

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

АФФИННЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. АФФИННАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ. ЦЕНТР, ДИАМЕТРЫ, АСИМПТОТЫ

§ 225. Аффинная классификация линий второго порядка

Мы знаем, что аффинные преобразования (на плоскости) составляют подгруппу проективных, характеризуемую тем, что при аффинных преобразованиях несобственная прямая остаётся несобственной (см. конец § 179). Поэтому аффинные свойства фигур характеризуются их взаимоотношением с несобственной прямой. Исходя из этого соображения, мы начнём изучение аффинных свойств линий второго порядка с рассмотрения пересечения их с несобственной прямой.

Пусть

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

— уравнение линии второго порядка в неоднородных декартовых координатах, x , y и пусть

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) = \\ - a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 \end{aligned} \quad (1a)$$

— уравнение той же линии в однородных декартовых координатах¹⁾.

Мы будем считать во всём дальнейшем (если противное не оговорено), что коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} не равны нулю одновременно, ибо в противном случае линия (1), если ограничиться рассмотрением собственных точек, не будет линией второго порядка. Напомним, что мы условились считать все коэффициенты *действительными*.

¹⁾ В противоположность тому, что мы имели в предыдущей главе, здесь существенно применение декартовых (а не проективных общего вида) координат. Так как при изучении аффинных свойств несобственные элементы играют особую роль, то обычно удобнее пользоваться неоднородными декартовыми координатами; так мы и будем поступать в дальнейшем за немногими исключениями (как, например, в этом параграфе), которые будут всегда оговорены.

Найдём пересечение линии (1а) с несобственной прямой

$$t = 0, \quad (2)$$

т. е. найдём несобственные точки данной линии. Подставив $t = 0$ в (1а), получим уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \quad (3)$$

определяющее значения отношения $\frac{y}{x}$ (или $\frac{x}{y}$). Будем сперва считать, что $a_{22} \neq 0$; тогда мы не можем иметь $x = 0$ (ибо в противном случае мы бы получили также $y = 0$, а x, y, t не могут быть равны нулю одновременно) и поэтому можем разделить уравнение (3) на x^2 , что приводит к уравнению

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0, \quad (3a)$$

определяющему значения угловых коэффициентов $k = \frac{y}{x}$ направлений, в которых удалены искомые несобственные точки.

Характер корней уравнения (3а) зависит от знака выражения $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, которое есть не что иное, как определитель A_{33} , введённый в § 208:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \quad (4)$$

и представляющий собою алгебраическое дополнение элемента a_{33} в дискриминанте

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

квадратичной формы Φ . Напомним, что A_{33} есть дискриминант квадратичной формы

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad (6)$$

получаемой из Φ вычёркиванием членов, содержащих t .

Если $A_{33} > 0$, то уравнение (3а) имеет два мнимых сопряжённых корня, и несобственная прямая пересекает линию в двух мнимых точках; если $A_{33} < 0$, то уравнение имеет два действительных корня, и несобственная прямая пересекает линию в двух различных действительных точках; если, наконец, $A_{33} = 0$, то уравнение имеет один двойной корень, и несобственная прямая является «касательной» к линии. Легко проверить, что заключения остаются в силе и при $a_{22} = 0$ ¹⁾.

¹⁾ Действительно, при $a_{22} = 0$ имеем $A_{33} = -a_{12}^2$. Если $a_{12} \neq 0$, то $A_{33} < 0$; при этом уравнение (3а) имеет два действительных корня, один из которых равен ∞ , а другой — конечный. Если же $a_{12} = 0$, то $A_{33} = 0$; уравнение (3а) имеет один двойной корень $k = \infty$.

В первом случае ($A_{33} > 0$) мы будем говорить, что линия — *эллиптического типа*, во втором ($A_{33} < 0$), что она *гиперболического типа*, а в третьем ($A_{33} = 0$), что она *параболического типа*.

Нераспадающаяся линия эллиптического типа называется эллипсом, нераспадающаяся линия гиперболического типа — гиперболой, нераспадающаяся линия параболического типа — параболой.

Мы увидим ниже (§ 238), что эти определения эллипса, гиперболы и параболы приводят к тем же результатам, что и определения, данные раньше (в главе VII), с той только разницей, что эллипс, по данному здесь определению, может быть не только действительным (тогда мы будем иметь прежний случай), но и мнимым. Но пока это не будет доказано, мы будем под *эллипсом, гиперболой и параболой* подразумевать линии, определенные в настоящем параграфе.

Мы знаем, что распадающаяся линия второго порядка характеризуется равенством $A = 0$, где A — определитель (5), и таким образом мы получаем следующие признаки, характеризующие эллипс, гиперболу и параболу:

- При $A \neq 0$, $A_{33} > 0$ линия — эллипс;
- » $A \neq 0$, $A_{33} < 0$ » — гипербола;
- » $A \neq 0$, $A_{33} = 0$ » — парабола.

