

Мы не останавливаемся на вопросе о касательных в особенных точках.

Замечание. В случае пространственной линии, заданной параметрически:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — однозначные функции, имеющие непрерывные производные в некотором промежутке, причем по крайней мере одна из этих производных отлична от нуля, касательная существует и дана уравнением

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}. \quad (9)$$

Для доказательства достаточно почти буквально повторить рассуждения этого параграфа.

III. ПОЛЮС И ПОЛЯР. ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 219. Проведение касательной из заданной точки плоскости. Полюс и поляр

Поставим себе следующую задачу: дана произвольная точка $N(y_1, y_2, y_3)$ на плоскости; провести через нее касательную к данной линии второго порядка Γ .

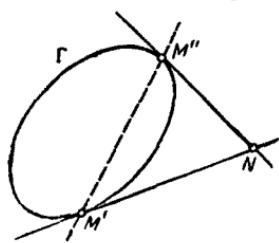
Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1)$$

— уравнение линии Γ , которую мы будем в дальнейшем (если противное не оговорено) считать нераспадающейся¹⁾, и пусть

$M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ — точка касания (пока неизвестная) одной из касательных, проведённых через данную точку N к кривой Γ (черт. 146). Уравнение касательной в M' имеет вид

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = 0,$$



Черт. 146

где x'_1, x'_2, x'_3 — постоянные, а x_1, x_2, x_3 — текущие координаты. Для того чтобы

эта прямая удовлетворяла условиям задачи, она должна проходить через точку $N(y_1, y_2, y_3)$. Выразив это условие, получим

$$\Omega(y_1, y_2, y_3; x'_1, x'_2, x'_3) = 0.$$

Итак, координаты точки касания $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ должны удовлетворять последнему уравнению и уравнению $\Phi(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$, выражающему, что точка M' находится на линии Γ .

¹⁾ Случай распадающейся линии не представляет интереса с точки зрения решения поставленной задачи, ибо решение в этом случае очевидно.

Отбрасывая, для упрощения письма, штрихи, видим, что координаты x_1, x_2, x_3 искомой точки касания удовлетворяют двум уравнениям: уравнению (1) и $\Omega(y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3) = 0$, или, подобнее,

$$x_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3) + x_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3) + x_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3) = 0. \quad (2)$$

Если будем теперь рассматривать x_1, x_2, x_3 в последнем уравнении как текущие координаты, то увидим, что искомая точка касания находится на пересечении прямой (2) с линией Γ .

Эта прямая ¹⁾ (2) пересекает Γ в двух точках M' и M'' (действительных, мнимых, различных или совпадающих) и каждая из этих точек удовлетворяет, очевидно, условию задачи.

Итак, для решения поставленной задачи достаточно найти точки M', M'' пересечения прямой (2) с линией Γ и провести через эти точки касательные к ней. Эту же последнюю задачу мы решать умеем.

Мы видим, что из заданной произвольной точки плоскости можно провести две и только две касательные к данной линии второго порядка (действительные, мнимые, различные или совпадающие).

Прямая (2), всегда действительная, если точка N — действительная, называется *полярой* ²⁾ точки N относительно кривой Γ ; точка же N называется *полюсом* прямой (2) относительно Γ .

Перепишем уравнение (2) так:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad (2a)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \Phi_1(y_1, y_2, y_3) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ u_2 = \Phi_2(y_1, y_2, y_3) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ u_3 = \Phi_3(y_1, y_2, y_3) = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Величины u_1, u_2, u_3 суть (однородные) координаты прямой (2), т. е. координаты поляры точки $N(y_1, y_2, y_3)$. Так как, по предположению, линия Γ — нераспадающаяся, то определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

¹⁾ Это — вполне определенная прямая, ибо коэффициенты уравнения (2) не могут быть равны нулю одновременно, так как, по предположению, линия Γ — нераспадающаяся.

