ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

С алгебраической точки зрения наиболее простыми линиями после линий первого порядка (прямых) являются линии второго порядка. Мы увидим в дальнейшем, что всякая (действительная) линия второго порядка, если только она не распадается на совокупность двух прямых, есть либо *эллипс*, либо *гипербола*, либо *парабола*, определения которых будут даны в ближайших параграфах. Эти три линии носят также общее название *конических сечений*, ибо, как будет показано в § 201 и 202, они могут быть получены пересечением кругового конуса плоскостями.

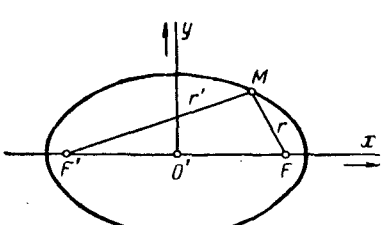
Мы начнем с простейших определений эллипса, гиперболы и параболы и вывода их простейших уравнений.

Во всей этой главе будет идти речь, если противное не оговорено особо, о линиях, расположенных в одной и той же плоскости.

I. НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 195. Определение эллипса и его нормальное уравнение

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная. Упомянутые в определении постоянные точки называются *фокусами* эллипса. Обозначим их через F и F', а расстояние между ними через $2c$. Наконец, пусть $2a$ обозначает положительную постоянную величину, которой должна равняться сумма расстояний точки M эллипса до фокусов (черт. 122).



Черт. 122

По определению имеем

$$r' + r = 2a, \qquad (1)$$

где

$$r' = |F'M|, \quad r = |FM|.$$

Ясно, что для возможности существования нашего геометрического места должно быть $2c \leqslant 2a$.

В случае, когда $2c = 2a$, наше геометрическое место, очевидно, есть отрезок прямой, заключенный между F' и F. Этот случай, как не представляющий интереса, мы исключим из рассмотрения и будем всегда считать, что $2c < 2a$, т. е.

$$c < a. \tag{2}$$

Если $c = 0$, то точки F' и F совпадают, и

$$|F'M| = |FM| = a.$$

В этом случае эллипс обращается в окружность радиуса a. Таким образом, окружность есть частный случай эллипса.

Возьмем начало прямоугольных координат в середине отрезка $F'F$ и направим ось Ox по этому отрезку так, чтобы точки F' и F имели, соответственно, координаты

$$(-c,\ 0),\ (+c,\ 0).$$

Расстояния r' и r точки $M(x, y)$ до этих точек будут даны формулами

$$r' = \sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad r = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{3}$$

На основании (1) имеем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{4}$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Его можно значительно упростить, избавившись от радикалов. Перенося с этой целью второй радикал направо и возводя обе части в квадрат, получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

откуда, перенося радикал в левую часть, а остальные члены в правую и произведя сокращения, будем иметь

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{5}$$

Возведя снова в квадрат, получим после очевидных упрощений

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Величина $a^2 - c^2$ положительна, ибо $c < a$. Вводя обозначение

$$b^2=a^2-c^2,\quad b=\sqrt{a^2-c^2}\ (b<a) \tag{6}$$

и разделяя обе части на a^2b^2, получим окончательно уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{7}$$

называемое *нормальным уравнением эллипса*.

Прежде чем приступить к изучению формы эллипса при помощи этого уравнения, укажем простой способ, дающий возможность

начертить эллипс непрерывным движением. Именно, можно с этой целью поступить так: закрепить концы нерастяжимой нити длины $2a$ в фокусах F', F и, натягивая эту нить острием карандаша, водить им по бумаге, заставляя его скользить вдоль нити. Тогда это остриё опишет эллипс, как следует из самого определения последнего.

Замечание. При выводе нормального уравнения эллипса нам пришлось уничтожить радикалы в уравнении (4); с этой целью мы дважды применяли операцию возведения в квадрат обеих частей уравнения. Как известно, такая операция может, вообще говоря, привести к уравнению, не эквивалентному исходному, а именно к уравнению, имеющему не только те решения, которые имеет исходное, но еще и другие, «лишние» решения. Поэтому возникает вопрос: не содержит ли кривая, выражаемая уравнением (7), таких точек, которые не удовлетворяют исходному уравнению (4), т. е. условию $r'+r=2a$. Легко показать, что это не так. Действительно, произведя операции преобразования в обратном порядке, увидим, что если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (7), то они удовлетворяют условию

$$\pm r' \pm r = 2a.$$

Покажем, что это последнее уравнение может быть удовлетворено (действительными точками) только тогда, когда берутся верхние знаки. Действительно, уравнение $-r'-r=2a$, очевидно, не имеет решений, ибо $r>0$, $r'>0$. Далее, по той же причине, уравнение $r'-r=2a$ не имеет решений, если $r'<r$. Это последнее уравнение не имеет решений и при $r'\geqslant r$, ибо, как известно, разность сторон треугольника всегда не превосходит третьей стороны, откуда следует

$$r'-r \leqslant 2c < 2a;$$

на том же основании и уравнение $r-r'=2a$ не имеет решений. Итак остается только одна возможность: $r'+r=2a$, и наше утверждение доказано

§ 196. Исследование формы эллипса

Нормальное уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

выведенное в предыдущем параграфе, показывает, что если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то ему же принадлежат и точки $M(x, -y)$, $M(-x, y)$, $M(-x, -y)$, ибо в уравнение (1) входят только квадраты величин x и y, благодаря чему замена знака одной из координат на обратный не нарушает равенства.

