ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПРОЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КАСАТЕЛЬНАЯ И ПОЛЯРА

Приступим теперь к изучению линий второго порядка, заданных общим уравнением. На основании сказанного в конце § 179 (см. также § 78) естественно начать с изучения проективных свойств этих линий, а затем перейти к аффинным и метрическим свойствам. Мы так и поступим, хотя мы один раз уже нарушили этот порядок, начав, в предыдущей главе, с определений, носящих метрический характер. Мы сделали это с исключительной целью предпослать наглядный материал более отвлеченному.

I. ПРОЕКТИВНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 208. Обозначения

Пусть x, y обозначают (неоднородные) декартовы координаты точки. Самое общее уравнение второй степени относительно этих переменных имеет вид

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

В однородных декартовых координатах x_1, x_2, x_3 $\left(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}\right)$ это уравнение представляется так (§ 174):

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0.$$

Для придания симметрии формулам обозначим теперь коэффициенты иначе, а именно, коэффициенты при произведениях x_ix_j обозначим через $2a_{ij}$ (если $i \neq j$), а коэффициент при x_i^2 — через a_{ii}, так что левая часть предыдущего уравнения, которую, для краткости, мы будем обозначать через $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, запишется теперь так [1]):

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv$$
$$\equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2. \qquad (1)$$

[1]) Мы будем считать в нашем случае, что a_{ji} обозначает то же, что и a_{ij}. В зависимости от удобства мы будем писать значки в том или ином порядке.

Полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ есть *квадратичная форма* [1]) трех переменных x_1, x_2, x_3. В соответствии с этим левая часть уравнения в неоднородных декартовых координатах будет иметь вид

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}; \tag{1a}$$

$F(x, y)$ есть (вообще неоднородный) полином второй степени.

Самое общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{2}$$

в однородных координатах и

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

— в неоднородных.

Полином $F(x, y)$ связан с формой $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ соотношением

$$F(x, y) = \Phi(x, y, 1). \tag{4}$$

В свою очередь, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ получается из $F(x, y)$ заменой x, y на x_1, x_2 и умножением каждого члена на такую степень x_3, чтобы получился однородный полином второго порядка («дополнение до однородности»).

В дальнейшем мы будем применять еще такие обозначения. *Половины* частных производных формы $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ по x_1, x_2, x_3 мы будем обозначать соответственно через Φ_1, Φ_2, Φ_3, так что

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Одни и те же коэффициенты в различных строках мы, с очевидной целью симметрии, пишем по-разному; например, коэффициент a_{12} во второй строке обозначен через a_{21}. Этим достигается то, что первый значок во всех коэффициентах первой строки есть 1, второй строки — 2, третьей — 3.

Аналогично мы будем писать:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ F_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что всегда имеет место тождество («тождество Эйлера»)

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1\Phi_1 + x_2\Phi_2 + x_3\Phi_3. \tag{7}$$

---

[1]) См. Добавление, § 10.

Если в предыдущем тождестве положить $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, то оно примет вид

$$F(x, y) = x\Phi_1(x, y, 1) + y\Phi_2(x, y, 1) + \Phi_3(x, y, 1). \qquad (7a)$$

Вместо $\Phi_1(x, y, 1)$ и $\Phi_2(x, y, 1)$ мы могли бы написать просто $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$, но не делаем этого с целью сохранения симметрии.

Наконец, нам придется иногда наряду с квадратичной формой $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ рассматривать связанную с ней *билинейную форму* [1]) переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$:

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2, y_3) &= \\ = y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3) + y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3) + y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3) &= \\ = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,y_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,y_2 + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,y_3. \qquad (8)\end{aligned}$$

Эта билинейная форма, очевидно, симметричная, т. е. не изменяет своего значения, если поменять ролями переменные x и y:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2, y_3) = \Omega(y_1, y_2, y_3;\ x_1, x_2, x_3). \qquad (9)$$

Для сокращения письма мы будем в дальнейшем часто обозначать $\Omega(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2, y_3)$ просто через $\Omega(x;\ y)$.

Форма $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ получается из $\Omega(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2, y_3)$, если положить: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, так что $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Omega(x_1, x_2, x_3;\ x_1, x_2, x_3)$, или сокращенно,

$$\Omega(x;\ x) = \Phi(x_1, x_2, x_3). \qquad (10)$$

Билинейная форма Ω называется *полярной* по отношению к квадратичной форме Φ.

Легко проверить непосредственным вычислением следующее тождество, которым мы будем очень часто пользоваться:

$$\Phi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \Omega(x;\ x) + 2\Omega(x;\ y) + \Omega(y;\ y). \qquad (11)$$

В правых частях мы могли бы написать вместо $\Omega(x;\ x)$ и $\Omega(y;\ y)$ соответственно $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ и $\Phi(y_1, y_2, y_3)$, но не делаем этого из соображений симметрии.