²⁾ Обратим внимание на то, что уравнение поляры формально имеет тот же вид, что уравнение касательной; только в уравнении поляры y_1, y_2, y_3 обозначают координаты произвольной точки, а не обязательно точки, расположенной на Γ .

отличен от нуля и система (3) разрешима относительно y_1, y_2, y_3 :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ y_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ y_3 &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A} = \frac{A_{ji}}{A} \quad (5)$$

и где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе¹⁾ A .

Из (4) следует, что каждой прямой $\Delta (u_1, u_2, u_3)$ плоскости отвечает вполне определенный полюс $N (y_1, y_2, y_3)$, т.е. точка, полярой которой она является.

Выясним теперь важный вопрос: когда полюс расположен на своей поляре.

Если точка $N (y_1, y_2, y_3)$ расположена на своей поляре, то эта точка принадлежит самой линии Γ и поляра обращается в касательную к Γ в точке N . Действительно, если точка N находится на поляре (2), то ее координаты должны удовлетворять уравнению (2), откуда следует

$$\begin{aligned} y_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3) + y_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3) + y_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3) &= \\ &= \Phi(y_1, y_2, y_3) = 0; \end{aligned}$$

следовательно, точка N принадлежит Γ . Тогда уравнение (2) есть, очевидно, уравнение касательной к Γ в точке N .

Обратно, если точка N принадлежит Γ , то она расположена на своей поляре, которая в этом случае обращается в касательную в точке N ; это непосредственно следует из уравнения (2) поляры точки N .

Так как у данной прямой имеется только один полюс, то очевидно, что полюсом всякой касательной к Γ является точка касания.

Мы видели выше, что из данной точки можно провести две касательные к данной линии второго порядка; эти касательные могут быть и совпадающими. На основании только что сказанного, последнее будет иметь место тогда и только тогда, когда точка N находится на самой линии Γ . Действительно, в этом случае точки M' и M' должны совпадать, т.е. поляра точки M должна обратиться в касательную к Γ .

Если касательные, проведённые из данной точки N к Γ , — различные и мнимые, то точка M называется *внутренней* точкой относительно Γ ; если же касательные — различные и действительные, то точка называется *внешней*. Мы видели, что если обе касательные соадают, то точка находится на самой линии Γ .

¹⁾ $A_{ij} = A_{ji}$, так как определитель A — симметричный, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

§ 220. Другое определение полюса и поляры. Сопряженные точки

Наиболее важные свойства полюса и поляры легче всего вытекают из другого их определения, которое будет сейчас приведено. Начнем с введения понятия сопряженных точек относительно данной линии Γ второго порядка.

Две точки M и N называются сопряженными относительно линии второго порядка Γ , если эти точки гармонически сопряжены относительно точек A и B пересечения прямой MN с Γ (черт. 147), т. е. если

$$(M, N, A, B) = -1.$$

На всякой прямой δ , пересекающей Γ в двух различных (действительных или мнимых) точках, имеется бесчисленное множество пар сопряженных точек: каждой точке прямой соответствует вполне определенная сопряженная точка. Это соответствие есть инволюция (§ 190), двойными точками которой являются точки A, B пересечения δ с Γ ,

Найдем соотношение, связывающее координаты двух сопряженных точек $M(x_1, x_2, x_3)$ и $N(y_1, y_2, y_3)$. Для этого составим уравнение, определяющее точки пересечения A, B , прямой MN с линией Γ , заданной уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Применяя обозначения § 216 (здесь роль x'_1, x'_2, x'_3 будут исполнять x_1, x_2, x_3 , а роль x''_1, x''_2, x''_3 — соответственно y_1, y_2, y_3), будем иметь

$$h^2\Omega(x; x) + 2h\Omega(x; y) + \Omega(y; y) = 0.$$

Двум корням h_1 и h_2 этого уравнения соответствуют две точки пересечения A и B . Для того, чтобы две пары (M, N) и (A, B) разделяли друг друга гармонически, необходимо и достаточно¹⁾ (§ 187, *замечание*), чтобы $h_1 = -h_2$ или $h_1 + h_2 = 0$, а это значит, что в предыдущем уравнении средний коэффициент равен нулю, т. е.

$$\Omega(x; y) = 0. \quad (1)$$

Это и есть соотношение, связывающее координаты двух сопряженных точек M, N . Оно симметрично относительно обеих точек M, N , ибо $\Omega(x; y) = -\Omega(y; x)$.