Это показывает, что оси Ox и Oy являются *осями симметрии* [1]) эллипса. Сокращенно эти прямые называются *осями эллипса*.

Из сказанного выше также очевидно, что эллипс симметричен относительно точки O, называемой поэтому его *центром*.

---

[1]) Данная геометрическая фигура называется *симметричной относительно некоторой плоскости* П, если каждой точке M фигуры можно сопоставить другую точку M' той же фигуры так, чтобы отрезок MM' был перпендикулярен к плоскости П и делился ею пополам. Фигура называется *симметричной относительно некоторой прямой* Δ, если каждой точке M фигуры можно сопоставить другую точку M' той же фигуры так, чтобы отре-

Легко видеть, что эллипс — кривая конечная. Действительно, из (1) следует, что

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

откуда

$$-a \leqslant x \leqslant +a, \quad -b \leqslant y \leqslant +b.$$

Эти неравенства показывают, что эллипс целиком заключен в прямоугольнике, изображенном на черт. 123, в котором

$$|OA'| = |OA| = a, \quad |OB'| = |OB| = b.$$

Изучим теперь более подробно форму кривой. Решая уравнение (1) относительно y, получим

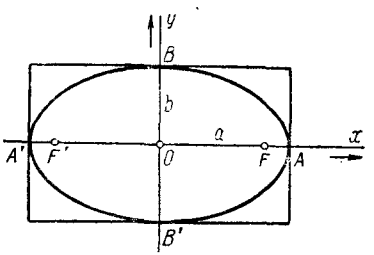
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

Ввиду симметрии кривой достаточно изучить часть ее, заключенную в квадранте $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Поэтому достаточно оставить только знак плюс перед радикалом, т. е. взять

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2a}$$

При $x = 0$ имеем $y = b$. При возрастании x ордината y убывает и при $x = a$ обращается в 0.

Мы получаем таким образом часть BA кривой; остальные части можно дополнить на основании симметрии.



Черт. 123

Мы видим, что эллипс есть замкнутая кривая.

Максимально удаленные от оси Ox точки суть B и B', расположенные на оси Oy (расстояние равно b). Максимально удаленные от оси Oy точки суть A и A', расположенные на оси Ox (расстояние равно a). Эти четыре точки A, A', B, B' называются *вершинами эллипса*.

Величина $2a$ называется *большой осью*, а $2b$ — *малой осью* эллипса [2]); величины a и b суть, соответственно, *большая и малая полуоси эллипса*.

лок MM' был перпендикулярен к Δ и, пересекая эту прямую, делился ею пополам. Наконец, фигура будет *симметричной относительно некоторой точки* C, если каждой точке M фигуры можно сопоставить другую точку M' той же фигуры так, чтобы отрезок MM' проходил через точку C и делился ею пополам. В первом случае Π называется *плоскостью симметрии*, во втором Λ — *осью симметрии*, а в третьем C — *центром симметрии*, или просто *центром*.

[2]) Отметим, что слово «ось» применяется в двояком значении: выше оно было применено в смысле «ось симметрии» и относилось к целой прямой, здесь же оно применяется в смысле длины отрезка оси симметрии, заключенного между двумя вершинами. Такая двойственность не может, конечно, вызвать недоразумения, ибо всегда ясно, о чем идет речь.

Если $a = b$, то уравнение эллипса принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

т. е. эллипс обращается в окружность радиуса a. В этом случае величина

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(расстояние фокусов до центра) обращается в нуль.

При $a \neq b$ величина c не равна нулю и ее можно рассматривать как меру отклонения эллипса от круговой формы. Она называется *линейным эксцентриситетом* эллипса. В сущности, на форму эллипса влияет не сама величина c, а ее отношение к одной из полуосей, например к большой полуоси a.

Это отношение

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{3}$$

называется *численным эксцентриситетом* (ибо оно — величина отвлеченная) или просто *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет эллипса всегда меньше 1, как показывает формула (3).

Если даны a и c, то этим эллипс вполне определен, так как малую полуось можно определить по формуле

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2},$$

откуда

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \tag{4}$$

Упражнения и дополнения

1. Найти полуоси a, b, линейный эксцентриситет c и численный эксцентриситет e эллипса $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Ответ

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{\sqrt{5}}{6}, \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. Эллипс как результат аффинного преобразования окружности. Показать, что эллипс можно рассматривать как результат аффинного преобразования окружности, состоящего из двух растяжений по двум взаимно перпендикулярным направлениям[1]) (см. § 76).

Доказательство. Возьмем начало прямоугольных координат в центре окружности. Тогда уравнением окружности будет

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где r — радиус окружности. Указанное выше аффинное преобразование имеет вид $x' = kx$, $y' = ly$, где k, l — постоянные. Подставляя в уравнение окружности значения $x = \frac{x'}{k}$, $y = \frac{y'}{l}$, получим уравнение кривой, в которую

[1]) Ниже (§ 234) будет показано, что при всяком аффинном преобразовании окружность обращается в эллипс (или остается окружностью).

