет с постоянною прямою (см. § 188, замечание). Условие того, чтобы две прямые Δ и Δ' пучка, соответствующие значениям m и m', были перпендикулярны, заключается, очевидно, в следующем: $m=-\frac{1}{m'}$, или

$$mm'+1=0.$$

Это — частный случай соотношения (2); следовательно, мы действительно имеем дело с инволюцией.

Двойными прямыми нашей инволюции являются прямые, угловые коэффициенты которых удовлетворяют уравнению $m^2+1=0$, откуда $m=\pm i$; следовательно, как и следовало ожидать, двойные прямые — мнимые. Это, как мы видим, изотропные прямые плоскости, на которой расположен пучок (см. § 162).

Обратно, инволюция, определяемая изотропными прямыми пучка, есть ортогональная инволюция.

Таким образом, взаимно перпендикулярные направления на плоскости могут быть определены как направления, гармонически сопряженные относительно изотропных прямых этой плоскости.

Замечание. Легко видеть, что если в двух наложенных образах первой ступени три каких-либо различных элемента A, B, C одного образа

совпадают с тремя соответствующими элементами A', B', C' другого[1]), то это совпадение имеет место и для всех элементов.

Действительно, если M и M' — какие-либо соответствующие элементы наших образов, то, по определению проективного соответствия,

$$(A, B, C, M) = (A', B', C', M'),$$

откуда $(A, B, C, M) = (A, B, C, M')$, ибо A', B', C' совпадают с A, B, C. Отсюда вытекает, что M' совпадает с M.

§ 191. Геометрическое значение проективных координат на плоскости и в пространстве

1°. В § 177 (пункт 2°) было введено понятие проективных координат точки на плоскости. Напомним, что однородные проективные координаты y_1, y_2, y_3 точки связаны с однородными декартовыми координатами той же точки линейной однородной неособенной подстановкой

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 \equiv f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3 \equiv f_2(x_1, x_2, x_3), \\ y_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3 \equiv f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где β_{ij} — постоянные, определитель которых отличен от нуля.

Результаты предыдущих параграфов позволяют легко выяснить геометрическое значение проективных координат на плоскости. Рассмотрим, с этой целью, три прямые[2]):

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{2}$$

уравнения которых, в координатах y_1, y_2, y_3 имеют соответственно вид

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Эти прямые не пересекаются в одной точке (ибо, по условию, определитель, составленный из коэффициентов β_{ik}, отличен от нуля) и поэтому образуют треугольник, который называется *основным треугольником* рассматриваемой *проективной системы координат*.

Обозначим вершины этого треугольника через A_1, A_2, A_3, а именно, через A_1 мы обозначим пересечение сторон $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, через A_2 — пересечение сторон $y_3 = 0$, $y_1 = 0$ и через A_3 — пересечение сторон $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Таким образом, проективные координаты этих точек будут[3]): (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Введем еще в рассмотрение *единичную точку*, т. е. точку E с координатами (1, 1, 1)[4]).

Вычислим теперь двойное отношение четырех прямых, проходящих через вершину A_1 и через точки A_2, A_3, E, M (черт. 119). Уравнение всякой прямой, проходящей через A_1, т. е. через пересечение прямых $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, имеет вид $\lambda y_2 + \mu y_3 = 0$, или, если положить $h = \frac{\mu}{\lambda}$:

$$y_2 + hy_3 = 0, \tag{3}$$

---

[1]) Если элемент A одного образа совпадает с соответствующим элементом A' другого, то говорят, что элемент A соответствует самому себе.

[2]) Здесь f_1, f_2, f_3 обозначают то же, что и в формулах (1).

[3]) Для точки A_1 имеем, например, $y_1 \neq 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; так как мы можем заменить координаты пропорциональными им величинами, мы можем считать $y_1 = 1$.

[4]) Или, что все равно, — с координатами (k, k, k), где k — произвольное число, отличное от 0.