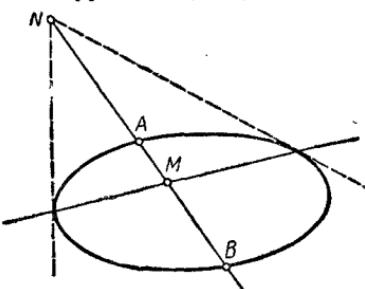
Возьмем теперь на плоскости какую-нибудь неподвижную точку $N(y_1, y_2, y_3)$ и найдем геометрическое место точек $M(x_1, x_2, x_3)$, сопряженных с ней по отношению к Γ . Это геометрическое место будет, очевидно, дано уравнением $\Omega(x; y) = 0$, или, подробнее:

$$x_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3) + x_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3) + x_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3) = 0, \quad (2)$$

где y_1, y_2, y_3 — постоянные, а x_1, x_2, x_3 — текущие координаты. Мы видим, что искомое геометрическое место есть прямая. Она и называется *полярой* точки N относительно линии Γ .

Уравнение (2) этого параграфа совпадает с уравнением (2) предыдущего, и, следовательно, оба определения поляры эквивалентны.

Точка N есть *полюс* прямой (2) относительно Γ .



Черт. 147

¹⁾ Параметр h можно, как мы знаем (§ 187), рассматривать как проективную координату на прямой MN , при основных точках M и N .

На основании сказанного очевидно, что соотношение (1) выражает следующее: точка M находится на поляре точки N и точка N находится на поляре точки M . Поэтому сопряженные точки можно характеризовать так: точки M и N сопряжены относительно Γ , если каждая из них расположена на поляре другой. Достаточно, очевидно, чтобы, например, точка M находилась на поляре точки N ; из этого уже вытекает, что и точка N расположена на поляре точки M . Это—непосредственное следствие того, что $\Omega(x; y) = \Omega(y; x)$.

Замечание. Определение поляры применимо и к случаю, когда Γ —распадающаяся линия второго порядка. Только в этом случае соответствие между полюсом и полярой не будет обратимо однозначным.

Читателю предлагается доказать следующее. Пусть Γ распадается на две различные прямые δ' , δ'' , пересекающиеся в некоторой точке O . Тогда поляра Δ всякой точки N , отличной от O ,—вполне определенная прямая, проходящая через O . Прямые Δ и ON гармонически сопряжены относительно прямых δ' и δ'' . Поляра точки O —неопределенная прямая. Всякая прямая Δ , проходящая через O , имеет бесчисленное множество полюсов; геометрическое место этих полюсов есть прямая Δ' , проходящая через O , гармонически сопряженная с Δ по отношению к δ' и δ'' .

Полюс всякой прямой, не проходящей через O , есть точка O .

Все это можно доказать, исходя из определения поляры, данного в этом параграфе, или принимая за ее определение уравнение (2) предыдущего параграфа.

Случай, когда Γ есть совокупность двух совпадающих прямых, предоставляем рассмотреть читателю.

§ 221. Полярность, определяемая линией второго порядка

Пусть по-прежнему

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1)$$

—уравнение нераспадающейся линии второго порядка Γ . Мы видели, что эта линия приводит в соответствие каждой точке $M(x_1, x_2, x_3)$ —полюсу—вполне определенную прямую $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ —поляру и обратно; соотношения, связывающие координаты полюса и поляры, имеют вид (§ 219)

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{array} \right\} \quad (2)$$

решение которых относительно x_1, x_2, x_3 дает

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ x_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ x_3 = b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{array} \right\} \quad (3)$$

где по-прежнему $b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}$.