Далее, при $A = 0$ мы имеем распадающуюся линию второго порядка либо эллиптического типа (при $A_{33} > 0$), либо гиперболического типа (при $A_{33} < 0$), либо параболического (при $A_{33} = 0$).

Мы увидим ниже (§ 234), что в первом случае линия распадается на две мнимые сопряженные непараллельные прямые, во втором — на две действительные непараллельные прямые, а в третьем — на две параллельные прямые; это последнее будет сейчас доказано.

§ 225а. О распадающейся линии параболического типа

Распадающаяся линия параболического типа характеризуется равенствами:

$$A = 0, \quad A_{33} = 0. \quad (1)$$

Докажем, что в этом случае линия представляет собою совокупность двух параллельных прямых, и вместе с тем найдём эти прямые.

Заметим прежде всего, что из равенств (1) следуют ещё два равенства ¹⁾: $A_{13} = A_{23} = 0$, так что мы будем иметь

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0, \quad (2)$$

¹⁾ Из условия $A = 0$ следует, что все определители второго порядка, составленные из таблицы

A_{11}	A_{12}	A_{13}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{31}	A_{32}	A_{33}

или, подробнее, $a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, или ещё

$$a_{12}a_{23} = a_{22}a_{13}, \quad a_{12}a_{13} = a_{11}a_{23}, \quad a_{11}a_{22} = a_{12}^2. \quad (2a)$$

Ясно, что обратно, из (2) или (2a) вытекает и (1).

На основании (2a) легко придать уравнению нашей линии

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (3)$$

такой вид, из которого сразу будет следовать требуемый результат. Действительно, предположим, например, что $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то необходимо $a_{22} \neq 0$ ¹), и можно провести те же рассуждения, поменяв ролями a_{11} и a_{22} .

Умножая обе части уравнения (3) на a_{11} , получим

$$a_{11}^2x^2 + 2a_{11}a_{12}xy + a_{11}a_{22}y^2 + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{11}a_{23}y + a_{11}a_{33} = 0,$$

или, в силу равенств (2a),

$$a_{11}^2x^2 + 2a_{11}a_{12}xy + a_{12}^2y^2 + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{12}a_{13}y + a_{11}a_{33} = 0.$$

Очевидно, что последнее уравнение можно переписать так:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0,$$

или, ввиду того, что согласно нашему способу обозначений

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22} \quad (*)$$

(A_{22} есть алгебраическое дополнение элемента a_{22} в дискриминанте A), ещё так:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = \pm \sqrt{-A_{22}}. \quad (4)$$

Значит, наша линия есть совокупность двух параллельных прямых

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - \sqrt{-A_{22}} = 0, \\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \sqrt{-A_{22}} = 0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Прямые будут действительными, если $A_{22} < 0$, мнимыми, если $A_{22} > 0$, совпадающими, если $A_{22} = 0$.

равны иулю (см. Добавление, § 6а, Следствие). В частности,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}A_{33} - A_{13}^2 = 0, \quad \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = 0.$$

Но так как $A_{33} = 0$, то $A_{13} = A_{23} = 0$.

¹⁾ Если $a_{11} = a_{22} = 0$, то из $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ следует, что $a_{12} = 0$, т. е. что $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, а это противоречит принятому раньше условию.

Если $a_{22} \neq 0$, то, меняя ролями x , y и значки 1, 2, убеждаемся, что уравнения этих прямых могут быть представлены и так:

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \pm \sqrt{-A_{11}} = 0, \quad (6)$$

где

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2. \quad (**)$$

Если обе величины a_{11} и a_{22} отличны от нуля, то пригодны одновременно и уравнения (4) и уравнения (6). Отсюда следует, между прочим, что в рассматриваемом общем случае A_{11} и A_{22} должны иметь один и тот же знак (положительный, если линии мнимые, отрицательный, если они действительные). Это легко доказать и непосредственно.

Если $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, то, как легко убедиться на основании (2а) и (*), будем иметь ещё $a_{12} = a_{13} = A_{22} = 0$, и уравнение (4) свидется к тождеству $0 = 0$, как и следовало ожидать, ибо оно получено умножением данного уравнения на величину a_{11} , равную нулю. В этом случае следует пользоваться уравнением (6); аналогичное замечание относится к случаю $a_{22} = 0$, $a_{11} \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Мы условились считать, что коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} в уравнении линии второго порядка не равны одновременно нулю. Иногда, однако, имеет смысл¹⁾ рассматривать и случай, когда $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. В этом случае уравнение нашей линии в однородных координатах будет иметь вид

$$2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = (2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33})t = 0,$$

так что линия распадается на две прямые:

$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}t = 0 \text{ и } t = 0,$$

из которых вторая — несобственная (первая также может оказаться несобственной, если $a_{13} = a_{23} = 0$).

Такую распадающуюся линию следует отнести к параболическому типу, как совокупность двух прямых, имеющих общую несобственную точку²⁾.