где h — параметр, определяющий положение рассматриваемой прямой. При $h=\infty$ получаем прямую A_1A_2 (т. е. прямую $y_3=0$), при $h=0$ — прямую A_1A_3 (т. е. $y_2=0$), при $h=-1$ прямую A_1E. Поэтому двойное отношение прямых A_1A_2, A_1A_3, A_1E, A_1M, которое мы, для краткости, обозначим символом

$$A_1(A_2,\ A_3,\ E,\ M),$$

будет дано формулой

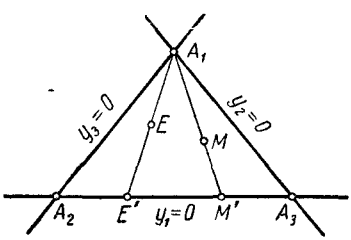
$$A_1(A_2,\ A_3,\ E,\ M)=(\infty,\ 0,\ -1,\ h)=-h,$$

где через h обозначено то значение параметра в (3), которое соответствует прямой A_1M. Если y_1, y_2, y_3 обозначают координаты точки M и, следовательно, на основании (3) $h=-\frac{y_2}{y_3}$, предыдущая формула дает первую из следующих формул:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y_2}{y_3}=A_1(A_2,\ A_3,\ E,\ M),\ \frac{y_3}{y_1}=A_2(A_3,\ A_1,\ E,\ M),\\ \frac{y_1}{y_2}=A_3(A_1,\ A_2,\ E,\ M);\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

две последние формулы получены из первой круговой перестановкой значков 1,2,3.

Мы видим, таким образом, каково геометрическое значение отношений однородных координат y_1, y_2, y_3.



Черт. 119

Смысл формул (4) сделается, пожалуй, еще более наглядным, если записать их так:

$$\frac{y_2}{y_3}=(A_2,\ A_3,\ E',\ M')\ \text{(и две аналогичные)},\qquad(4a)$$

где E' и M' обозначают точки пересечения прямых A_1E и A_1M с прямою A_2A_3. Последняя формула показывает, что $\frac{y_2}{y_3}$ есть (неоднородная) проективная координата точки M' на прямой A_2A_3 при основных точках A_2, A_3 и единичной точке E'.

Легко показать, что всякие три неколлинеарные точки A_1, A_2, A_3 могут быть взяты в качестве вершин основного треугольника и единичная точка E может быть также выбрана произвольно (лишь бы она не находилась на одной из сторон[1]) основного треугольника).

Действительно, пусть $f_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$, $f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$, $f_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$, где f_1, f_2, f_3 — линейные однородные независимые формы переменных x_1, x_2, x_3, представляют уравнения сторон A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Так как, в координатах y_1, y_2, y_3, уравнения этих прямых должны иметь вид $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, то должно быть

$$y_1=\lambda_1f_1(x_1,\ x_2,\ x_3),\ y_2=\lambda_2f_2(x_1,\ x_2,\ x_3),\ y_3=\lambda_3f_3(x_1,\ x_2,\ x_3),\qquad(5)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — постоянные. Остается подобрать эти постоянные из условия, чтобы $y_1=y_2=y_3=1$ при $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $x_3=x_3^0$, где x_1^0, x_2^0, x_3^0 — координаты заданной точки E. Это всегда возможно, так как $f_1(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)\neq 0$, ибо E не лежит на прямой A_2A_3, и аналогично для f_2 и f_3. [Если бы мы

[1]) Под стороною подразумевается вся прямая, а не только отрезок между вершинами.

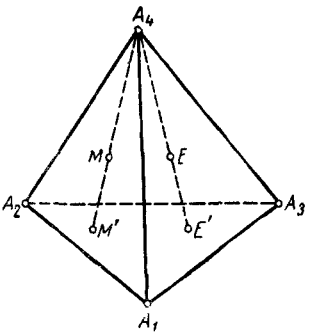
заменили требование $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ требованием $y_1 = y_2 = y_3 = k$, где k — произвольное число, отличное от нуля, то вместо прежних λ_1, λ_2, λ_3 получили бы $k\lambda_1$, $k\lambda_2$, $k\lambda_3$, т. е. правые части (5) умножились бы на одно и то же число, что не имеет значения.]

Соотношения (5) имеют вид (1) и потому y_1, y_2, y_3 суть проективные координаты, удовлетворяющие всем поставленным требованиям.

Одна из сторон основного треугольника может быть и несобственной. Тогда мы опять придем к декартовым координатам. Действительно, если, например, A_1 и A_2 — несобственные точки и, следовательно, A_1A_2 — несобственная прямая, то уравнение ее есть $x_3 = 0$ и, следовательно, в формулах (5) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Мы можем также считать $\lambda_3 = 1$ (это сводится к умножению y_1, y_2, y_3 на одно и то же число), и соотношения (5) примут вид

$$y_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3,$$
$$y_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3, \quad y_3 = x_3,$$

где k_{ij} — постоянные, а это — формулы преобразования декартовых координат в декартовы (§ 173), и наше утверждение доказано. Легко доказать его также непосредственно, исходя из формул (4); см. ниже, упражнения.



