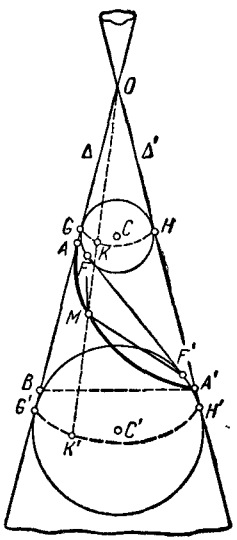
Первое из этих равенств дает $A=\pm 1$; из второго заключаем, что $B=0$; значит, в силу третьего равенства, $\beta=0$. Наконец, два последних равенства дают $\alpha=p\pm C$ и $\alpha^2=C^2$. Это возможно только при $\alpha=\frac{p}{2}$, $\pm C=-\frac{p}{2}$. Следовательно, мы получаем (уже известный нам) один фокус.

II. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА КАК КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

§ 201. Пересечение прямого кругового конуса с плоскостью

Мы уже упоминали о том, что эллипс, гипербола и парабола представляют собою линии пересечения кругового конуса с плоскостями. Под круговым конусом мы разумеем здесь прямой круговой конус, представляющий собою геометрическое место прямых, проходящих через данную точку (вершину) и данную окружность, плоскость которой перпендикулярна к прямой, соединяющей ее центр с вершиной (эта прямая называется осью конуса). В элементарной геометрии рассматривается обычно только часть конуса, заключенная между вершиной и направляющей окружностью, здесь же мы рассматриваем весь конус, простирающийся в бесконечности по обе стороны от вершины. Мы видели в главе V, что прямой круговой конус есть поверхность второго порядка[1]).



Черт. 131

Рассмотрим пересечение конуса какой-нибудь плоскостью П (плоскость, проходящая через A, M и A' на черт. 131), не проходящей через вершину. Проведем через ось конуса плоскость, перпендикулярную к секущей плоскости (плоскость чертежа). Эта последняя плоскость пересечет конус по двум образующим Δ и Δ', а плоскость П — по некоторой прямой AA'.

Рассмотрим отдельно три случая.

1. *Пусть плоскость* П *пересекает только одну полу конуса, не будучи параллельна ни одной из образующих* (черт. 131). Тогда точки пересечения A и A' прямой AA' с образующими находятся по одну и ту же сторону от вершины O. Построим, далее, окружности, находящиеся внутри конуса и касающиеся образующих OA, OA' и прямой AA'. Таких окружностей будет две: одна, вписанная в треугольник OAA', а другая, «вневписанная», находящаяся вне треугольника OAA', внутри конуса. Центры C и C' этих окружностей находятся, очевидно, на оси конуса. Пусть F и F' — точки касания этих окружностей с прямой AA'. Если вращать эти окружности вокруг оси конуса, то они опишут две сферы, касающиеся конуса вдоль окружностей GH и $G'H'$, плоскости которых перпендикулярны к оси (G, H, G', H' обозначают в то же время точки касания сфер с образующими OA, OA').

---

[1]) Наклонный круговой конус есть так же, как мы увидим ниже, поверхность второго порядка, и его сечения плоскостями не отличаются от сечений прямого кругового конуса.

Сферы эти касаются плоскости П в точках F и F'.

Пусть теперь M есть точка линии пересечения плоскости П с конусом. Проведем через эту точку образующую конуса, которая пересечет окружности GH и $G'H'$ в точках K и K'. Очевидно, что длина $|KK'|=|GG'|=|HH'|$ не зависит от положения точки M на линии пересечения.

Далее, очевидно, что $|MF|=|MK|$, ибо MF и MK суть две касательные, проведенные из точки M к первой сфере; точно так же очевидно, что $|MF'|=|MK'|$.

Поэтому $|MF|+|MF'|=|MK|+|MK'|=|KK'|$, т. е. сумма расстояний точки M до точек F и F' есть величина постоянная. Таким образом, наша линия есть эллипс с фокусами F и F' и большою осью $2a=|KK'|$.