Заметим еще одно тождество, которое легко выводится из предыдущего и которое также легко проверить непосредственно:

$$\begin{aligned}F(x + x', y + y') &= \\ = \varphi(x, y) + 2\,[xF_1(x', y') + yF_2(x', y')] + F(x', y'), \qquad (11a)\end{aligned}$$

где

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \qquad (12)$$

---

[1]) См. Добавление, § 10.

есть квадратичная форма, представляющая собою совокупность членов второго порядка в полиноме $F(x, y)$.

Иногда, для упрощения письма, мы будем однородные координаты x_1, x_2, x_3 обозначать соответственно через x, y, t. Полагая в формулах $t = 1$, мы будем получать соответствующие формулы в неоднородных координатах.

До сих пор под x_1, x_2, x_3 мы подразумевали однородные декартовы координаты точки; но под x_1, x_2, x_3 можно подразумевать также однородные *проективные* координаты.

Вообще, во всей этой главе, там, где противное не оговорено особо, *под* x_1, x_2, x_3 (*или* x, y, t) *можно подразумевать проективные однородные координаты общего вида.*

Мы всегда будем считать, что *коэффициенты* a_{ij} *не равны нулю одновременно. Далее, если противное не оговорено особо, мы будем считать все коэффициенты* a_{ij} *действительными числами.*

Нам очень часто придется встречаться с определителем

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

называемым *дискриминантом квадратичной формы* $\Phi(x_1, x_2, x_3)$.

Алгебраические дополнения элементов a_{ij} мы будем обозначать через A_{ij}. В частности,

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \tag{14}$$

есть дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y)$ формулы (12).

З а м е ч а н и е. Правило составления дискриминанта A легче всего запомнить так: берутся половины частных производных формы Φ по x_1, x_2, x_3 и затем составляется определитель из коэффициентов полученных линейных форм Φ_1, Φ_2, Φ_3; см. формулы (5). Например, если

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_3 + x_3^2,$$

то

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 4\cdot x_3,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = -4\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3;$$

следовательно,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

A_{33} есть алгебраическое дополнение правого нижнего элемента в последнем определителе:

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

§ 209. Распадающиеся и нераспадающиеся линии второго порядка. Совпадение линий второго порядка

Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=0 \tag{1}$$

— уравнение данной линии второго порядка в однородных координатах (Φ — однородный полином второй степени, т. е. квадратичная форма). Мы знаем (§ 174), что если эта линия пересекается с некоторой прямой

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \tag{2}$$

больше чем в двух точках, то прямая (2) целиком принадлежит линии (1), и поэтому полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ разлагается на два множителя, один из которых есть $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$; следовательно, должен быть линейным и другой множитель. Таким образом, в этом случае имеем тождественно

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3). \tag{3}$$

Когда это имеет место, линия (1) распадается на две прямые и потому называется *распадающейся* или *выродившейся*. В еще более частном случае линейные формы, входящие в (3), могут отличаться друг от друга только постоянным множителем, т. е.

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3),$$

и тогда

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2. \tag{4}$$

Линия (1), таким образом, представляет собою две совпадающие прямые («двойную прямую»).

На основании сказанного в § 174 легко также вывести условие совпадения двух линий второго порядка.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=0 \quad \text{и} \quad \Psi(x_1, x_2, x_3)=0.$$

Действительно, если эти линии совпадают, т. е. если предыдущие уравнения эквивалентны, то полиномы Φ и Ψ должны состоять из одних и тех же неприводимых множителей. Поэтому Φ и Ψ могут различаться только постоянным множителем, т. е. должно быть тождественно

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=k\Phi(x_1, x_2, x_3), \tag{5}$$

где k — постоянная, отличная от нуля. Очевидно, что и обратно: если имеет место последнее тождество, то линии Φ и Ψ совпадают.

Ниже (§ 212) будет доказано, что для совпадения двух линий второго порядка достаточно, чтобы они имели *пять общих точек*, из которых никакие четыре не расположены на одной и той же прямой.

§ 210. Условие распадения линии второго порядка

Легко сразу выяснить, распадается или не распадается линия второго порядка, заданная уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \\ = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Действительно, для того чтобы форма $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ распадалась на два линейных множителя, необходимо и достаточно (см. Добавление, § 13), чтобы ранг дискриминанта этой формы, т. е. ранг определителя

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

был равен двум или единице. Так как наш определитель — третьего порядка, то ранг будет удовлетворять этому условию, если сам определитель равен нулю. Следовательно, *для распадения линии второго порядка необходимо и достаточно условие*

$$A = 0. \tag{2}$$

Если ранг дискриминанта A равен двум, то линия распадается на две различные прямые, действительные или мнимые. Если же ранг равен единице, то форма Φ имеет вид

$$\Phi = k(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2,$$

и линия есть совокупность двух совпадающих прямых, всегда действительных [1]).

Общая точка двух прямых, на которые распадается линия, называется *двойной точкой* линии. В случае, когда линия — совокупность двух совпадающих прямых, все ее точки — двойные.

---

[1]) См. следующий параграф.