обращается окружность:

$$\frac{x'^2}{k^2}+\frac{y'^2}{l^2}=r^2,$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

где $a=kr$, $b=lr$. Следовательно, кривая — эллипс.

3. Эллипс как проекция окружности. Показать, что эллипс с полуосями a, b можно рассматривать как прямоугольную проекцию окружности радиуса a на плоскость, составляющую с плоскостью эллипса угол α, где

$$\cos\alpha=\frac{b}{a}\quad\left(\text{т. е. } \alpha=\arccos\frac{b}{a}\right).$$

Доказательство. Пусть Π' — плоскость круга, а Π — плоскость проекций. Пусть $O'x'y'$ — прямоугольная система осей на плоскости Π', выбранная так, чтобы ось $O'x'$ была параллельна плоскости Π, а начало координат O' совпадало с центром проектируемой окружности. Пусть Oxy — (также прямоугольная) система осей на плоскости Π, являющаяся проекцией системы $O'x'y'$.

Если $M'(x', y')$ — какая-либо точка проектируемой окружности, то координаты x, y ее проекции M на плоскость Π будут, очевидно, $x=x'$, $y=y'\cos\alpha$. Но так как

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1,$$

то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha}=1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

откуда и следует наше утверждение.

§ 197. Определение гиперболы и ее нормальное уравнение

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная (по абсолютной величине). Обозначим заданные точки, называемые *фокусами* гиперболы, через F и F', расстояние между ними — через $2c$, а абсолютное значение разности расстояний точек гиперболы до фокусов через $2a$. Ясно, что должно быть соблюдено условие: $2c \geqslant 2a$. Если $2c = 2a$, то, очевидно, наше геометрическое место будет состоять из точек прямой, проходящей через F и F', расположенных вне отрезка FF'. Этот случай мы исключим из рассмотрения и будем всегда считать, что $c > a$.

По определению имеем (черт. 124):

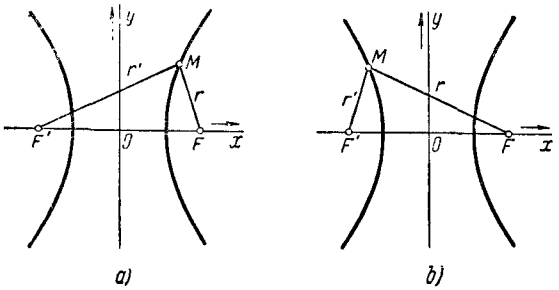
$$r'-r=\pm 2a, \tag{1}$$

где $r' = |F'M|$, $r = |FM|$; знак плюс в правой части берется, когда $r' > r$ (черт. 124, *a*), знак же минус — когда $r' < r$ (черт. 124, *b*).

Из самого определения гиперболы очевидно, что кривая эта состоит из двух отдельных ветвей, на одной из которых $r' > r$, а на другой $r' < r$.

Это следует также из уравнения гиперболы, которое мы сейчас выведем.

Направим ось Ox по прямой, соединяющей фокусы, и возьмем начало прямоугольных координат посредине между ними, так,



Черт. 124

чтобы точки F' и F имели соответственно координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad (2)$$

Перенеся второй радикал в правую часть равенства и возведя обе части в квадрат, будем после очевидных приведений иметь (сравн. § 195)

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2. \qquad (3)$$

Возведя еще раз обе части в квадрат и делая простые приведения, получим уравнение

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2\,(a^2-c^2),$$

совершенно такое же, как и в случае эллипса, с той только разницей, что теперь $a < c$. Вводя обозначение

$$b^2=c^2-a^2,\ b=\sqrt{c^2-a^2} \qquad (4)$$

и разделяя обе части на величину $a^2\,(a^2-c^2)=-a^2b^2$, получим окончательно

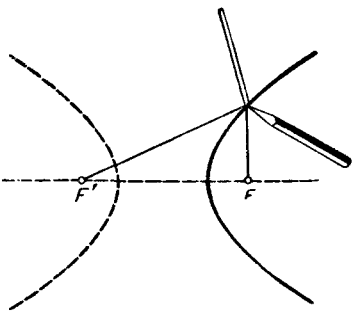
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (5)$$

Это и есть уравнение гиперболы, называемое *нормальным* [1]).

[1]) Предоставляем читателю показать, что преобразование уравнения (2) в уравнение (4) не вводит никаких лишних точек. Сравн. замечание в конце § 195.

Определение гиперболы дает нам простой способ построения ее непрерывным движением: возьмем две нити, разность длин которых равна $2a$, и прикрепим по одному концу этих нитей к точкам F' и F. Если держать рукой два других конца соединенными вместе и водить вдоль нитей острием карандаша, заботясь о том, чтобы нити были прижаты к бумаге, натянуты и соприкасались, начиная от чертящего острия до места соединения концов, то острие начертит часть одной из ветвей гиперболы (тем бо́льшую, чем длиннее взяты нити) (черт. 125).