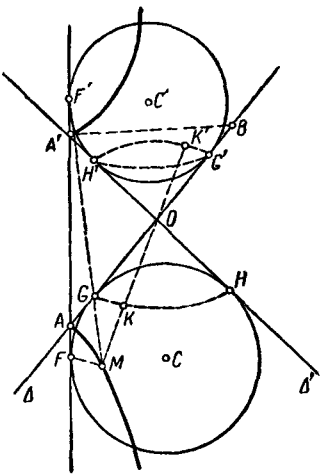
Если из точки A' провести прямую, параллельную прямой GH, и если B есть точка ее пересечения с образующей OA, то длина отрезка AB этой образующей равна фокальному расстоянию $|FF'|$. Действительно, длина $|FF'|$ получается из большой оси $|AA'|$ вычитанием длин $|AF|$ и $|A'F'|$. С другой стороны,

$$|AA'|=2a=|GG'|, \quad |AF|=|AG|,$$

$$|A'F'|=|A'H'|=|BG'|,$$

и, значит, то же фокальное расстояние равно

$$|GG'|-|AG|-|BG'|=|AB|.$$



Черт. 132

Читателю предоставляется доказать, что прямые D и D' (не изображенные на чертеже), по которым плоскость П пересекает плоскости окружностей GH и $G'H'$, суть директрисы эллипса.

2. Рассмотрим теперь случай, когда *плоскость* П *пересекает обе полы конуса* (черт. 132), так что точки A и A' лежат на разных полах конуса.

В этом случае плоскость П параллельна двум образующим конуса, которые получим, если пересечем конус плоскостью, параллельной П и проходящей через вершину.

Проведем снова две окружности, находящиеся внутри конуса и касающиеся образующих OA, OA' и прямой AA'. Пусть F и F' — точки касания с прямой AA'.

Центры C и C' этих окружностей находятся на оси конуса.

Если вращать окружности вокруг оси конуса, то получим две сферы, касающиеся плоскости П в точках F и F', а конуса — вдоль окружностей GH и $G'H'$, плоскости которых перпендикулярны к оси (G, H, G', H' обозначают на чертеже в то же время точки касания сфер с образующими OA и OA').

Линия пересечения плоскости П с конусом состоит, очевидно, из двух раздельных ветвей, расположенных на разных его полах. Пусть M — любая точка этой линии. Проведем образующую конуса через эту точку. Она пересечет окружности GH и $G'H'$ в точках K и K', причем длина $|KK'|=|GG'|=|HH'|$ есть, очевидно, величина постоянная, не зависящая от положения точки M.

Имеем

$$|MF|=|MK|, \quad |MF'|=|MK'|,$$

а потому

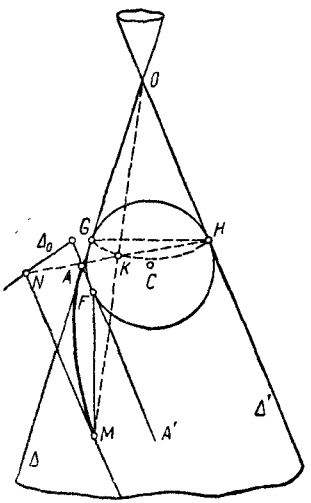
$$|MF'|-|MF|=|MK'|-|MK|=|KK'|.$$

Мы взяли точку M на той поле, где расположена точка A; если бы мы взяли M на другой поле, то получили бы

$$|MF|-|MF'|=|KK'|.$$

Итак, разность расстояний точки M до точек F и F' есть величина постоянная. Значит, наша линия — гипербола. Продольная ось $|AA'|=2a$ этой гиперболы равна, как видно из предыдущих формул, величине $|KK'|=|GG'|=|HH'|$.

Если из A' провести прямую $A'B$, параллельную GH, до пересечения с образующей OA в точке B, то длина отрезка AB этой образующей равна фокальному расстоянию $|FF'|$. Доказательство совершенно аналогично доказательству для случая эллипса.



Черт. 133

Предоставляем читателю доказать, что прямые пересечения плоскостей окружностей GH и $G'H'$ с плоскостью П (не изображенные на чертеже) суть директрисы нашей гиперболы.

3. Пусть *плоскость* П *пересекает только одну полу, будучи параллельна одной из образующих*, например, Δ'. Тогда прямая AA' пересечет только образующую Δ в некоторой точке A (черт. 133).

Проведем окружность, находящуюся внутри конуса и касающуюся прямых Δ, Δ', AA'. Пусть G, H, F суть соответствующие точки касания. Центр C окружности находится на оси конуса.

Вращая окружность вокруг этой оси, получим сферу, касающуюся конуса вдоль окружности GH, плоскость которой перпендикулярна к оси. Пусть Δ_0 есть прямая пересечения плоскости П с плоскостью окружности GH.