Черт. 120

Проективные координаты прямой имеют весьма простое геометрическое значение, аналогичное значению координат точки, которое дается формулами (4). Чтобы выяснить это значение, достаточно перейти от координат точки к координатам прямой, пользуясь принципом взаимности (см. ниже, упражнения).

2°. В § 177 (пункт 2°) было введено понятие координат точки в пространстве; а именно, проективные однородные координаты y_1 y_2, y_3, y_4 некоторой точки связаны с однородными декартовыми координатами x_1, x_2, x_3, x_4 той же точки линейной однородной неособенной подстановкой

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \beta_{14}x_4 \equiv f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3 + \beta_{24}x_4 \equiv f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ y_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3 + \beta_{34}x_4 \equiv f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ y_4 &= \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_2 + \beta_{43}x_3 + \beta_{44}x_4 \equiv f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где β_{ij} — постоянные, определитель которых отличен от нуля.

Выясним теперь геометрический смысл проективных координат в пространстве. Ввиду полной аналогии с предыдущим мы ограничимся краткими указаниями.

Плоскости $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ или $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ образуют основной тетраэдр. Вершины этого тетраэдра, противолежащие граням $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, суть точки $A_1(1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 1, 0)$, $A_4(0, 0, 0, 1)$; здесь в скобках стоят значения координат[1]) y_1, y_2, y_3, y_4 (черт. 120).

Введем в рассмотрение «единичную точку» $E(1, 1, 1, 1)$ и проведем через какое-либо ребро A_iA_j (i, j — два неравных между собою числа из чисел 1, 2, 3, 4) четыре плоскости, проходящие, соответственно, через A_k, A_l, E и M; A_k и A_l обозначают две вершины, отличные от A_i и A_j, так что ребра A_iA_j и A_kA_l являются противоположными (как, например, ребра A_2A_4 и A_1A_3 на черт. 120).

[1]) Для точки A_1 вместо $(1, 0, 0, 0)$ можно взять $(k, 0, 0, 0)$, где k — любое число, не равное нулю. Так же и для остальных вершин.

Двойное отношение этих четырех плоскостей обозначим следующим символом: $A_iA_j(A_k, A_l, E, M)$. Тогда, как легко убедиться,

$$\frac{y_k}{y_l} = A_iA_j(A_k, A_l, E, M). \tag{7}$$

Действительно[1]), общее уравнение плоскостей, проходящих через ребро A_iA_j, которое является пересечением граней $y_k = 0$ и $y_l = 0$, имеет вид

$$y_k + hy_l = 0. \tag{8}$$

Грани $y_l = 0$ (проходящей через A_k) соответствует $h = \infty$, а грани $y_k = 0$ (проходящей через A_l) $h = 0$; наконец, плоскости, проходящей через E, соответствует $h = -1$. Следовательно,

$$A_iA_j(A_k, A_l, E, M) = (\infty, 0, -1, h) = -h,$$

где h обозначает то значение параметра в (8), которое соответствует плоскости, проходящей через $M(y_1, y_2, y_3, y_4)$; на основании (8), $h = -\frac{y_k}{y_l}$ и мы получаем формулу (7).

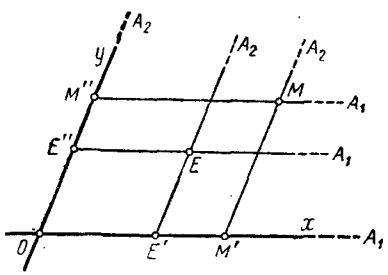
Предоставляем читателю доказать следующее: если через вершину A_4 провести прямые A_4E и A_4M и если E', M' — точки пересечения этих прямых с гранью $A_1A_2A_3$, то y_1, y_2, y_3 суть проективные координаты точки M' на плоскости упомянутой грани при основном треугольнике $A_1A_2A_3$ и единичной точке E'; аналогично и для других граней.

Аналогично определяются проективные координаты плоскости и выясняется их геометрическое значение.