Поменяв ролями точки F' и F, получим часть другой ветви.



Черт. 125

§ 198. Исследование формы гиперболы. Асимптоты

Так же, как в случае эллипса, легко убеждаемся, что оси Ox, Oy являются осями симметрии гиперболы; они также называются ее *осями*; гипербола также симметрична относительно точки O, которая поэтому называется её *центром*.

На основании сказанного достаточно изучить только ту часть гиперболы, для которой $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Решая уравнение (5) § 197 относительно y, получим

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (1)$$

Последняя формула показывает, что должно быть $x^2 \geqslant a$, т. е. $x \geqslant a$ или $x < -a$; иначе для y получилось бы мнимое выражение.

Таким образом, гипербола целиком расположена вне полосы, заключенной между прямыми $x = -a$ и $x = +a$.

Рассмотрим теперь ту часть гиперболы, где $y \geqslant 0$, $x \geqslant a$. Тогда

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

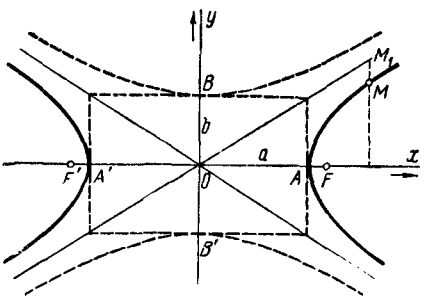
При $x = a$ имеем $y = 0$. При возрастании x от a до ∞ y также возрастает от 0 до ∞. Таким образом, рассматриваемая часть простирается до бесконечности; остальные части получим, пользуясь симметрией относительно осей Ox и Oy (черт. 126).

Точки пересечения A и A' гиперболы с осью Ox называются *вершинами* ее, величина $AA' = 2a$ называется *продольной осью* гиперболы, а величина $2b$ — *поперечной осью* (геометрический смысл этой последней величины будет выяснен ниже).

Величины a и b называются, соответственно, *продольной и поперечной полуосями*.

Часто также величину $2a$ называют *действительной* осью гиперболы, а величину $2b$ — *мнимой* осью (a и b, в соответствии с этим, называют действительной и мнимой полуосями).

Название «мнимая ось» происходит от того, что если мы будем искать точки пересечения гиперболы с осью Oy, то, полагая в (1) $x = 0$, получим $y = \pm ib$. Таким образом, можно сказать, что величина отрезка оси Oy, заключенного между (мнимыми) точками пересечения гиперболы с осью Oy, равна $2ib$; последнюю величину и следовало бы называть мнимой осью. Однако, как было уже сказано, мнимой осью обычно называют величину $2b$.



Черт. 126

Величина $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *линейным эксцентриситетом* гиперболы, а величина

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \qquad (2)$$

— *численным эксцентриситетом* или просто *эксцентриситетом*. Ясно, что эксцентриситет гиперболы всегда больше 1.

Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней* (равнобочной).

Более точное представление о форме удаленных частей гиперболы дают нам *асимптоты* ее, существование которых мы сейчас покажем.

Напомним, что асимптотой данной линии называется прямая (если такая прямая существует), обладающая тем свойством, что точка, удаляющаяся по этой прямой в бесконечность, беспредельно приближается к точкам данной линии.

Легко догадаться, что гипербола имеет две асимптоты. Действительно, если мы обратим внимание на уравнение (1), то увидим, что при больших значениях x мы сделаем только небольшую относительную ошибку, если под знаком радикала отбросим конечную величину a^2, т. е. вместо величины $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ возьмем величину

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2},$$

или

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (3)$$

Последнее уравнение определяет две прямые:

$$y = +\frac{b}{a} x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a} x,$$

или

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0. \tag{3a}$$

Покажем теперь, что эти прямые действительно являются асимптотами нашей гиперболы. Имея в виду симметрию кривой, достаточно рассмотреть только ту часть ее, для которой $x>0$, $y>0$. Пусть $M(x, y)$ — какая-либо точка этой части, а $M_1(x, y_1)$ — точка прямой $y_1=+\frac{b}{a}x$, имеющая ту же абсциссу (черт. 126). Имеем

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad y_1=\frac{b}{a}x,$$

откуда

$$MM_1=y_1-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})>0.$$

Далее имеем

$$\lim_{x\to\infty}(y_1-y)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})=$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})(x-\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0,$$

ибо числитель последней дроби — величина конечная, а знаменатель стремится к ∞.

Мы видим, таким образом, что $MM_1\to 0$, а это и доказывает, что наша прямая является асимптотой.

На основании симметрии заключаем, что прямые (3) являются асимптотами обеих ветвей гиперболы, которые расположены в вертикальных углах между этими прямыми, заключающих ось Ox.

Угловые коэффициенты асимптот равны, соответственно, $+\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$. Если гипербола — равносторонняя (т. е. $a=b$), то асимптоты взаимно перпендикулярны (и обратно).