§ 226. Асимптотические направления

Направления, в которых удалены несобственные точки данной линии, называются *асимптотическими*. Если X , Y , 0 — однородные координаты одной из несобственных точек линии, то несобствен-

¹⁾ Например, при изучении вопроса о пересечении поверхности второго порядка плоскостью; тогда, в частности, мы можем встретиться со случаем, который рассматривается здесь.

²⁾ Условия $A = 0$, $A_{33} = 0$, характеризующие распадающуюся линию параболического типа, очевидно, здесь соблюdenы.

ная точка удалена в направлении вектора X, Y ; координаты этого вектора удовлетворяют уравнению (§ 225)

$$\Phi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0; \quad (1)$$

обратно, направление, удовлетворяющее этому условию, будет асимптотическим.

Сделаем одно замечание, касающееся линий параболического типа. Не нарушая общности, можно в этом случае считать $a_{22} \neq 0$ (если $a_{22} = 0$, можно провести аналогичные рассуждения, поменяв ролями X и Y). При $a_{22} \neq 0$ необходимо $X \neq 0$ (сравн. § 225), и (1) можно переписать так:

$$a_{22} \left(\frac{Y}{X} \right)^2 + 2a_{12} \frac{Y}{X} + a_{11} = 0;$$

решая это уравнение, получим (принимая во внимание, что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$)

$$\frac{Y}{X} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad (2)$$

откуда следует

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y = 0, \\ a_{12}X + a_{22}Y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Итак, координаты вектора асимптотического направления для линии параболического типа удовлетворяют условиям (3); обратно, из (3) следует, что (X, Y) имеет асимптотическое направление. Действительно, если умножим уравнения (3) соответственно на X и на Y и сложим, то получим уравнение (1).

Из (3) следует, что если наша линия есть совокупность двух параллельных прямых, то асимптотическое направление (X, Y) параллельно этим прямым (см. уравнения этих прямых в предыдущем параграфе).

§ 227. Уравнение, определяющее пересечение линии второго порядка с прямую, в неоднородных декартовых координатах

Пусть по-прежнему

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

— уравнение данной линии второго порядка в неоднородных декартовых координатах.

Составим теперь уравнение, определяющее пересечение линии (1) с прямую Δ , которую представим параметрически так (§ 88):

$$x = x_0 + Xs, \quad y = y_0 + Ys. \quad (2)$$

Напомним, что x_0, y_0 обозначают координаты некоторой (произвольно выбранной) постоянной точки M_0 прямой Δ , (X, Y) — вектор направления этой прямой, а s — переменный параметр, геометрическое значение которого следующее: если M — точка, соответствующая данному значению s , то s есть отношение вектора $\overrightarrow{M_0M}$ к вектору направления $P(X, Y)$, т. е.

$$\overrightarrow{M_0M} = s \cdot P.$$

Чтобы найти точки пересечения, подставим в (1) вместо x, y их выражения (2). Результат подстановки можно сразу написать, пользуясь формулой (11а) § 208, если в ней вместо x, y взять $X \cdot s, Y \cdot s$, а вместо x', y' — соответственно x_0, y_0 . Это дает

$$\varphi(X, Y) s^2 + 2 [XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0)] s + F(x_0, y_0) = 0, \quad (3)$$

где применяются прежние обозначения:

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2, \quad (4)$$

$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \quad (5)$$

Уравнение (3) имеет два корня s_1, s_2 , подстановка которых в (2) даёт две точки пересечения: (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Если

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0, \quad (6)$$

то по крайней мере один из корней равен бесконечности и, следовательно, одна из точек пересечения — несобственная. Мы видим, что, как и следовало ожидать, данная прямая в этом случае имеет асимптотическое направление.

Упражнения и дополнения

1. Найти уравнения касательной в точке (x_0, y_0) данной линии второго порядка, исходя непосредственно из уравнения (3).

Решение. Считая, что в уравнении (3) x_0, y_0 — координаты точки данной линии, будем иметь $F(x_0, y_0) = 0$. Уравнение (3) имеет, в этом случае, один из корней $s = 0$. Выражая, что и второй корень равен нулю, получим

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0.$$

Заменяя X, Y через пропорциональные им величины $x - x_0, y - y_0$, где x, y — координаты произвольной точки касательной, получим требуемое уравнение

$$(x - x_0) F_1(x_0, y_0) + (y - y_0) F_2(x_0, y_0) = 0,$$

совпадающее с уравнением (6а) § 217.

2. Найти асимптотические направления линий, заданных уравнениями:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad 2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad 3) y^2 = 2px.$$

Ответ. Угловые коэффициенты асимптотических направлений даются формулами:

$$1) \ k = \frac{Y}{X} = \pm i \frac{b}{a} \quad (\text{мнимые направления});$$

$$2) \ k = \pm \frac{b}{a}; \quad 3) \ k = 0.$$

3. Доказать, что когда линия есть совокупность двух пересекающихся прямых, то асимптотические направления параллельны этим прямым. Это непосредственно очевидно и геометрически.