Соответствие (2) или (3) между точками и прямыми на плоскости есть частный вид *корреляции* (взаимности) между двумя совмещенными плоскостями (§ 194); этот частный вид характеризуется тем, что таблица коэффициентов подстановки (2), а следовательно, и (3),—*симметричная*.

Такая корреляция называется *полярностью*. Если дана полярность, т. е. корреляция (2) с произвольной симметричной таблицей¹⁾, то всегда существует

¹⁾ Подразумевается, что ее определитель отличен от нуля.

линия второго порядка, определяющая эту полярность: уравнение этой линии есть (1), если под $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ подразумевать квадратичную форму с коэффициентами a_{ij} .

Характерная геометрическая особенность полярностей, выделяющая их среди корреляций общего вида, заключается в свойстве, которое было указано в конце предыдущего параграфа, а именно: если точка M находится на поляре точки N , то и точка N находится на поляре точки M .

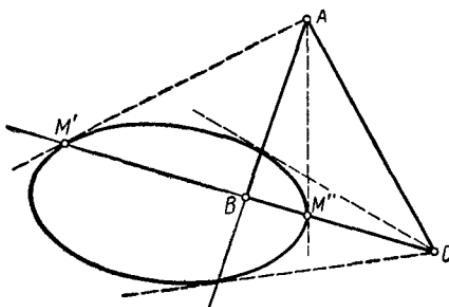
Из указанного свойства вытекает, в частности, что если прямая Δ' вращается вокруг точки M , то полюс M' прямой Δ' описывает поляру Δ точки M , и что если точка M пробегает некоторую прямую Δ' , то поляра Δ точки M вращается вокруг полюса M' прямой Δ' .

Иными словами, геометрическое место полюсов прямых пучка с центром M есть прямолинейный ряд, расположенный на поляре Δ точки M ; геометрическое место поляр точек прямолинейного ряда, расположенного на прямой Δ , есть пучок с центром в полюсе M прямой Δ .

Из общих свойств корреляции (§ 194) вытекает, что упомянутые прямолинейные ряды и пучки проективны.

§ 222. Автополярный треугольник

Можно построить бесчисленное множество треугольников, обладающих тем свойством, что каждая его вершина является полюсом противоположной стороны по отношению к данной непраспадающейся линии второго порядка Γ . Действительно, возьмем произвольную точку A , не расположенную на Γ , и построим ее поляру (черт. 148); из этой поляре возьмем произвольную точку B , не расположенную на Γ , и сопряженную с ней точку C . Легко видеть, что треугольник ABC удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, по самому построению, BC есть поляра точки A . Далее, CA есть поляра точки B , ибо поляра точки B должна проходить через A (полюс прямой BC) и через C (так как C и B — сопряженные точки). Так же докажем, что AB — поляра точки C .



Черт. 148

Треугольник, обладающий указанным свойством, называется *автополярным*, или *самосопряженным* по отношению к Γ .

Если взять этот треугольник в качестве основного треугольника проективной системы координат, то уравнение линии Γ примет весьма простой вид. Действительно, пусть $\Phi(x_1, x_2, x_3)=0$ есть уравнение линии Γ , отнесенное к такой системе координат. Поляра точки $A(1, 0, 0)$ дается уравнением

$$x_1\Phi_1(1, 0, 0) + x_2\Phi_2(1, 0, 0) + x_3\Phi_3(1, 0, 0) = 0,$$

т. е.

$$x_1a_{11} + x_2a_{21} + x_3a_{31} = 0.$$

Но эта поляра, по условию, есть прямая BC , уравнение которой имеет вид

$$x_1 = 0.$$

Следовательно, мы должны иметь $a_{21} = a_{31} = 0$. Таким же образом докажем, что все коэффициенты a_{ij} с различными значками равны нулю и что, следовательно, уравнение линии Γ имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$$

или, введя другие обозначения,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0. \quad (1)$$

Ясно, что и обратно: если уравнение линии Γ имеет вид (1), то основной треугольник является автополярным относительно этой линии.