Очень часто бывает полезно, наряду с данной гиперболой, рассматривать гиперболу, определяемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \tag{4}$$

или

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Последнее уравнение показывает, что мы имеем дело действительно с гиперболой, ибо оно может быть получено из уравнения данной гиперболы, если поменять ролями оси Ox и Oy и вели-

чины a, b. Эта гипербола, как легко видеть, имеет те же асимптоты, что и данная, но расположена в других углах между ними (черт. 126, пунктир). Она называется гиперболой, *сопряженной* с данной.

Поперечная («мнимая») ось данной гиперболы может быть определена как продольная («действительная») ось гиперболы, сопряженной с ней.

Упражнения

1. Найти полуоси a, b, линейный эксцентриситет c и численный эксцентриситет e гиперболы

$$x^2-2y^2=5.$$

Ответ.

$$a=\sqrt{5},\quad b=\sqrt{\frac{5}{2}},\quad c=\sqrt{\frac{15}{2}},\quad e=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Найти уравнение асимптот гиперболы

$$2x^2-3y^2=3.$$

Ответ.

$$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0.$$

§ 199. Свойства фокальных расстояний. Директрисы эллипса и гиперболы. Новое определение этих линий

Прежде чем перейти к определению параболы, выведем еще одно свойство, общее эллипсу и гиперболе; свойство это послужит нам исходным пунктом для определения параболы.

В § 195 мы получили формулу (5), которую теперь напишем так:

$$ar=a^2-cx,$$

или

$$r=a-ex, \tag{1}$$

где r обозначает расстояние точки (x, y) эллипса до фокуса F $(c, 0)$, который будем называть для краткости «правым». Аналогичную формулу получим для расстояния r' точки (x, y) до «левого» фокуса F' $(-c, 0)$. Действительно, по определению эллипса $r'+r=2a$, откуда $r'=2a-r$, т. е.

$$r'=a+ex. \tag{1a}$$

В случае гиперболы, мы имели в § 197 формулу (3), которую теперь напишем так (разделив на $\pm a$):

$$r=\pm(ex-a), \tag{2}$$

где r обозначает расстояние точки (x, y) гиперболы до правого фокуса; при этом для правой ветви надо брать знак плюс, а для левой — знак минус.

Расстояние до левого фокуса можно получить на основании формулы $r' - r = \pm 2a$ (знаки плюс и минус берутся по только что указанному правилу); эта формула дает

$$r' = r \pm 2a = \pm ex \mp a \pm 2a,$$

т. е.

$$r' = \pm (ex + a). \tag{2a}$$

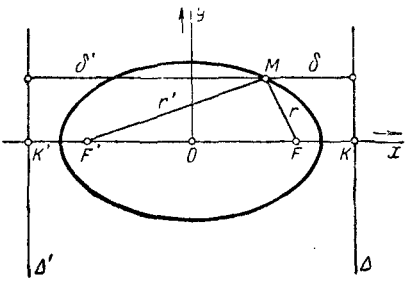
В этой формуле, как и в (2), знак плюс берется для правой ветви, а знак минус для левой.

Формулы (1) — (2a) доказывают следующее свойство фокусов рассматриваемых кривых: *расстояния точек этих кривых до их фокусов могут быть выражены в виде линейных функций декартовых координат* [1]).

Выведенные формулы имеют весьма простое геометрическое значение, к выяснению которого сейчас и перейдем.

Перепишем формулу (1), относящуюся к эллипсу, таким образом:

$$r = e\left(\frac{a}{e} - x\right). \tag{3}$$



Черт. 127

Величина $\delta = \frac{a}{e} - x$ очевидно представляет собою расстояние точки $M(x, y)$ эллипса до прямой Δ, параллельной оси Oy и отстоящей от нее на расстояние $\frac{a}{e}$ $\left(\text{так что абсцисса точки } K \text{ пересечения прямой } \Delta \text{ с осью } Ox \text{ равна} + \frac{a}{e}\right)$. Прямая Δ, очевидно, расположена вне эллипса, ибо $e < 1$, а потому $\frac{a}{e} > a$ (черт. 127).

Формула (3) может быть переписана теперь так:

$$r = e\delta \quad \text{или} \quad \frac{r}{\delta} = e. \tag{4}$$

На основании симметрии заключаем, что и другая прямая Δ', соответствующая фокусу F', также параллельная оси Oy и пересекающая ось Ox в точке K' с абсциссой $-\frac{a}{e}$, обладает тем свойством, что

$$r' = e\delta' \quad \text{или} \quad \frac{r'}{\delta'} = e, \tag{4a}$$

[1]) При данном выборе системы координат расстояния эти являются функциями только координаты x.

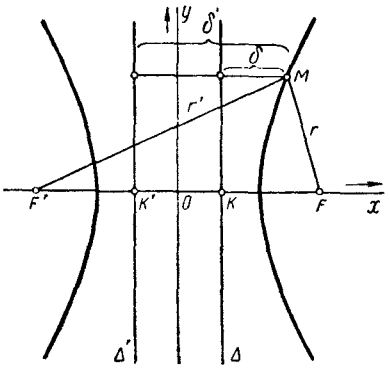
где r' и δ' обозначают соответственно расстояния точки M до фокуса F' и прямой Δ'.

Прямые Δ и Δ' называются *директрисами* эллипса, соответствующими фокусам F и F'.