§ 211. Каноническое уравнение линии второго порядка в проективных координатах. Проективная классификация

Как известно (см. Добавление, § 12), путем линейной однородной подстановки

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}x_1' + l_{12}x_2' + l_{13}x_3', \\ x_2 &= l_{21}x_1' + l_{22}x_2' + l_{23}x_3', \\ x_3 &= l_{31}x_1' + l_{32}x_2' + l_{33}x_3' \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

всякую квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ можно привести к *каноническому виду*

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2, \qquad (**)$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — постоянные. Если, как мы всегда предполагаем, коэффициенты формы Φ — действительные, то указанное приведение можно произвести при помощи подстановки с *действительными коэффициентами*, так что ε_1, ε_2, ε_3 будут также действительными; мы будем предполагать это во всем дальнейшем.

Итак, уравнение всякой линии второго порядка

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1)$$

можно привести к «каноническому виду» [1])

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 = 0. \qquad (2)$$

Если дискриминант A формы Φ отличен от нуля (в этом случае, как мы знаем, линия нераспадающаяся), то ни одно из чисел ε_1, ε_2, ε_3 не равно нулю (см. Добавление, § 12), и путем дальнейшей линейной подстановки можно добиться того, чтобы эти числа имели значения [2]) ± 1. Если все три числа ε_1, ε_2, ε_3 одного знака, то уравнение (2), преобразованное к новым переменным, будет иметь вид (в случае надобности мы меняем знаки всех членов на обратные)

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0; \qquad (3)$$

если же среди чисел ε_1, ε_2, ε_3 — два одного знака, а третье — противоположного, то мы будем иметь (изменяя, в случае надобности, нумерацию переменных)

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0. \qquad (4)$$

---

[1]) Геометрический смысл этого приведения будет указан в § 222.

[2]) Например, если $\varepsilon_1 > 0$, полагаем $\sqrt{\varepsilon_1}x_1' = x_1''$, после чего член $\varepsilon_1 x_1'^2$ обращается в $x_1''^2$; если $\varepsilon_1 < 0$, полагаем $\sqrt{-\varepsilon_1}x_1' = x_1''$ и, следовательно $\varepsilon_1 x_1'^2 = -x_1''^2$. Аналогично поступаем с другими переменными.

Итак, путем линейной однородной подстановки уравнение всякой нераспадающейся линии второго порядка может быть приведено к одному из видов (3), (4).

Если ранг дискриминанта A равен двум, то одно из чисел ε_1, ε_2, ε_3 в уравнении (2) равно нулю и это уравнение может быть приведено к одному из видов

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 0, \text{ т. е. } (x_1' + ix_2')(x_1' - ix_2') = 0, \tag{5}$$

или

$$x_1'^2 - x_2'^2 = 0, \text{ т. е. } (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') = 0. \tag{6}$$

В первом случае мы имеем совокупность двух мнимых сопряженных прямых $x_1' + ix_2' = 0$ и $x_1' - ix_2' = 0$ с двойной точкой [1] (0, 0, 1); во втором случае — совокупность двух действительных прямых с двойной точкой (0, 0, 1).

Наконец, если ранг A равен единице, то два из чисел ε_1, ε_2, ε_3 равны нулю, например, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_1 \neq 0$; уравнение (3) принимает вид

$$x_1'^2 = 0 \tag{7}$$

и изображает всегда действительную двойную прямую. Все точки этой прямой — двойные.

Будем для простоты считать, что x_1, x_2, x_3 обозначают декартовы (однородные) координаты точки.

Преобразование (*) можно трактовать с двух различных точек зрения.

1°. Величины x_1', x_2', x_3' можно рассматривать как проективные координаты точки (x_1, x_2, x_3) по отношению к некоторой системе проективных координат, которая вполне определяется коэффициентами подстановки (*); см. § 177. Тогда полученный нами результат можно выразить так: *путем подходящего выбора системы проективных координат уравнение всякой линии второго порядка может быть приведено к каноническому виду* (2), где ε_1, ε_2, ε_3 равны ± 1 или нулю. В зависимости от различных случаев мы имеем один из видов (3), (4), (5), (6), (7). Во всех случаях, кроме (3) и (4), т. е. кроме случая $A \neq 0$, мы имеем дело с распадающейся линией.

2°. Можно рассматривать x_1', x_2', x_3' тоже как однородные декартовы координаты некоторой точки M', отнесенной к той же системе, что и точка M (x_1, x_2, x_3). Тогда (§ 179) подстановка (*) определяет некоторое точечное проективное преобразование плоскости (т. е. гомографию), и мы можем высказать следующее предложение:

Путем подходящего гомографического преобразования плоскости всякая линия второго порядка может быть преобразована в линию, изображаемую одним из уравнений (3)—(7).

---

[1]) Действительно, прямые $x_1' + ix_2' = 0$, $x_1' - ix_2' = 0$ пересекаются в точке с координатами $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, x_3' — произвольное (не 0); но мы всегда можем считать $x_3' = 1$.