§ 228. Центр линии второго порядка

Центром линии второго порядка называется точка, обладающая тем свойством, что любая хорда, проходящая через неё, делится ею пополам. (Хордой мы называем отрезок прямой, соединяющий две любые точки линии.) Выясним, имеет ли данная линия второго порядка центр, и найдём способ его определения.

Пусть (x_0, y_0) — координаты искомого центра C . Проведём через $C(x_0, y_0)$ какую-либо прямую $x = x_0 + Xs, y = y_0 + Ys$, имеющую неасимптотическое направление; эта прямая пересечёт нашу линию в двух точках M_1 и M_2 , положение которых определяется уравнением (3) предыдущего параграфа. Для того чтобы точка C была серединой хорды M_1M_2 , необходимо и достаточно условие $s_1 = -s_2$, т. е. $s_1 + s_2 = 0$, где s_1 и s_2 — корни упомянутого уравнения. А для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при первой степени s в этом уравнении был равен нулю, т. с. чтобы

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0. \quad (1)$$

Если точка C — центр, то это условие должно быть соблюдено при всевозможных направлениях секущей прямой, т. е. при всех возможных значениях X и Y . Следовательно, мы должны иметь

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x_0, y_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ F_2(x_0, y_0) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Очевидно, что и обратно, всякая точка $C(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют двум последним уравнениям, будет центром.

Мы видим, что центр определяется пересечением следующих двух прямых¹⁾:

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ Геометрическое значение этих прямых будет выяснено в § 230.

В случае линий эллиптического и гиперболического типов определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \neq 0$$

и предыдущие уравнения имеют одно и только одно решение.

Итак, линии эллиптического и гиперболического типов имеют один вполне определенный центр.

В случае линии параболического типа $A_{33} = 0$ и прямые (3) параллельны. Если они не совпадают, то центра, в собственном смысле, нет; мы, однако, будем иногда говорить, что имеется один несобственный центр — несобственная точка пересечения прямых (3). Если прямые (3) совпадают, то всякая их точка является центром; в этом случае имеется прямая центров. Легко видеть, что в этом случае рассматриваемая линия второго порядка есть совокупность двух параллельных прямых. Действительно, если прямые (3) совпадают, то коэффициенты их уравнений должны быть пропорциональными, а из этого следует, что определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

равен нулю (ибо в нём две первые строки пропорциональны). Значит, $A = A_{33} = 0$, откуда и следует наше утверждение (см. § 225а). Обратно, если данная линия — совокупность двух параллельных прямых, то прямые (3) совпадают, как это следует из равенств (§ 225а)

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0.$$

Из предыдущего следует, что парабола, как нераспадающаяся линия параболического типа, не имеет центра или, лучше, имеет один несобственный центр; он удалён, как легко видеть, в асимптотическом направлении¹⁾.

Выясним ещё вопрос: когда центр линии второго порядка расположен на самой линии (мы имеем в виду собственный центр).

Мы знаем, что если точка (x_0, y_0) находится на линии и если её координаты одновременно удовлетворяют уравнениям (2), то линия — распадающаяся и (x_0, y_0) есть двойная точка линии²⁾. Итак, если

¹⁾ Угловой коэффициент прямых (3) (в этом случае параллельных) равен

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}},$$

т. е. равен угловому коэффициенту асимптотического направления; см. § 226, формула (2).

²⁾ См. конец § 218.

центр находится на самой линии, то линия — распадающаяся; центр в этом случае есть двойная точка линии.

Важно заметить следующее: если начало координат находится в центре линии второго порядка (или одном из центров), то в ее уравнении отсутствуют члены первой степени. Действительно, в этом случае уравнения (3) должны удовлетворяться значениями $x = 0, y = 0$, откуда следует, что $a_{13} = a_{23} = 0$. Уравнение линии в этом случае имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \quad (4)$$

Обратно, очевидно, что линия, представляемая уравнением вида (4) имеет центр (или один из центров) в начале координат.

Во всём дальнейшем мы будем называть *центрическими* те линии, которые имеют *один определенный собственный центр*.

Упражнения

1. Найти центр кривой

$$x^2 - xy + 3y^2 + x - 1 = 0.$$

Решение. Приравнивая нулю частные производные левой части по x и по y , получим

$$2x - y + 1 = 0, \quad -x + 6y = 0.$$

Решение этих уравнений дает

$$x = -\frac{6}{11}, \quad y = -\frac{1}{11}.$$

Следовательно, кривая имеет (единственный) центр в точке

$$\left(-\frac{6}{11}, -\frac{1}{11} \right).$$

2. Найти центр кривой

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0.$$

Решение. Уравнения, определяющие центр, суть

$$2x + 2y + 2 = 0, \quad 2x + 2y + 1 = 0.$$

Эти уравнения не имеют общего решения, так как изображают параллельные несовпадающие прямые. Следовательно, линия не имеет центра (имеет несобственный центр).