Легко, далее, видеть (сравн. предыдущий пункт), что любой тетраэдр можно взять в качестве основного и выбрать любую точку E в качестве единичной (лишь бы она не находилась ни на одной из граней тетраэдра).

Упражнения и дополнения

1. Выяснить, пользуясь формулами (4), геометрическое значение проективных координат точки на плоскости в случае, когда сторона A_1A_2 основного треугольника — несобственная прямая.



Черт. 121

Решение. Обозначим A_3 через O, а через Ox, Oy — прямые, в направлении которых удалены точки A_1 и A_2. Пусть E — произвольно выбранная единичная точка. Она должна быть собственной (не находиться на стороне A_1A_2) и не должна лежать на Ox и Oy. Пусть E', E'' — проекции E на оси Ox и Oy (взятые параллельно Oy и Ox), а M', M'' — проекции произвольной точки M на те же оси (черт. 121).

На основании второй формулы (4), отношение $\frac{y_3}{y_1}$ равно двойному отношению четырех прямых пучка с центром в A_2 (т. е. четырех прямых, параллельных Oy), проходящих через точки O, A_1, E и M; но это двойное отношение равно двойному отношению точек O, A_1, E', M' прямой Ox. Следова-

[1]) Рекомендуем читателю провести приводимые рассуждения, взяв для i, j, k, l определенные значения, например $i = 2$, $j = 4$, $k = 1$, $l = 3$.

тельно [1]),

$$\frac{y_3}{y_1}=(O,\ A_1,\ E',\ M')=\frac{OE'}{OM'},$$

откуда

$$\frac{y_1}{y_3}=\frac{OM'}{OE'}.$$

Совершенно аналогично получим

$$\frac{y_2}{y_3}=\frac{OM''}{OE''}.$$

Итак, y_1, y_2, y_3 суть однородные декартовы координаты; началом является O, а координатными векторами $\mathbf{u}=\overrightarrow{OE'}$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{OE''}$.

2. Пусть b_1, b_2, b_3 — проективные координаты прямой Δ на плоскости. Обозначим через Δ_1, Δ_2, Δ_3 стороны основного треугольника, противоположные вершинам A_1, A_2, A_3, а через E — единичную прямую, для которой $b_1=b_2=b_3=1$ (или, просто $b_1=b_2=b_3\neq 0$). Будем обозначать символом $\Lambda_1(\Delta_2,\ \Delta_3,\ \mathrm{E},\ \Delta)$ двойное отношение точек пересечения прямых Δ_2, Δ_3, E, Δ с прямою Δ_1. Требуется доказать, что имеют место формулы

$$\frac{b_2}{b_3}=\Delta_1(\Delta_2,\ \Delta_3,\ \mathrm{E},\ \Delta) \quad \text{(и две аналогичные, получаемые круговой перестановкой)} \tag{9}$$

Эти формулы выясняют геометрический смысл проективных координат прямой.

Доказательство. Будем определять положение точки на прямой Δ_1 $(y_1=0)$ неоднородной проективной координатой $y=\frac{y_2}{y_3}$ на этой прямой. Точкам A_3 и A_2 (это — точки пересечения Δ_1 с Δ_2 и Δ_3) соответствуют значения $y=0$ и $y=\infty$. Значение y, соответствующее точке пересечения Δ_1 с прямою Δ, получим, полагая $y_1=0$ в уравнении $b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3=0$ прямой Δ, что дает

$$y=\frac{y_2}{y_3}=-\frac{b_3}{b_2}.$$

Наконец, значение y, соответствующее точке пересечения Δ_1 с E, получим, полагая в последней формуле $b_2=b_3=1$; это дает $y=-1$. Следовательно [2]),

$$\Lambda_1(\Lambda_2,\ \Lambda_3,\ \mathrm{E},\ \Delta)=\left(0,\ \infty,\ -1,\ -\frac{b_3}{b_2}\right)=\frac{b_2}{b_3},$$

а это и требовалось доказать [3]).

---

[1]) Если бы точка A_1 была собственной, то было бы

$$(O,\ A_1,\ E',\ M')=\frac{OE'}{E'A_1}:\frac{OM'}{M'A_1}=\frac{OE'}{OM'}\cdot\frac{M'A_1}{E'A_1}.$$

Но так как A_1 — несобственная точка, то мы должны считать $\frac{M'A_1}{E'A_1}=1$ (ибо отношение $\frac{M'A}{E'A}$ стремится к 1, когда собственная точка A удаляется в бесконечность).