В частности, всякая нераспадающаяся линия второго порядка может быть преобразована в одну из линий (3), (4).

Мы можем всегда считать, что система декартовых координат, к которой отнесены данная и преобразованная линии,— прямоугольная. Переписывая уравнения (3) и (4) в неоднородных координатах, будем иметь соответственно:

$$x^2+y^2+1=0 \tag{3a}$$

и

$$x^2+y^2-1=0. \tag{4a}$$

Первое уравнение не удовлетворяется, очевидно, никакими действительными значениями x и y, т. е. изображает мнимую линию. Второе представляет собою уравнение окружности. Итак, мы видим, что путем проективного преобразования всякая действительная нераспадающаяся линия второго порядка может быть обращена в окружность. Отсюда следует (и это — самое существенное), что *все нераспадающиеся действительные линии второго порядка могут быть переведены одна в другую гомографическим преобразованием.*

С точки зрения проективной геометрии все линии, получающиеся одна из другой проективным преобразованием, эквивалентны и, следовательно, с этой точки зрения, все действительные нераспадающиеся линии второго порядка — эквивалентны (таким образом, с проективной точки зрения, нет разницы между эллипсом, гиперболой и параболой).

Резюмируя, можно сказать: с точки зрения проективной все линии второго порядка разделяются на следующие категории:

a) нераспадающиеся линии;

b) распадающиеся линии.

В категории a) различаются две подкатегории: a_1) действительные линии и a_2) мнимые линии.

В категории b) различаются: b_1) совокупность двух различных прямых и b_2) совокупность двух совпадающих прямых. Наконец, в подкатегории b_1) имеются ещё два случая: b_1') действительные прямые и b_1'') мнимые сопряженные прямые.

З а м е ч а н и е. Во всех случаях распадающихся линий второго порядка каноническая форма Φ', как мы видели, может быть написана так ($\varepsilon_3=0$):

$$\Phi'=\varepsilon_1 x_1'^2+\varepsilon_2 x_2'^2;$$

(при $\varepsilon_2=0$ имеем двойную прямую). На основании этого ясно, что двойная точка линии удовлетворяет трём уравнениям [1]):

$$\Phi_1'=\varepsilon_1 x_1'=0, \quad \Phi_2'=\varepsilon_2 x_2'=0, \quad \Phi_3'=\varepsilon_3 x_3'=0 \tag{8}$$

[1]) Мы видели, что при $\varepsilon_2\neq 0$ двойная точка удовлетворяет условиям $x_1'=x_2'=0$. При $\varepsilon_2=0$ все точки линии — двойные и удовлетворяют условию $x_1'=0$.

(последнее сводится к тождеству $0 = 0$). Но последняя система, если вернуться к старым переменным x_1, x_2, x_3, эквивалентна системе [1])

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ \Phi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ \Phi_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Поэтому двойную точку мы найдем, решая эту систему. Если ранг определителя A равен двум, то получим одну двойную точку (как мы это видели и раньше); если ранг равен единице, то уравнения (9) сводятся к одному из них, и мы получим прямую, сплошь состоящую из двойных точек (это и будет наша двойная прямая).

Условимся вообще называть двойными те точки, координаты которых удовлетворяют системе (9). Если $A \neq 0$, т. е. если линия нераспадающаяся, то система (9) не имеет (ненулевого) решения. Значит, нераспадающаяся линия не имеет двойных точек.

§ 212. Определение линии второго порядка по пяти точкам

Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 \qquad (1)$$

— уравнение линии второго порядка в однородных координатах, которые мы обозначаем теперь через x, y, t. В это уравнение входит, как видим, шесть постоянных коэффициентов: a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}. Но так как при замене этих постоянных пропорциональными им величинами линия не изменяется, то очевидно, что значение имеют не сами эти постоянные, а отношения пяти из них к шестой. Значит, форма и положение линии второго порядка определяются *пятью* постоянными. Отсюда следует, что линия второго порядка может быть, вообще говоря, определена заданием *пяти условий*.

В частности, линия второго порядка, вообще говоря, вполне определяется заданием пяти ее точек. Иными словами, *если на плоскости заданы пять точек* $M_1(x_1, y_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, t_2)$, ..., $M_5(x_5, y_5, t_5)$, *то можно, вообще говоря, найти одну и только одну линию второго порядка, проходящую через эти точки* (строгую формулировку этого предложения см. ниже). Действительно, если (1) есть уравнение искомой линии, то, выражая условие, что

---

[1]) См. Добавление, § 11.