Теперь мы видим, каким геометрический смысл имеет приведение уравнения линии к виду (1) — приведение, о котором уже говорилось в § 211.

Замечание. Мы предполагали, что линия Γ — нераспадающаяся. Но легко сообразить, как построить автополярный треугольник и в случае распадающейся линии¹⁾. Предоставляем читателю сделать это самому, а также показать, что и в этом случае мы будем иметь уравнение вида (1), с той лишь разницей, что не все три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будут отличны от нуля.

§ 223. Сопряженные прямые.

Тангенциальное уравнение линии второго порядка. Понятие класса

Взаимным с понятием сопряженных точек является понятие сопряженных прямых. Две прямые называются сопряженными относительно линии второго порядка Γ , если каждая из них проходит через полюс другой. Например, на черт. 148 прямые AB и AC — сопряженные (так же как и любая пара сторон автополярного треугольника).

Любая касательная к Γ сопряжена сама с собой (так как касательная содержит свой полюс) и обратно: прямая, сопряженная сама с собой, является касательной (так как прямая, содержащая свой полюс — касательная).

Две прямые AB, AC , проведенные из данной точки A (не находящейся на Γ), сопряженные относительно Γ , гармонически сопряжены относительно касательных AM', AM'' , проведенных из A к Γ . Действительно (черт. 148), пусть M', M'' — точки касания и, следовательно, $M'M''$ — поляра точки A . Точки B и C пересечения рассматриваемых прямых с этой полярой гармонически сопряжены относительно точек M', M'' (ибо, например, B есть полюс AC). Следовательно, и прямые AB, AC гармонически сопряжены с прямыми AM', AM'' .

Итак, соответствие между сопряженными прямыми пучка с данным центром A есть инволюция, двойными прямыми которой являются касательные из A к Γ .

Найдем теперь аналитическое выражение условия того, чтобы две данные прямые $\Delta(u_1 u_2, u_3)$ и $\Delta'(v_1 v_2, v_3)$ были сопряженными. Мы будем по-прежнему считать, что Γ — нераспадающаяся линия.

Полюс $M(x_1, x_2, x_3)$ прямой Δ дается формулами (4) § 219:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ x_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ x_3 = b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{array} \right\} \quad (1)$$

где по-прежнему $b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}$.

Для того чтобы прямая Δ' проходила через M , необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось равенство

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \quad (2)$$

или

$$\begin{aligned} v_1(b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3) + v_2(b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3) + \\ + v_3(b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

¹⁾ См. замечание в конце § 220.

Обозначим через $\Psi(u_1, u_2, u_3)$ квадратичную форму с коэффициентами b_{ij} :

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i,j} b_{ij} u_i u_j. \quad (4)$$

Тогда соотношение (3) примет вид

$$v_1 \Psi_1(u_1, u_2, u_3) + v_2 \Psi_2(u_1, u_2, u_3) + v_3 \Psi_3(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad (3a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \quad \Psi_2(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}, \\ \Psi_3(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial u_3}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким образом, мы имеем полную аналогию с соотношением, связывающим координаты сопряженных точек, только вместо координат точек мы имеем координаты прямых, а вместо формы Φ — форму Ψ .

Формы Φ и Ψ , коэффициенты a_{ij} и b_{ij} которых связаны соотношениями

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}, \quad (*)$$

называются *союзными*. Легко видеть, что мы имеем также¹⁾

$$a_{ij} = \frac{B_{ij}}{B}, \quad (**)$$

где

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

a_{ij} — алгебраическое дополнение элемента b_{ij} в определителе B , который отличен от нуля, как это следует из факта разрешимости системы (1) относительно u_1, u_2, u_3 .