Прямые эти, на основании (4) и (4а), обладают следующим свойством:

Отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и до соответствующей директрисы есть величина постоянная (*равная эксцентриситету*).

Таким же точно образом легко видеть, на основании формул (2) и (2а), что фокусам F и F' гиперболы соответствуют прямые Δ и Δ', называемые *директрисами*, параллельные оси Oy, пересекающие ось Ox соответственно в точках $x = +\frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ и обладающие тем свойством, что *отношение расстояний точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная* (*равная эксцентриситету*).



Черт. 128

Так как в нашем случае $e > 1$, $\frac{a}{e} < a$, то директрисы гиперболы расположены между ее ветвями (черт. 128).

Легко показать, что указанное свойство является характерным для эллипса и гиперболы, т. е. что геометрическое место точек, отношение расстояний которых до данной точки F и до данной прямой Δ есть величина постоянная, отличная от 1, представляет собою эллипс или гиперболу. Именно, если e обозначает упомянутое постоянное отношение, то при $e < 1$ будем иметь эллипс, а при $e > 1$ — гиперболу.

Действительно, выберем оси прямоугольных координат так, чтобы ось Oy была параллельна прямой Δ, а ось Ox проходила через точку F. Начало координат выберем так, чтобы точка F и точка пересечения K прямой Δ с осью Ox имели бы, соответственно, следующие абсциссы:

$$OF = ae, \quad OK = \frac{a}{e},$$

где a — некоторое положительное число, которое мы должны определить из следующего условия: если l есть расстояние F до Δ (эту величину, так же как и величину e, нужно считать заданной), то

$$l = |FK| = \left|\frac{a}{e} - ae\right| = \frac{a\,|1-e^2|}{e},$$

откуда

$$a = \frac{el}{|1-e^2|}. \tag{5}$$

Если $M(x, y)$ обозначает какую-либо точку нашего геометрического места, то, по условию, должно быть $r = e\delta$, где

$$r = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2}$$

и

$$\delta = \left|\frac{a}{e} - x\right|.$$

Значит,

$$\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = \left|\frac{a}{e} - x\right| e.$$

Возводя обе части в квадрат, получим

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$

или, после очевидных приведений:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

Если $e < 1$, то, полагая $a^2(1-e^2) = b^2$, получим уравнение эллипса, если же $e > 1$ что, полагая $a^2(e^2-1) = b^2$, получим уравнение гиперболы.

При $e = 1$ координатные оси не могут быть выбраны указанным способом, ибо по формуле (5) мы в этом случае получили бы $a = \infty$. Мы увидим, что при $e = 1$ получается линия — парабола, отличная от эллипса и гиперболы.

§ 200. Определение параболы и ее нормальное уравнение

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой).

Таким образом, парабола занимает промежуточное место между эллипсом и гиперболой, в том смысле, что все три кривые могут быть определены свойством (см. § 199)

$$r = e\delta, \tag{1}$$

где r — расстояние точки кривой до фокуса, δ — расстояние до соответствующей директрисы, а e — постоянная величина. Именно, при $e < 1$ имеем эллипс, при $e = 1$ — параболу, а при $e > 1$ — гиперболу.

Выведем теперь уравнение параболы. Пусть Δ — директриса, а F — фокус параболы. Обозначим через p расстояние фокуса до директрисы. Проведем ось Ox через фокус и направим ее перпен-

дикулярно к директрисе. Начало прямоугольных координат возьмем посередине расстояния между фокусом и директрисой, так чтобы координаты фокуса F были $\left(+\frac{p}{2}, 0\right)$, а координаты точки K пересечения директрисы Δ с осью Ox были $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

По определению

$$r = \delta, \tag{2}$$

где

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \delta = x + \frac{p}{2}.$$

Следовательно, уравнение параболы будет

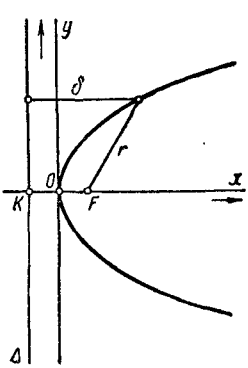
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

или, после возведения в квадрат и очевидных упрощений:

$$y^2 = 2px. \tag{3}$$

Это и есть простейшее уравнение параболы, называемое *нормальным*.

Мы видим, что парабола расположена целиком справа от оси Oy (ибо, очевидно, должно быть $x \geqslant 0$). При $x = 0$ имеем $y = 0$, т. е. парабола проходит через начало координат. При возрастании x оба соответствующих значения $y = \pm\sqrt{2px}$ также беспредельно возрастают, и кривая имеет вид, указанный на черт 129.



Черт. 129

Ось Ox является, очевидно, осью симметрии параболы, и поэтому называется ее *осью*; точка O есть *вершина* параболы; величина p называется *параметром* параболы.

Непосредственно очевидно, что парабола, в отличие от эллипса и гиперболы, *не имеет центра*. Также в отличие от этих кривых она имеет только один фокус и одну директрису.