она проходит через данные точки, получим пять уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2+2a_{13}x_1t_1+2a_{23}y_1t_1+a_{33}t_1^2=0,\\
&a_{11}x_2^2+2a_{12}x_2y_2+a_{22}y_2^2+2a_{13}x_2t_2+2a_{23}y_2t_2+a_{33}t_2^2=0,\\
&a_{11}x_3^2+2a_{12}x_3y_3+a_{22}y_3^2+2a_{13}x_3t_3+2a_{23}y_3t_3+a_{33}t_3^2=0,\\
&a_{11}x_4^2+2a_{12}x_4y_4+a_{22}y_4^2+2a_{13}x_4t_4+2a_{23}y_4t_4+a_{33}t_4^2=0,\\
&a_{11}x_5^2+2a_{12}x_5y_5+a_{22}y_5^2+2a_{13}x_5t_5+2a_{23}y_5t_5+a_{33}t_5^2=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

линейных и однородных относительно шести неизвестных величин $a_{11}, \ldots, a_{33}$. Эти пять уравнений дадут, вообще говоря, вполне определенные значения для отношений пяти из неизвестных величин к шестой.

Однако при известных частных расположениях данных точек сказанное может оказаться несправедливым. Если, например, четыре из данных точек расположены на одной и той же прямой, то, очевидно, существует бесчисленное множество линий второго порядка, проходящих через данные точки: каждая из этих линий представляет совокупность двух прямых, одна из которых проходит через четыре упомянутые точки, а вторая — произвольная прямая, проходящая через пятую точку. Если, в еще более частном случае, все пять точек расположены на одной и той же прямой, то тогда решение дается совокупностью двух прямых, из которых первая проходит через данные точки, а вторая совершенно произвольна.

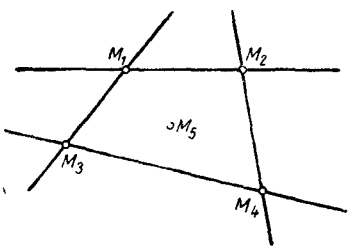
Нетрудно показать, что, за исключением упомянутых частных случаев, мы всегда получим вполне определенную линию второго порядка, т. е. что *всякие пять различных точек плоскости, из которых никакие четыре не расположены на одной и той же прямой, определяют одну и только одну проходящую через них линию второго порядка.*

Докажем высказанное предложение. Известно (см. Добавление, § 6), что система линейных однородных уравнений (2) либо дает вполне определенные значения для отношений неизвестных $a_{11}, \ldots, a_{33}$, либо же некоторые из уравнений (2) являются линейными комбинациями остальных. В первом случае мы получим вполне определенную линию второго порядка. Во втором случае по крайней мере одно из уравнений, скажем последнее, есть следствие остальных. Это значит, что всякая линия второго порядка, проходящая через точки M_1, M_2, M_3, M_4, будет проходить и через M_5. Покажем сперва, что это может быть только тогда, когда три из точек M_1, M_2, M_3, M_4 расположены на одной прямой. Действительно, предположим противное. Пара прямых M_1M_2 и M_3M_4 (черт. 141) представляет собою линию второго порядка, проходящую через точки M_1, M_2, M_3, M_4; тем же свойством обладает и линия второго порядка, состоящая из совокупности прямых M_1M_3 и M_2M_4. Но

эти две линии второго порядка не имеют никаких других общих точек, кроме M_1, M_2, M_3, M_4; следовательно, обе они не могут проходить одновременно через точку M_5, а это противоречит условию.

Итак, пусть, например, точки M_1, M_2, M_3 расположены на одной прямой. Покажем, что точка M_5 будет находиться на этой прямой.

Действительно, в противном случае мы могли бы построить линию второго порядка, проходящую через M_1, M_2, M_3, M_4, но не через M_5; для этого достаточно взять совокупность двух прямых, одна из которых проходит через M_1, M_2, M_3, а другая — через M_4, но не через M_5.



Черт. 141

Итак, одно из уравнений (2) может быть следствием остальных только в том случае, если четыре из заданных точек расположены на одной и той же прямой. В этом последнем случае задача имеет не одно, а бесчисленное множество решений, как было уже сказано.

Замечание 1. Из самого способа доказательства предложения об определении линии второго порядка по пяти точкам вытекает, что если две линии второго порядка имеют все точки общими, то коэффициенты их уравнений пропорциональны [1]).

Действительно, возьмем на одной из линий пять различных точек. Если среди них нет четырех, расположенных на одной прямой, то система (2) даст для коэффициентов $a_{11}, \ldots, a_{33}$ вполне определенные отношения. Так как коэффициенты $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$ уравнения второй линии удовлетворяют той же системе, то они должны быть пропорциональны коэффициентам $a_{11}, \ldots, a_{33}$.

Если среди выбранных пяти точек есть четыре, расположенные на одной и той же прямой, то линии распадаются на две прямые каждая, и тогда наше утверждение легко проверяется непосредственно.

Замечание 2. Разумеется, все предыдущие рассуждения можно провести, применяя и неоднородные координаты. Но тогда, в некоторых случаях, могут потребоваться дополнительные рассмотрения, касающиеся несобственных элементов.