3. Найти центр линии

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 5 = 0.$$

Решение. В этом случае уравнения, определяющие центр, будут

$$2x + 2y + 1 = 0, \quad 2x + 2y + 1 = 0.$$

Линия имеет бесчисленное множество центров, а именно, все точки прямой

$$2x + 2y + 1 = 0.$$

§ 229. Асимптоты

Асимптотой линии второго порядка мы будем теперь называть прямую, обе точки пересечения которой с линией сливаются в одну несобственную точку¹⁾. Иными словами, асимптоты — это касательные в несобственных точках линии. Ясно, что асимптоты имеют асимптотические направления.

Так как эллипс не имеет действительных несобственных точек, то он не имеет действительных асимптот; гипербола, имеющая две различные несобственные точки, имеет две действительные асимптоты. Наконец, обе несобственные точки параболы сливаются в одну. Следовательно, несобственная прямая является касательной в несобственной точке параболы, т. е. (единственной) асимптотой параболы является несобственная прямая. Собственных асимптот у параболы нет.

Всё это легко подтвердить аналитически и вместе с тем найти уравнения асимптот. Начнём с решения последней задачи.

Пусть (X, Y) — вектор направления искомой асимптоты, а $M(x, y)$ — какая-либо её точка. Если в уравнении (3) § 227 мы возьмём в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ точку $M(x, y)$, то коэффициенты при s и s^2 в этом уравнении должны будут обратиться в нуль, для того чтобы оба его корня были равны бесконечности. Следовательно, мы должны иметь

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0 \quad (1)$$

и

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0.$$

Первое уравнение определяет отношение $\frac{Y}{X}$ и выражает не что иное, как то, что вектор (X, Y) имеет асимптотическое направление.

Второе уравнение при постоянных X, Y , удовлетворяющих предыдущему условию, даёт уравнение асимптоты. Уравнение (2) в раскрытом виде напишется так:

$$(a_{11}X + a_{21}Y)x + (a_{12}X + a_{22}Y)y + (a_{13}X + a_{23}Y) = 0. \quad (2a)$$

Коэффициенты при x и y , т. е. величины

$$a = a_{11}X + a_{21}Y, \quad b = a_{12}X + a_{22}Y,$$

не могут быть равны нулю одновременно, если линия центральная, т. е. если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Следовательно, в этом случае

¹⁾ Раньше (см. § 198) было дано иное определение асимптоты. Легко показать, что в случае линий второго порядка оба эти определения сводятся к одному и тому же, если исключить случай, когда линия есть совокупность двух параллельных прямых. См. конец этого параграфа и упражнения.

прямая (2) — собственная; она, далее, проходит, очевидно, через центр¹⁾.

Итак, асимптоты центральных линий суть прямые асимптотического направления, проходящие через центр. В случае линий гиперболического типа — асимптоты действительные, в случае линий эллиптического типа они — мнимые.

Рассмотрим теперь линии параболического типа. В этом случае, как мы знаем, для асимптотического направления $a = b = 0$ (§ 226).

Следовательно, в случае линии параболического типа асимптота — либо несобственная, либо не вполне определённая (определенено только её направление X, Y). Последний случай может представиться только тогда, когда одновременно

$$a_{11}X + a_{21}Y = 0, \quad a_{12}X + a_{22}Y = 0, \quad a_{13}X + a_{23}Y = 0; \quad (*)$$

но последние равенства возможны, очевидно, только в случае

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0,$$

т. е. когда наша линия — совокупность двух параллельных прямых (см. § 225а).

Итак, парабола не имеет асимптот в собственном смысле; её единственной асимптотой является несобственная прямая. В случае же пары параллельных прямых асимптотой является, как легко видеть, всякая прямая, параллельная им. Это и понятно, так как пара параллельных прямых пересекается со всякой прямой, ей параллельной, в одной «двойной» несобственной точке.

Упражнения и дополнения

1 Найти асимптоты линии

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ответ. Прямые

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

т. е. пара прямых, даваемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

2. Найти асимптоты линии

$$y^2 = 2px.$$

Ответ. Асимптота — несобственная прямая.

3. Показать, что асимптотами пары пересекающихся прямых являются сами эти прямые.

1) Ибо центр есть пересечение прямых $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

§ 230. Диаметры линий второго порядка

Рассмотрим прямые, параллельные какому-нибудь данному не асимптотическому направлению.

Каждая из этих прямых пересекает данную линию второго порядка в двух (действительных или мнимых) точках M_1 и M_2 и определяет хорду M_1M_2 . Геометрическое место середин этих хорд называется *диаметром, сопряженным с данным направлением*. Итак, *диаметр данной линии второго порядка, сопряженный с данным направлением, есть геометрическое место середин хорд, параллельных данному направлению*. Это понятие является непосредственным обобщением понятия диаметра окружности, известного из элементарной геометрии. А именно, если исходить из данного здесь определения, но ограничиться рассмотрением лишь действительных точек окружности, то диаметром окружности, сопряжённым с данным направлением, будет заключённая внутри окружности часть прямой, проходящей через центр и перпендикулярной к данному направлению (черт. 149). Мы увидим ниже, что если учитывать также мнимые точки окружности, то под диаметром следует подразумевать всю упомянутую прямую.