Далее, легко убедиться, что парабола *не имеет асимптот*. Действительно, непосредственно ясно, что асимптота не может быть параллельна ни оси Oy, ни оси Ox, так что, если асимптота существует, то ее уравнение имеет вид

$$y = ax + b,$$

где a и b — постоянные, причем $a \neq 0$. Для точки, удаляющейся по этой прямой в бесконечность, будем иметь

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(a + \frac{b}{x}\right) = a.$$

Если эта прямая есть асимптота параболы, то для точки параболы (x, y_1), с той же абсциссой, что и у точки (x, y), мы бы имели, по определению асимптоты,

$$\lim_{x\to\infty} (y_1 - y) = 0,$$

откуда следовало бы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = a.$$

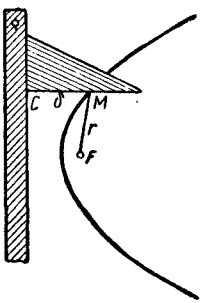
Но для точек параболы $y_1 = \pm\sqrt{2px}$, откуда

$$\frac{y_1}{x} = \pm\frac{\sqrt{2px}}{x} = \pm\frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}$$

и, значит,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_1}{x} = 0,$$

что противоречит предыдущему.



Черт. 130

Укажем, наконец, простой прием, с помощью которого можно начертить параболу непрерывным движением.

Укрепим линейку так, чтобы ее край совместился с директрисой; приставим к этой линейке один из катетов угольника; к какой-либо точке другого катета прикрепим нить такой длины, чтобы при натяжении вдоль этого катета она кончалась в вершине C прямого угла; наконец, закрепим второй конец нити в фокусе (черт. 130). Если теперь вести угольник по линейке и вместе с тем натягивать нить острием M карандаша, прижимая ее к свободному катету, то острие это опишет часть параболы (тем бо́льшую, чем длиннее свободный катет и нить).

Действительно, очевидно, что все время будет

$$|MF| = |MC|.$$

Упражнения и дополнения

1. Показать, что кривая $y^2 = 3x + 4$ есть парабола, и найти ее параметр и положение вершины. (Указание: следует перенести начало координат по оси Ox в такую точку, чтобы исчез свободный член.)

Ответ. $p = \frac{3}{2}$. Вершина расположена в точке $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

2. Показать, что кривая $y = ax^2 + 2bx + c$ $(a \neq 0)$ есть парабола, ось которой параллельна оси Oy.

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде

$$y = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$$

или

$$y - \beta = a(x - \alpha)^2,$$

где

$$\beta = c - \frac{b^2}{a}, \quad \alpha = -\frac{b}{a}.$$

Если взять новую систему $O'x'y'$, оси которой параллельны старым, а начало находится в $O'(\alpha, \beta)$, то предыдущее уравнение примет (в новых координатах) вид

$$y' = ax'^2 \quad \text{или} \quad x'^2 = \frac{1}{a}y'.$$

Если $a > 0$, то, полагая $\frac{1}{a} = 2p$, получим уравнение $x'^2 = 2py'$. Это есть, очевидно, уравнение параболы с параметром p, ось которой направлена по $O'y'$. Если $a < 0$, то, полагая $\frac{1}{a} = -2p$, получим $x'^2 = -2py'$. Меняя направление оси Oy' на обратное, т. е. заменяя y' на $-y'$, получим опять уравнение параболы с параметром p, ось которой направлена по новой оси $O'y'$ (парабола эта будет обращена выпуклостью туда, куда направлена старая ось Oy). Значит, в обоих случаях получаем параболу с параметром

$$p = \frac{1}{2|a|}.$$

3. Доказать следующее предложение: если расстояние переменной точки $M(x, y)$ некоторой линии до некоторой постоянной точки $F(a, b)$ может быть представлено как значение (взятое со знаком $+$ или $-$) некоторой линейной функции декартовых координат точки M, то эта линия есть либо эллипс, либо гипербола, либо парабола (либо представляет собою часть одной из этих кривых).

Доказательство. Пусть $r = |FM|$. По условию имеем

$$r = \pm(Ax + By + C), \qquad (*)$$

где A, B, C — постоянные. Рассмотрим прямую

$$Ax + By + C = 0.$$

Будем считать координаты прямоугольными, что, очевидно, не нарушает общности. Расстояние δ точки M до прямой дается, как известно, формулой

$$\delta = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

откуда

$$\pm(Ax + By + C) = \delta\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Поэтому будем иметь, на основании (*):

$$r = e\delta,$$

где

$$e = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Отсюда ясно, что точка M принадлежит гиперболе, если $e>1$, параболе, если $e=1$, и эллипсу, если $e<1$.