Упражнение

Построить линию второго порядка, проходящую через точки (в неоднородных координатах):

$$M_1(3, 0),\ M_2(-3, 0),\ M_3(0, 2),\ M_4(0, -2),\ M_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \ 1\right).$$

[1]) Это предложение нами уже получено иным путем (§ 209)

Решение. Коэффициенты уравнений искомой линии определяются из системы:

$$9a_{11}+6a_{13}+a_{33}=0,$$
$$9a_{11}-6a_{13}+a_{33}=0,$$
$$4a_{22}+4a_{23}+a_{33}=0,$$
$$4a_{22}-4a_{23}+a_{33}=0,$$
$$\frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}a_{12}+a_{22}+3\sqrt{3}a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим $a_{13}=0$; вычитая же четвертое из третьего, получим $a_{23}=0$, так что система сводится к следующей:

$$9a_{11}+a_{33}=0, \quad 4a_{22}+a_{33}=0,$$
$$\frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}a_{12}+a_{22}+a_{33}=0.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$a_{11}=-\frac{a_{33}}{9}, \quad a_{22}=-\frac{a_{33}}{4}.$$

Подставляя эти значения в последнее, получим $a_{12}=0$. Итак, окончательно: $a_{13}=a_{12}=a_{23}=0$, и уравнение искомой линии примет вид (по разделении на a_{33})

$$-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2+1=0$$

или

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

§ 213. Пучок линий второго порядка

На основании сказанного в предыдущем параграфе через всякие данные четыре точки плоскости проходит бесчисленное множество линий второго порядка. Если данные четыре точки не расположены на одной прямой, то совокупность этих линий зависит от одного параметра (это будет сейчас показано) и называется *пучком линий второго порядка*.

Найдем общее уравнение линии второго порядка, принадлежащей пучку. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — данные точки, не расположенные на одной прямой. Возьмем какую-либо пятую точку M' и проведем через пять точек $M_1, \ldots, M_4, M'$ кривую второго порядка $\Phi(x, y, t)=0$. Затем возьмем еще какую-либо точку M'', не расположенную на кривой $\Phi(x, y, t)=0$, и проведем опять через пять точек M_1, M_2, M_3, M_4, M'' линию второго порядка $\Psi(x, y, t)=0$, которая будет, конечно, отлична от первой. Мы имеем, таким образом, две линии второго порядка, проходящие

через данные точки. Докажем, что *всякая* линия второго порядка, проходящая через эти же четыре точки, может быть представлена уравнением

$$\lambda\Phi(x, y, t)+\mu\Psi(x, y, t)=0, \tag{1}$$

где λ и μ — постоянные, не равные одновременно нулю.

Действительно, ясно, что (1) представляет линию второго порядка [1]), проходящую через данные четыре точки. Остается показать, что, придав λ и μ подходящие значения, мы можем получить всякую линию второго порядка, проходящую через эти точки. Пусть $\Phi_0(x, y, t) = 0$— такая линия. Возьмем на ней какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, t_0)$, не расположенную на одной прямой с тремя из данных точек M_1, M_2, M_3, M_4, и подберем параметры λ и μ так, чтобы линия (1) также проходила через эту точку. Для этого достаточно придать λ и μ такие значения (не равные одновременно нулю), чтобы

$$\lambda\Phi(x_0, y_0, t_0)+\mu\Psi(x_0, y_0, t_0)=0, \tag{2}$$

что, очевидно, всегда возможно. Если параметры λ и μ подобраны указанным образом, то линия (1) проходит через те же пять точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_0, что и линия $\Phi_0(x, y, t) = 0$, и, следовательно, совпадает с ней.

Уравнение (1) содержит два произвольных параметра λ и μ, но линии, представляемые этим уравнением, зависят, очевидно, только от отношения этих параметров, т. е. от одного параметра $k=\frac{\lambda}{\mu}$. При $k = 0$ получаем линию $\Psi = 0$, при $k = \infty$ (т. е. при $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$)— линию $\Phi = 0$.

В частности, в качестве линий $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ мы можем взять, например, пары прямых (M_1M_2, M_3M_4) и (M_1M_3, M_2M_4), так что нахождение линий $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$ никакого труда не представляет. Таким образом, если $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, где f_1, f_2, f_3, f_4 — линейные формы переменных x, y, t, суть уравнения прямых M_1M_2, M_3M_4, M_1M_3, M_2M_4, то общее уравнение линий второго порядка, проходящих через наши четыре точки, будет

$$\lambda f_1f_2+\mu f_3f_4=0, \tag{3}$$

или

$$f_3f_4+kf_1f_2=0, \tag{3a}$$

где

$$k=\frac{\lambda}{\mu}. \tag{4}$$

---

[1]) Левая часть этого уравнения не может быть равна тождественно нулю, ибо, в противном случае, линии $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$ не были бы различны.

На основании предыдущего очень легко решить задачу о нахождении линии второго порядка, проходящей через данные пять точек: для этого достаточно написать общее уравнение (3) линий, проходящих через четыре из данных точек, а затем подобрать отношение $\frac{\lambda}{\mu}$ так, чтобы линия проходила и через пятую точку.

Упражнения и дополнения

1. Решить задачу, приведенную в упражнении § 212, методом, указанным в конце настоящего параграфа.