Поставим теперь себе задачу: *найти диаметр линии второго порядка, сопряженный с данным направлением*.

Пусть $\mathbf{P} = (X, Y)$ — вектор данного (не асимптотического) направления. Пусть (x_0, y_0) — какая-либо точка искомого диаметра. Найдём уравнение, которому должны удовлетворять координаты этой точки.

Прямая, проходящая через (x_0, y_0) и параллельная данному направлению (X, Y) , может быть представлена параметрически следующим образом:

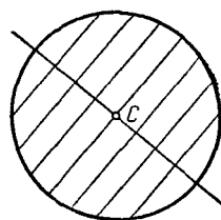
$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + Xs, \\ y = y_0 + Ys. \end{array} \right\} \quad (1)$$

При прежних обозначениях значения s_1 и s_2 , соответствующие точкам пересечения M_1 и M_2 прямой (1) с нашей линией второго порядка, определяются из уравнения (3) § 227.

Для того чтобы точка (x_0, y_0) была серединой хорды M_1M_2 , необходимо и достаточно условие $s_1 + s_2 = 0$. А для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы (сравн. § 228).

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0.$$

Это последнее равенство представляет собою необходимое и достаточное условие того, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала диаметру,



Черт. 149

сопряжённому с направлением (X, Y) . Обозначая x_0, y_0 просто через x, y , мы можем переписать предыдущее уравнение, представляющее собою уравнение искомого диаметра, в виде

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0, \quad (2)$$

или, подставляя значения F_1 и F_2 ,

$$X(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + Y(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \quad (2a)$$

Мы видим, что диаметр, сопряжённый с данным направлением, есть прямая ¹⁾. Запомним правило, по которому составляется уравнение этого диаметра: *частные производные функции $F(x, y)$ по x и по y умножаются соответственно на X и Y (коэффициенты данного направления), результаты складываются и сумма приравнивается нулю* ²⁾.

В частности, диаметр, сопряжённый с направлением $X \neq 0, Y \neq 0$ (направление оси Ox), есть прямая $F_1 = 0$, т. е.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad (3a)$$

а диаметр, сопряжённый с направлением оси Oy ($X = 0, Y \neq 0$), — прямая $F_2 = 0$, т. е.

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \quad (3b)$$

Прямые (3a) и (3b) встречались нам уже в § 228; это — те прямые, пересечение которых определяет центр линии. Теперь мы уяснили геометрический их смысл.

Все прямые (2) проходят через пересечение прямых (3a) и (3b). Следовательно, все диаметры проходят через центр (собственный или несобственный). Если имеется прямая центров, то все диаметры сливаются с ней; если центр несобственный, то все диаметры параллельны между собою (проходят через одну и ту же несобственную точку).

Прямая (2) не может быть несобственной или неопределенной, если, как мы пока предполагаем, направление (X, Y) не асимптотическое.

Действительно, уравнение (2a) можно переписать так:

$$ax + by + c = 0, \quad (2b)$$

где

$$a = a_{11}X + a_{21}Y, \quad b = a_{12}X + a_{22}Y, \quad c = a_{13}X + a_{23}Y.$$

Если $a = b = 0$, то (см. предыдущий параграф) линия необходима параболического типа и направление (X, Y) асимптотическое. Следовательно, для неасимптотического направления (X, Y) прямая (2) всегда собственная и определённая.

¹⁾ Мы увидим ниже, что прямая (2) — собственная и определённая, если (X, Y) — не асимптотическое направление.

²⁾ Полученное таким образом уравнение отличается от (2) или (2a) только множителем 2.

До сих пор мы считали, что направление (X, Y) неасимптотическое. Отбросим теперь это условие и будем называть диаметром, сопряжённым с направлением (X, Y) , прямую (2), каковы бы ни были X, Y (не равные одновременно нулю). Если (X, Y) — неасимптотическое направление, то мы получаем диаметр в обычном смысле слова. Если же (X, Y) — асимптотическое направление, то уравнение (2) обращается в уравнение асимптомы (см. предыдущий параграф). Таким образом, асимптому можно назвать *самосопряженным диаметром*. Уравнение (2b) может оказаться неопределенным, если $a = b = c = 0$. В этом случае наша линия второго порядка — совокупность двух параллельных прямых¹⁾ и (X, Y) — направление, параллельное этим прямым. В этом случае «диаметром», сопряжённым с асимптотическим направлением, может считаться всякая прямая.

Вообще во всех случаях всякая прямая, проходящая через центр (или один из центров), может быть названа диаметром. Например, в случае пары параллельных прямых всякая прямая пересекает прямую центров (в собственной или несобственной точке) и потому может считаться диаметром.

Рассмотрим теперь подробнее случай центральной линии (т. е. имеющей один собственный центр).