4. Общее определение фокусов и разыскание их. Примем следующее определение фокуса кривой второго порядка: фокус F кривой — это такая точка, что отношение расстояний любой точки кривой до F и до некоторой постоянной прямой Δ есть величина постоянная. Найдем, исходя из этого определения, все фокусы эллипса, гиперболы и параболы. Начнем с эллипса, заданного (в прямоугольных координатах) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a\geqslant b). \tag{**}$$

Пусть $F(\alpha, \beta)$ — искомый фокус и пусть уравнение прямой Δ имеет вид $A'x+B'y+C'=0$. Имеем, по определению: $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm k(A'x+B'y+C')$, где k — постоянный множитель. Обозначая kA', kB', kC' через A, B, C, будем иметь

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(Ax+By+C)^2$$

или по раскрытии скобок

$$(1-A^2)x^2+(1-B^2)y^2-2ABxy-2(\alpha+AC)x-$$
$$-2(\beta+BC)y=C^2-\alpha^2-\beta^2. \tag{***}$$

Это уравнение должно удовлетворяться теми же значениями (x, y), что и уравнение (**); отсюда заключаем, что коэффициенты этих уравнений должны быть пропорциональны. Значит, должно быть

$$AB=0, \quad \alpha+AC=0, \quad \beta+BC=0,$$
$$(1-A^2)a^2=(1-B^2)b^2=C^2-\alpha^2-\beta^2.$$

Первое из этих уравнений показывает, что либо $A=0$, либо $B=0$. Пусть сперва $B=0$. Тогда $\beta=0$. Из предыдущих уравнений легко получаем

$$A=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\pm e, \quad C=\pm a, \quad \alpha=\pm ae=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

Мы получили фокусы, известные нам раньше, расположенные на большой оси.

Рассмотрим теперь случай $A=0$. Совершенно аналогично предыдущему получим

$$\alpha=0, \quad \beta=\pm i\sqrt{a^2-b^2}.$$

Таким образом, если ограничиться рассмотрением действительных элементов, случай $A=0$ следует отбросить. Однако целесообразно говорить, что этому случаю соответствуют два мнимых фокуса, «расположенных» на малой оси. Итак, эллипс имеет четыре фокуса, но только два из них — действительные.

Предоставляем читателю доказать, что и гипербола имеет четыре фокуса два из которых — действительные (известные нам раньше).

В случае параболы, сравнивая уравнение (***) с уравнением

$$y^2-2px=0,$$

заключаем

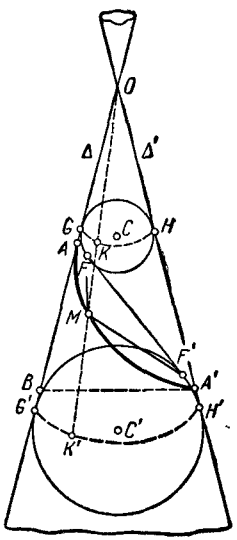
$$1-A^2=0, \quad AB=0, \quad \beta+BC=0,$$
$$C^2-\alpha^2-\beta^2=0, \quad 1-B^2=\frac{\alpha+AC}{p}.$$

Первое из этих равенств дает $A=\pm 1$; из второго заключаем, что $B=0$; значит, в силу третьего равенства, $\beta=0$. Наконец, два последних равенства дают $\alpha=p\pm C$ и $\alpha^2=C^2$. Это возможно только при $\alpha=\frac{p}{2}$, $\pm C=-\frac{p}{2}$. Следовательно, мы получаем (уже известный нам) один фокус.

II. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА КАК КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

§ 201. Пересечение прямого кругового конуса с плоскостью

Мы уже упоминали о том, что эллипс, гипербола и парабола представляют собою линии пересечения кругового конуса с плоскостями. Под круговым конусом мы разумеем здесь прямой круговой конус, представляющий собою геометрическое место прямых, проходящих через данную точку (вершину) и данную окружность, плоскость которой перпендикулярна к прямой, соединяющей ее центр с вершиной (эта прямая называется осью конуса). В элементарной геометрии рассматривается обычно только часть конуса, заключенная между вершиной и направляющей окружностью, здесь же мы рассматриваем весь конус, простирающийся в бесконечности по обе стороны от вершины. Мы видели в главе V, что прямой круговой конус есть поверхность второго порядка[1]).



Черт. 131

Рассмотрим пересечение конуса какой-нибудь плоскостью П (плоскость, проходящая через A, M и A' на черт. 131), не проходящей через вершину. Проведем через ось конуса плоскость, перпендикулярную к секущей плоскости (плоскость чертежа). Эта последняя плоскость пересечет конус по двум образующим Δ и Δ', а плоскость П — по некоторой прямой AA'.

Рассмотрим отдельно три случая.

1. *Пусть плоскость* П *пересекает только одну полу конуса, не будучи параллельна ни одной из образующих* (черт. 131). Тогда точки пересечения A и A' прямой AA' с образующими находятся по одну и ту же сторону от вершины O. Построим, далее, окружности, находящиеся внутри конуса и касающиеся образующих OA, OA' и прямой AA'. Таких окружностей будет две: одна, вписанная в треугольник OAA', а другая, «вневписанная», находящаяся вне треугольника OAA', внутри конуса. Центры C и C' этих окружностей находятся, очевидно, на оси конуса. Пусть F и F' — точки касания этих окружностей с прямой AA'. Если вращать эти окружности вокруг оси конуса, то они опишут две сферы, касающиеся конуса вдоль окружностей GH и $G'H'$, плоскости которых перпендикулярны к оси (G, H, G', H' обозначают в то же время точки касания сфер с образующими OA, OA').

---

[1]) Наклонный круговой конус есть так же, как мы увидим ниже, поверхность второго порядка, и его сечения плоскостями не отличаются от сечений прямого кругового конуса.