Решение. Уравнения прямых M_1M_2, M_3M_4, M_1M_3, M_2M_4 суть соответственно (мы применяем неоднородные координаты):

$$y=0, \quad x=0, \quad 2x+3y-6=0, \quad 2x+3y+6=0,$$

так что общее уравнение линий второго порядка, проходящих через точки M_1, M_2, M_3, M_4, будет

$$\lambda xy+\mu(2x+3y-6)(2x+3y+6)=0.$$

Выражая, что предыдущая линия проходит через точку $M_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, получаем $\lambda=-12\mu$. Мы можем взять, например, $\mu=1$, $\lambda=-12$. Подставляя эти значения, получаем уравнение искомой линии:

$$4x^2+9y^2-36=0.$$

2. Найти общее уравнение линий второго порядка, проходящих через четыре точки пересечения данной линии второго порядка $\Phi=0$ с двумя данными прямыми $f_1=0$ и $f_2=0$.

Ответ. $\lambda\Phi+\mu f_1f_2=0$.

3. Найти общее уравнение линий второго порядка, проходящих через две точки пересечения линии второго порядка $\Phi=0$ с прямою $f_1=0$.

Ответ. $\lambda\Phi+f_1f_2=0$, где λ — произвольная постоянная, а f_2 — произвольная линейная форма, т. е. $f_2=ax+by+ct$, где a, b, c — произвольные числа. Мы видим, что наша линия зависит от трех произвольных параметров (отношений трех из величин λ, a, b, c к четвертой).

§ 214. Теорема Паскаля

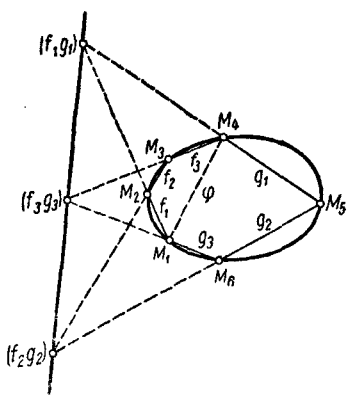
Как мы видели, кривая второго порядка вполне определяется любыми своими пятью точками, при условии, что никакие четыре из них не коллинеарны. Следовательно, любая шестая точка кривой должна быть связана с пятью данными точками определенным соотношением. Геометрическое содержание этого соотношения дается следующей теоремой Паскаля: *точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в линию второго порядка, расположены на одной прямой.*

Разъясним сперва содержание теоремы. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 — шесть различных точек, взятых на данной линии второго порядка. Соединим их последовательно (в том порядке, как они написаны) прямыми. Мы получим шестиугольник со сто-

ронами M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_1. (Если бы мы соединяли точки в иной последовательности, то получили бы другой шестиугольник; теорема применима к любому из них). Обозначим стороны в той последовательности, как они написаны, следующим образом (черт. 142):

$$f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3.$$

Стороны f_1 и g_1, f_2 и g_2, f_3 и g_3 называются противоположными. Теорема Паскаля утверждает, что точки (f_1g_1), (f_2g_2), (f_3g_3) расположены на одной прямой; мы обозначаем символом (fg) точку пересечения прямых f и g.



Черт. 142

Мы проведем доказательство, считая, что данная линия — не распадающаяся и что, следовательно, никакие три из вершин M_1, M_2, . . ., M_6 не коллинеарны, предоставляя читателю провести доказательство и для случая распадающейся линии [1]).

Проведем вспомогательную прямую φ через точки (f_3g_1) и (g_3f_1). Мы получим два четырехугольника со сторонами f_1, f_2, f_3, φ и g_1, g_2, g_3, φ, вокруг каждого из которых описана наша кривая второго порядка.

Будем, для большей наглядности, обозначать левые части уравнений прямых f_1, f_2 и т. д. теми же буквами, что и сами прямые (так что уравнение прямой f_1 будет $f_1 = 0$ и т. д.).

На основании сказанного в предыдущем параграфе уравнение нашей линии второго порядка можно написать в любом из следующих двух видов:

$$f_1f_3 + \lambda f_2\varphi = 0 \text{ и } g_1g_3 + \mu g_2\varphi = 0,$$

где λ и μ — подходящим образом подобранные числа [2]). Так как оба эти уравнения представляют одну и ту же линию второго порядка, мы должны иметь тождество

$$g_1g_3 + \mu g_2\varphi = \nu\,(f_1f_3 + \lambda f_2\varphi),$$

где ν — некоторый постоянный множитель, отличный от нуля.

---

[1]) В этом случае, в зависимости от расположения точек M_1, M_2, . . ., M_6, теорема или совершенно тривиальна или может быть доказана путем очевидных видоизменений доказательства, приведенного в тексте.

[2]) Здесь λ и μ обозначают то, что в предыдущем параграфе было обозначено через k.