[2]) Имеем $(0,\ \infty,\ \alpha,\ \beta)=\frac{1}{(\infty,\ 0,\ \alpha,\ \beta)}=\frac{\alpha}{\beta}$.

[3]) Доказательство это слегка (по внешнему виду) отличается от доказательства соответственного предложения для координат точки. Предлагаем читателю провести доказательство иначе, так, чтобы оно получилось непосредственно из доказательства для координат точки, путем перехода ко взаимным образам.

3. Выяснить, пользуясь формулами (7), геометрическое значение проективных координат точки в пространстве, когда грань $A_1A_2A_3$ основного тетраэдра — несобственная плоскость (сравн. упражнение 1).

4. Выяснить геометрическое значение проективных координат плоскости в пространстве (сравн. упражнение 2).

§ 192. Геометрическое значение преобразования проективных координат на плоскости и в пространстве

В § 177 (пункт 2°) был рассмотрен вопрос о преобразовании проективных координат точки на плоскости и в пространстве. Теперь мы можем легко выяснить геометрическое значение преобразования проективных координат.

А именно, на основании сказанного в предыдущем параграфе (пункт 1°) ясно, что изменение системы проективных координат на плоскости сводится к изменению основного треугольника и единичной точки.

Если заданы уравнения $f_1(y_1, y_2, y_3)=0$, $f_2(y_1, y_2, y_3)=0$, $f_3(y_1, y_2, y_3)=0$ сторон нового основного треугольника, отнесенных к старой системе проективных координат, а также координаты y_1^0, y_2^0, y_3^0 новой единичной точки, то переход к новой системе никаких затруднений не представляет: для этого достаточно буквально повторить сказанное в предыдущем параграфе (пункт 1°) относительно определения проективных координат, когда заданы вершины A_1, A_2, A_3 основного треугольника и единичная точка E; действительно, все сказанное там останется в силе, если вместо декартовых координат x_1, x_2, x_3 подразумевать старые проективные координаты y_1, y_2, y_3, вместо A_1, A_2, A_3 и E — вершины A_1', A_2', A_3' нового основного треугольника и новую единичную точку E', а вместо y_1, y_2, y_3 — новые проективные координаты y_1', y_2', y_3'.

Обобщение на случай пространства трех измерений настолько очевидно, что мы на нем не останавливаемся.

§ 193. Основные свойства проективных точечных преобразований плоскости и пространства

В § 179 (пункт 2°) было введено понятие проективных точечных или гомографических преобразований плоскости и пространства и были указаны некоторые свойства таких преобразований. Теперь мы несколько дополним сказанное там.

1°. В упомянутом параграфе было показано, что при гомографическом соответствии двух плоскостей П и П′ прямолинейные ряды одной плоскости соответствуют прямолинейным рядам другой, т. е. прямые соответствуют прямым. При этом однородные проективные координаты соответствующих друг другу прямых связаны линейной однородной неособенной подстановкой. Из этого вытекает, что пучку прямых на одной из плоскостей П, П′ соответствует пучок прямых на другой; доказательство совершенно аналогично доказательству предложения о соответствии прямолинейных рядов (эти предложения взаимны).

2°. Гомографическое соответствие плоскостей П и П′ приводит в проективное соответствие образы первой ступени, принадлежащие этим плоскостям [1]).

Действительно, рассмотрим на П прямолинейный ряд точек, заданный параметрически:

$$x_1=\lambda y_1+\mu z_1,\quad x_2=\lambda y_2+\mu z_2,\quad x_3=\lambda y_3+\mu z_3, \tag{1}$$

[1]) В § 179 это предложение было уже высказано (без доказательства) в части, касающейся прямолинейных рядов.

где (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) — две какие-либо точки рассматриваемого прямолинейного ряда. Подставляя эти выражения в формулы (4) § 179, получим формулы такого же вида:

$$x_1' = \lambda y_1' + \mu z_1', \quad x_2' = \lambda y_2' + \mu z_2', \quad x_3' = \lambda y_3' + \mu z_3', \tag{1a}$$

где (x_1', x_2', x_3'), (y_1', y_2', y_3'), $(z_1', z_2' z_3')$ обозначают точки плоскости П′, соответствующие точкам (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) плоскости П. Из (1) и (1a) снова заключаем, что прямолинейному ряду на П соответствует прямолинейный ряд на П′. Кроме того, мы видим, что эти ряды проективны, ибо двойное отношение четырех точек каждого ряда определяется двойным отношением четырех значений величины $h = \frac{\lambda}{\mu}$, соответствующие же точки обоих рядов определяются одним и тем же значением h, как это следует из (1) и (1a).