Легко найти соотношение, связывающее угловой коэффициент диаметра с угловым коэффициентом $k = \frac{Y}{X}$ направления, с которым он сопряжён. Угловой коэффициент k' диаметра даётся формулой

$$k' = -\frac{a_{11}X + a_{12}Y}{a_{21}X + a_{22}Y} = -\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{21} + a_{22}k}. \quad (4)$$

Правая часть не может быть неопределенной в рассматриваемом случае центральной линии, ибо в этом случае не может быть одновременно

$$a_{11}X + a_{12}Y = a_{21}X + a_{22}Y = 0.$$

Соотношение (4) может быть по уничтожении знаменателя представлено в виде

$$a_{22}kk' + a_{12}(k + k') + a_{11} = 0, \quad (5)$$

совершенно симметричном относительно k и k' . Решая (5) относительно k , получим, обратно, выражение k через k' :

$$k = -\frac{a_{11} + a_{12}k'}{a_{21} + a_{22}k'}. \quad (6)$$

Как и следовало ожидать, на основании симметрии соотношения (5), связывающего k и k' , формулу (6) можно получить из формулы (4), просто поменяв местами k и k' .

¹⁾ См. предыдущий параграф.

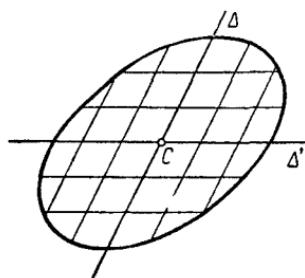
Рассмотрим теперь два диаметра Δ' и Δ , первый из которых сопряжён с направлением второго. Угловые коэффициенты k' и k этих диаметров связаны соотношением (4), из которого следует соотношение (6), показывающее, что диаметр Δ сопряжён с направлением диаметра Δ' .

Итак, каждый из двух диаметров Δ и Δ' делит пополам хорды, параллельные другому. Такие два диаметра называются *сопряженными диаметрами*.

На черт. 150 изображены два сопряжённых диаметра Δ и Δ' и хорды, им параллельные.

Заметим, что соответствие между сопряженными диаметрами есть инволюция (§ 190), как это следует из вида соотношения (5). Двойными прямыми этой инволюции являются прямые, угловые коэффициенты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0,$$



Черт. 150

Перейдём теперь к линии без центра (или, лучше, линии с одним несобственным центром), т. е. к параболе. В этом случае прямые (3a) и (3b) параллельны, но не совпадают. Их общее направление — асимптотическое, ибо их угловой коэффициент

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \quad (7)$$

есть угловой коэффициент асимптотического направления. Поэтому все диаметры параллельны асимптотическому направлению; этого и следовало ожидать, так как все диаметры проходят через несобственный центр, который удалён в асимптотическом направлении.

Наконец, если мы имеем пару параллельных прямых, то, как мы видели выше, диаметры, сопряжённые с неасимптотическими направлениями, сливаются с прямую центров, а диаметры, сопряжённые с асимптотическим направлением, — неопределённые прямые.

З а м е ч а н и е. Как видно из предыдущего, диаметр есть прямая (а не отрезок прямой). Однако часто точки пересечения его с линией называют *концами диаметра*. Далее, иногда под словом диаметр подразумевают длину отрезка диаметра, заключённого между точками пересечения его с линией (если мы имеем две точки пересечения на конечном расстоянии). Мы также будем применять

эти выражения, не опасаясь недоразумений, так как всегда будет ясно, о чём идёт речь.

Хорды, параллельные данному (действительному) направлению, могут быть частью действительными, частью мнимыми. Но и в последнем случае середины их — действительные точки, ибо, если действительная прямая пересекает нашу линию в мнимых точках, то эти точки — мнимые сопряжённые¹⁾, и, значит, середина отрезка, определяемого ими, — действительная точка.

§ 231. Связь диаметров с касательными

Докажем теперь следующее почти очевидное свойство. Рассмотрим касательную в какой-либо точке линии второго порядка: *диаметр, проходящий через точку касания, сопряжен с направлением касательной*. Это предложение легко доказать элементарным путём, исходя непосредственно из определения касательной и диаметра.

Пусть Δ — диаметр, проходящий через точку M_0 линии (черт. 151). Рассмотрим хорду $M'M''$, которую этот диаметр делит пополам; пусть M — середина этой хорды. Если перемещать хорду $M'M''$ параллельно самой себе, то точка M будет перемещаться по диаметру Δ . При приближении точки M к точке M_0 обе точки M' и M'' будут стремиться к точке M_0 , а следовательно, в пределе прямая, проходящая через M' и M'' , обратится в касательную. Отсюда и следует наше утверждение.

Легко также доказать наше предложение аналитически. Пусть (x_0, y_0) — координаты точки касания. Мы знаем, что диаметр, сопряжённый с направлением (X, Y) , имеет уравнение

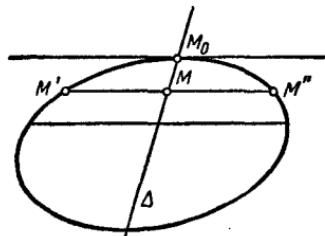
$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0.$$

Если диаметр проходит через точку (x_0, y_0) , то должно быть

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0,$$

откуда находим угловой коэффициент хорд, с которыми сопряжён этот диаметр:

$$\frac{Y}{X} = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}.$$



Черт. 151

¹⁾ Мы, как всегда, считаем, что коэффициенты уравнения данной линии второго порядка действительные.