Не нарушая общности, можно считать $\nu = 1$, ибо множитель ν можно включить в коэффициенты линейных функций f_1 и f_2. Итак, мы имеем тождество

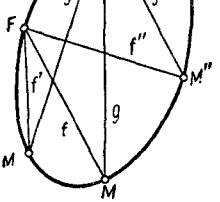
$$g_1g_3+\mu g_2\varphi = f_1f_3+\lambda f_2\varphi,$$

откуда

$$g_1g_3-f_1f_3=\varphi\cdot(\lambda f_2-\mu g_2). \qquad (1)$$

Уравнение $\varphi\cdot(\lambda f_2 - \mu g_2) = 0$ представляет собою пару прямых, из которых одна есть φ; обозначим другую через φ'. Эта последняя прямая, очевидно, проходит через точку (f_2g_2) [1]). Уравнение $g_1g_3 - f_1f_3 = 0$ изображает ту же пару прямых, что и предыдущее, в силу тождества (1). Эта пара прямых проходит, очевидно, через точки (g_1f_1), (g_3f_3), (g_1f_3), (g_3f_1). Последние две расположены на прямой φ; первые две на ней, очевидно, не расположены [2]) и, следовательно, расположены на прямой φ', которая содержит и точку (f_2g_2). Таким образом, точки (g_1f_1), (g_2f_2), (g_3f_3) расположены на одной прямой φ', а это и требовалось доказать.

Теорема Паскаля дает возможность построить при помощи одной только линейки любое количество точек линии второго порядка, если заданы пять ее точек; предоставляем показать это читателю.



Черт. 143

§ 215. Образование линий второго порядка проективными пучками

Докажем еще следующее предложение, которое, так же как и теорема Паскаля, может служить для чисто проективного определения линий второго порядка.

Пусть F и G — две точки линии второго порядка Г (черт. 143). Рассмотрим пучки прямых с центрами F и G и приведем в соответствие те прямые f и g этих пучков, которые проходят через одну и ту же точку M линии Г. Полученное таким образом соответствие пучков — проективное. Обратно, *точки пересечения соответствующих прямых двух проективных пучков образуют линию второго порядка, проходящую через центры пучков.*

Пусть, в самом деле. f', f'' — две прямые первого пучка, а g', g'' — соответствующие прямые второго. Так как наша кривая проходит через точки пересечения пары прямых f', g'' с парою g', f'', то ее уравнение можно представить в виде

$$f'g''-kf''g'=0,$$

где k — некоторое число, или, включая k в одну из линейных функций f'', g', — в виде

$$f'g''-f''g'=0, \qquad (1)$$

[1]) Ибо уравнение этой прямой $\varphi' = \lambda f_2 - \mu g_2 = 0$.

[2]) Точка (g_1f_1) может находиться на φ только тогда, когда g_1 или f_1 (или обе вместе) сливаются с φ. Но тогда одна из точек M_2 или M_5 (или обе вместе) должна находиться на φ, т. е. на одной прямой с M_1 и M_4, что противоречит условию.

или еще

$$\frac{f''}{f'}=\frac{g''}{g'}. \tag{1a}$$

Итак, координаты всякой точки нашей линии удовлетворяют уравнению (1a).

Пусть теперь f — какая-либо прямая первого пучка, а g — соответствующая прямая второго. Уравнения этих прямых будут соответственно

$$f'-\lambda f''=0 \quad \text{и} \quad g'-\mu g''=0, \tag{2}$$

где λ и μ — некоторые числа.

Эти прямые имеют общую точку M, расположенную на данной линии; подставляя координаты этой точки в (2) и принимая во внимание (1a), получаем

$$\lambda=\mu.$$

Итак, для соответствующих прямых наших пучков имеем $\lambda=\mu$, а отсюда и следует, что соответствие — проективное (§ 189).

Обратно, пусть мы имеем два пучка (2), приведенных в проективное соответствие. Мы всегда можем считать (§ 189), что это проективное соответствие выражается равенством $\lambda=\mu$. Следовательно, соответствующие прямые двух пучков будут иметь уравнения

$$f'=\lambda f'', \quad g'=\lambda g''$$

с одним и тем же λ. Координаты точки пересечения этих прямых удовлетворяют обоим последним уравнениям. Исключая λ, получаем (1a) или (1), откуда видно, что точки пересечения соответствующих прямых образуют линию второго порядка (1); эта линия, очевидно, проходит через точки G и F.

II. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОЙ. КАСАТЕЛЬНАЯ

§ 216. Уравнение, определяющее пересечение линии второго порядка с прямою, в однородных координатах

Одним из главнейших способов изучения свойств линии второго порядка является рассмотрение ее пересечения с прямыми. Мы уже несколько раз имели случай касаться вопроса о пересечении алгебраических линий, в частности второго порядка, с прямою.

Рассмотрим теперь этот вопрос более подробно и начнем с вывода весьма простого и симметричного уравнения, определяющего точки пересечения данной линии второго порядка с прямою.

Пусть дана линия второго порядка уравнением в однородных координатах

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=0, \tag{1}$$

где по принятым нами обозначениям (§ 208)

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=$$
$$=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2. \tag{2}$$