Точно так же докажем предложение для двух соответствующих пучков на П и П′.

Этими свойствами, а также свойством, которое будет сейчас доказано (пункт 3°), и объясняется название «проективное соответствие».

3°. Всякая гомография между плоскостями П и П′ есть результат конечного числа проектирований и сечений.

Доказательство. Мы можем всегда считать, что плоскости П и П′ не совмещены, ибо, в противном случае, мы можем перейти, например, от плоскости П′ к другой, с ней несовмещенной, путем одного проектирования и сечения.

Рассмотрим теперь три случая. a) Пусть все точки прямой пересечения[1]) Λ плоскостей П и П′ соответствуют самим себе. Пусть A и B — две какие-либо точки плоскости П, а A', B' — соответствующие им точки плоскости П′. Пусть M — точка пересечения прямой AB с Δ. Точка M' пересечения $A'B'$ с Λ есть точка, соответствующая точке M (ибо M и M' суть точки пересечения соответствующих прямых). Следовательно, M и M' совпадают (ибо точки прямой Δ, по условию, соответствуют самим себе). Таким образом, четыре точки A, B, A', B' расположены на одной плоскости (плоскости, проходящей через прямые MAB и $MA'B'$), откуда следует, что прямые AA' и BB', как компланарные, пересекаются в некоторой точке O (собственной или несобственной).

Если мы теперь возьмем на П и П′ любую другую пару точек C и C', соответствующих друг другу, то прямая CC', на основании тех же соображений, должна будет пересечь обе прямые AA' и BB'. Очевидно, что если прямая CC' не находится в одной плоскости с AA' и BB', она необходимо пройдет через O. Но она пройдет через O и в том случае, если находится в одной плоскости с AA' и BB'; действительно, возьмем еще прямую DD' (где D и D' — соответствующие точки на П и П′), не находящуюся в одной плоскости с AA' и BB'. Тогда DD' пройдет через O, и поэтому прямая CC', которая должна пересечь все три прямые AA', BB', CC', необходимо проходит через O.

Отсюда и следует, что плоскости П и П′, перспективны (центром перспективы является O) и что наша гомография получается проектированием П на П′ из центра O.

b) Пусть прямая Δ содержит одну точку M такую, что соответствующая точка M' совпадает с M.

Проведем из M прямую на П и возьмем на ней две произвольные точки A и B. Пусть A' и B' — точки на П′, соответствующие A и B. Как было показано выше, прямые AA' и BB' пересекутся в некоторой точке O. Спроектируем из этой точки плоскость П′ на вспомогательную плоскость $П_1$, проходящую через прямую ABM.

[1]) Прямая Δ может быть и несобственной.

Плоскости П и $П_1$, находящиеся, очевидно, в проективном соответствии, имеют общую прямую ABM:, при этом три точки A, B, M этой прямой соответствуют самим себе. Следовательно, все точки этой прямой соответствуют самим себе[1]), и мы приходим к предыдущему случаю.

c) Возьмем самый общий случай. Пусть A и A' — какие-либо точки на П и П′, соответствующие друг другу. Возьмем на прямой AA' какую-либо точку O и спроектируем из нее плоскость П′ на какую-либо плоскость $П_1$, проходящую через A. Точка A прямой пересечения плоскостей П и $П_1$ будет соответствовать самой себе, и мы приходим к предыдущему случаю.

4°. Как было уже сказано в § 179, при проективном преобразовании пространства прямые переходят в прямые и плоскости — в плоскости. Легко видеть, что пучки плоскостей переходят в пучки плоскостей, связки прямых и плоскостей — в связки прямых и плоскостей.

Мы предоставляем читателю доказать, что образы первой и второй ступеней, соответствующие друг другу, проективны.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что если вершины A', B', C' основного координатного треугольника на плоскости П′ и единичная точка E' суть точки, соответствующие вершинам A, B, C координатного треугольника на плоскости П и единичной точке E, то формулы (4) и (4a) § 179 сводятся к таким:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'$$

(или, что сводится к тому же, $x_1 = \rho x_1'$, $x_2 = \rho x_2'$, $x_3 = \rho x_3'$, где ρ — произвольный множитель пропорциональности, отличный от нуля).