Линия пересечения плоскости П с конусом простирается, очевидно, в бесконечность и состоит из одной ветви. Пусть M — любая точка этой линии. Проведем через M образующую конуса (она пересечет окружность GH в некоторой точке K), и, кроме того, опустим из M перпендикуляр MN на прямую Δ_0. Прямая MN параллельна AA', поэтому она параллельна также и образующей Δ'. Значит, прямые MN, Δ' находятся в одной плоскости, и в той же плоскости будет находиться образующая OM. Поэтому точки N, K, H расположены на одной и той же прямой пересечения только что упомянутой плоскости и плоскости окружности GH.

Ясно, что треугольники KNM и KHO подобны и, так как $|OK|=|OH|$, то $|MN|=|MK|$, и, значит, $|MN|=|MF|$. Таким образом, расстояния точки M до точки F и прямой Δ_0 равны между собою; это показывает, что наша линия есть парабола с фокусом F и директрисой Δ_0.

Эллипс, гипербола и парабола как линии пересечения кругового конуса с плоскостями были известны еще древним грекам. Аполлонию принадлежит трактат о конических сечениях (около 225 г. до нашей эры), в котором изложены основные свойств этих линий, известные до него, а также свойства, открытые им самим.

Изложенные в этом параграфе способ построения фокусов и директрис и доказательство свойств конических сечений по отношению к фокусам и директрисам даны в 1822 г. Данделеном (Dandelin). Мы воспроизвели здесь (с некоторыми незначительными изменениями) изложение, данное в известном курсе Briot et Bouquet.

§ 202. Получение данного конического сечения из данного конуса

Нетрудно показать, что любой эллипс и любая парабола могут быть получены как пересечение любого данного конуса подходящей плоскостью. В случае же гиперболы существует некоторое ограничение, которое будет указано ниже.

Начнем со случая эллипса. Будем считать заданными большую ось $2a$ его и фокальное расстояние $2c < 2a$. Пользуясь обозначениями предыдущего параграфа, мы видим, что в треугольнике $AA'B$ черт. 131 нам известны стороны $|AB| = 2c$, $|AA'| = 2a$ и угол ABA', равный $\frac{\pi}{2} - \alpha$, где α — острый угол, составляемый образующими конуса с его осью. Такой треугольник всегда можно построить. Действительно, проведем из любой точки B плоскости чертежа полупрямую BA' и отрезок BA, длины $2c$, составляющий угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$ с BA'; наконец, опишем из A радиусом, равным $2a$, окружность, которая непременно пересечет полупрямую в некоторой точке A' (ибо, по условию, $2a > |BA| = 2c$).

Построив треугольник $AA'B$, восставим из середины его стороны $A'B$ перпендикуляр до пересечения O с продолжением стороны BA.

Мы получим таким образом все элементы треугольника OAA' (черт. 131), которые удовлетворяют поставленным условиям.

Перейдем к случаю гиперболы, считая заданными $2a$ (продольную ось) и $2c$ (фокальное расстояние). На этот раз вопрос сводится к построению треугольника $AA'B$ по сторонам $|AA'| = 2a$, $|AB| = 2c$ и углу $ABA' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, противолежащему стороне AA' (черт. 132). Так как теперь $2c > 2a$, то построение не всегда возможно. Для возможности построения, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы сторона $|AA'| = 2a$ была не меньше длины перпендикуляра, опущенного из A на прямую $A'B$. Длина последнего, очевидно, равна $|AB| \cos\alpha = 2c \cos\alpha$. Итак, для возможности построения необходимо и достаточно, чтобы $2a \geqslant 2c \cos\alpha$, или

$$\cos\alpha \leqslant \frac{a}{c}.$$

Если 2β обозначает угол между асимптотами гиперболы (тот, внутри которого она заключена), то $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Значит, предыдущее неравенство дает $\cos\alpha \leqslant \cos\beta$, т. е. $\alpha \geqslant \beta$. Таким образом, для возможности получения данной гиперболы путем пересечения данного конуса плоскостью необходимо и достаточно, чтобы угол 2β между асимптотами данной гиперболы был не больше угла 2α раствора конуса.

Рассмотрим, наконец, случай параболы. Будем считать заданным ее параметр p. Соединив центр C сферы с точками A и G (обозначения те же, что и на черт. 133), получим прямоугольный треугольник CAG, катет AG которого равен $\frac{p}{2}$, а угол CAG равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Таким образом, задача сводится ко всегда возможному элементарному построению прямоугольного треугольника по катету и острому углу.

Если этот треугольник построен, то для построения отрезка OA, который характеризует положение секущей плоскости, достаточно восставить из C перпендикуляр к AC до пересечения O с прямой AG.