Для того чтобы прямая $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ была касательной к линии Γ , необходимо и достаточно, чтобы она совпадала с сопряженной с ней²⁾ прямой, т. е. чтобы v_1, v_2, v_3 были пропорциональны u_1, u_2, u_3 ; так как коэффициент пропорциональности не играет роли, то мы можем считать

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2, \quad v_3 = u_3.$$

Подставляя u_1, u_2, u_3 вместо v_1, v_2, v_3 в (3) или (3a), получим *уравнение*

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad (6)$$

выражающее необходимое и достаточное условие того, чтобы прямая $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ была касательной к Γ .

Поэтому уравнение (6) называется *уравнением линии Γ в координатах касательной*, или *уравнением в тангенциальных координатах* или еще *тангенциальным уравнением*.

Если дана неособенная квадратичная форма $\Psi(u_1, u_2, u_3)$, то всегда можно найти линию второго порядка Γ , для которой уравнение (6) является урав-

¹⁾ Действительно, решая (1) относительно u_1, u_2, u_3 , мы должны получить снова соотношения (3) § 219 (только теперь мы имеем x_1, x_2, x_3 вместо y_1, y_2, y_3), откуда и вытекает наше утверждение.

²⁾ Действительно, касательная к Γ содержит свой полюс и потому является сопряженной с собой, и обратно.

нением в тангенциальных координатах; уравнением этой линии в точечных координатах будет $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$, где Φ —форма, союзная с Ψ .

Вообще можно показать (на этом мы не останавливаемся), что однородные координаты u_1, u_2, u_3 касательной к любой алгебраической линии связаны алгебраическим уравнением вида $\Psi(u_1, u_2, u_3) = 0$, где Ψ —однородный полином. Это уравнение называется *тангенциальным уравнением данной линии*, а степень его—*классом линии*. Порядок и класс линии вообще не совпадают. Но в случае нераспадающихся линий второго порядка, как мы видели, класс также равен двум. Следовательно, нераспадающиеся линии второго порядка суть в то же время линии второго класса.

Класс данной линии может быть определен геометрически, как *число касательных, которые можно к ней провести из произвольной точки, не расположенной на ней*.

Действительно, пусть $M(x_1, x_2, x_3)$ —некоторая точка плоскости. Координаты (u_1, u_2, u_3) касательной, проведенной через M к данной линии, должны одновременно удовлетворять двум уравнениям:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = 0 \text{ и } u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0;$$

число решений этой системы равно, вообще говоря, степени полинома Ψ , откуда и вытекает наше утверждение (разыскиваются, разумеется, не сами величины u_1, u_2, u_3 , а их отношения).

§ 224. Применение принципа взаимности к линиям второго порядка

Полная аналогия уравнений линии второго порядка в точечных и тангенциальных координатах позволяет и здесь применить принцип взаимности. А именно, вместо того, чтобы рассматривать линию второго порядка как носителя точек, ее можно рассматривать как носителя прямых (касательных к ней).

Из всякого предложения, относящегося к полюсу, поляре, касательной, можно получить «взаимное» предложение, заменяя слова «точки, принадлежащие линии» словами «касательные к линии», слово «полюс» словом «поляр» и обратно, и производя остальные замены по правилам, указанным раньше в § 170.

Мы не будем давать здесь подробного обоснования этого положения. Но читатель может пользоваться им как руководящей нитью при проведении доказательств предложений, взаимных предложениям, уже доказанным выше.

В качестве приложения мы рекомендуем читателю провести доказательства следующих предложений.

1°. Теорема Брианшона (взаимная с теоремой Паскаля): прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника,писанного вокруг линии второго порядка, пересекаются в одной точке.

2°. Теоремы, взаимные с теоремами § 215:

а) Пусть f и g —две касательные к линии второго порядка Γ . Рассмотрим прямолинейные ряды, на них расположенные, и приведем в соответствие те точки этих рядов, которые получаются в пересечении прямых f и g с касательными к Γ . Полученное таким образом соответствие будет проективным.

б) Прямые, соединяющие соответствующие точки двух проективных прямолинейных рядов, являются касательными к некоторой линии второго порядка Γ , касающейся прямых, на которых расположены данные ряды.