Доказательство непосредственно вытекает из геометрического значения проективных координат и из свойства двойного отношения оставаться неизменным при проективном преобразовании.

2. Доказать, что проективное соответствие между двумя плоскостями П и П′ вполне определено, если заданы четыре точки A', B', C', D' плоскости П, соответствующие четырем точкам A, B, C, D плоскости П; предполагается, что никакие три из точек A, B, C, D не коллинеарны.

Доказательство. Возьмем A, B, C в качестве вершин основного треугольника на П, а D — в качестве единичной точки; возьмем, далее, A', B', C' в качестве вершин основного треугольника на П′, а D' — в качестве единичной точки.

Тогда соответствие между П и П′ сводится к следующему:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3',$$

т. е. вполне определено.

3. Доказать предложения, аналогичные двум предыдущим, для случая пространства (во втором предложении, вместо четырех точек, будет теперь пять точек, из которых никакие четыре не компланарны).

§ 194. Корреляция

Выше мы рассмотрели тот вид проективного соответствия двух плоскостей, когда точкам соответствуют точки, а прямым — прямые. Рассмотрим еще один вид соответствия между плоскостями, тоже называемого проективным, при котором точкам соответствуют прямые, а прямым точки. Этот вид проективного соответствия, который будет сейчас точно определен, называется *корреляцией*, или *взаимностью*.

---

[1]) См. § 190, замечание.

А именно, корреляцией (взаимностью) называется соответствие, выражаемое формулами вида

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= l_{11}x_1' + l_{12}x_2' + l_{13}x_3', \\ a_2 &= l_{21}x_1' + l_{22}x_2' + l_{23}x_3', \\ a_3 &= l_{31}x_1' + l_{32}x_2' + l_{33}x_3', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a_1, a_2, a_3 — координаты прямой на плоскости П, а x_1', x_2', x_3' — координаты точки на П'; при этом предполагается, что подстановка (1) — неособенная. Решая (1) относительно x_1', x_2', x_3' получим

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= m_{11}a_1 + m_{12}a_2 + m_{13}a_3, \\ x_2' &= m_{21}a_1 + m_{22}a_2 + m_{23}a_3, \\ x_3' &= m_{31}a_1 + m_{32}a_2 + m_{33}a_3. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Подстановка (1) приводит в обратимо-однозначное соответствие каждой точке $M'(x_1', x_2', x_3')$ плоскости П' определенную прямую $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ плоскости П.

Легко видеть, что точкам M' плоскости П', расположенным на данной прямой Δ', соответствуют прямые плоскости П, проходящие через одну и ту же точку M. Действительно, пусть

$$a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3'x_3' = 0 \tag{2}$$

— уравнение прямой Δ', где a_1', a_2', a_3' — постоянные. Внося в него выражения (1a), получим линейное уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

связывающее переменные a_1, a_2, a_3, где через x_1, x_2, x_3 обозначены постоянные

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_{11}a_1' + m_{21}a_2' + m_{31}a_3', \\ x_2 &= m_{12}a_1' + m_{22}a_2' + m_{32}a_3', \\ x_3 &= m_{13}a_1' + m_{23}a_2' + m_{33}a_3'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Следовательно, прямые (a_1, a_2, a_3) все проходят через точку $M(x_1, x_2, x_3)$.

Таким образом, каждому прямолинейному ряду Δ' на П' соответствует пучок прямых на П, центр которого $M(x_1, x_2, x_3)$ определяется формулами (3). Короче, можно сказать, что каждой прямой Δ' на П' соответствует вполне определенная точка M на П.

Легко видеть, что прямолинейный ряд и соответствующий ему пучок проективны; доказательство мы предоставляем читателю.

Корреляции не образуют группы; действительно, легко видеть, что две корреляции, произведенные одна за другой, приводят к гомографии. Наоборот, *совокупность всех гомографий и корреляций*, очевидно, *составляет группу*, называемую *группой проективности*.

Корреляция в пространстве определяется совершенно аналогичным образом. Только роль прямых играют здесь плоскости, так что в пространстве, при корреляции, точкам соответствуют плоскости, и обратно.