Такой же угловой коэффициент имеет касательная в точке (x_0, y_0) , как это следует из уравнения касательной. Отсюда и вытекает наше утверждение.

Из этого, в частности, следует, что *касательные, проведенные из концов одного и того же диаметра, параллельны между собою*. Обратно, если мы имеем две касательные к линии второго порядка, параллельные между собою, то прямая, соединяющая точки касания, есть диаметр, сопряженный с направлением этих касательных.

§ 232. Диаметры как поляры несобственных точек

Диаметр, сопряженный с данным направлением, можно еще определить как *поляру несобственной точки, удаленной в данном направлении*.

В этом легко убедиться, если вспомнить определение поляры, данное в § 220. Действительно, пусть дана несобственная точка $M_0(X, Y, 0)$, удаленная в направлении вектора (X, Y) . Поляра этой точки есть по определению геометрическое место точек прямых δ , проходящих через M_0 [т. е. параллельных направлению (X, Y)], гармонически сопряженных с M_0 относительно точек A, B пересечения δ с нашей линией. Но так как точка M_0 — бесконечно удаленная, то сопряженной с ней точкой является середина отрезка AB , а отсюда и следует наше утверждение.

То, что сформулированное сейчас определение диаметра согласуется с данным прежде, легко проверить аналитически, если в уравнение поляры (§ 219), которое можно написать так:

$$y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3) + y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3) + y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

подставить $y_1 = X, y_2 = Y, y_3 = 0, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = 1$. Мы тогда как раз получим уравнение (2) § 230.

Аналогично, легко видеть, что центр C линии второго порядка есть полюс несобственной прямой.

Так как поляры всех точек несобственной прямой проходят через её полюс C , то все диаметры проходят через C , как мы уже доказали иным путём. В частности, если центр — несобственный, то все диаметры параллельны.

Сопряжённые диаметры суть, очевидно, прямые, проходящие через центр линии и сопряжёны относительно этой линии в смысле, указанном в § 223.

Самосопряжённые диаметры суть двойные прямые в инволюции сопряжённых диаметров, т. е. касательные к линии, проведённые из центра; следовательно, это — асимптоты, как мы уже видели и раньше.

Рообще, свойства центра и диаметров, доказанные в предыдущих параграфах, легко выводятся из определений, данных здесь. В частности, тот факт, что касательные, проведённые через концы одного и того же диаметра, параллельны, вытекает из того, что они должны пересечься в полюсе диаметра, т. е. в некоторой несобственной точке.

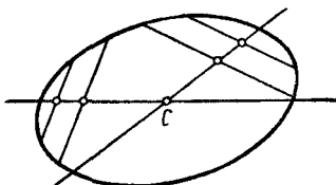
§ 233. Построение центра и диаметров линии второго порядка, заданной очертанием. Дополнительные хорды

Если линия второго порядка задана очертанием, то очень легко построить диаметр её, сопряжённый с данным направлением: для этого достаточно провести две какие-либо хорды, параллельные данному направлению, и построить прямую, проходящую через их середины (черт. 152).

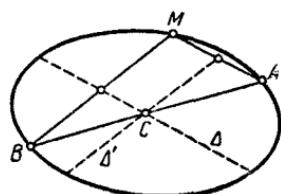
Взяв какое-либо другое направление и построив диаметр, сопряжённый с ним, найдём центр как пересечение двух диаметров.

Очень полезно для построений понятие *дополнительных хорд* центральных линий второго порядка. Так называются две хорды, соединяющие какую-либо точку M линии с концами какого-либо её диаметра AB . (См. черт. 153, а, б.)

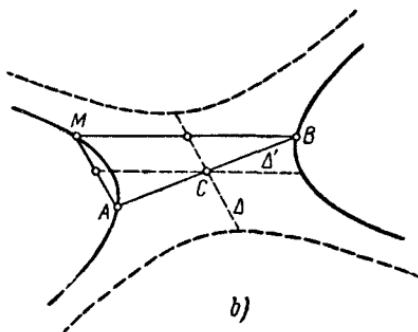
Легко видеть, что *диаметры, параллельные двум дополнительным хордам, являются сопряженными*. Действительно, диаметр Δ , параллельный хорде AM , делит пополам хорду BM (ибо он проходит



Черт. 152



а)



б)

Черт. 153

через середину стороны BA треугольника ABM и параллелен стороне AM). Значит, диаметр Δ сопряжён с направлением хорды BM , т. е. с направлением диаметра Δ' , параллельного хорде BM .

§ 234. Уравнение центральной линии второго порядка, отнесенной к сопряженным диаметрам

Мы знаем, что у всякой центральной линии второго порядка имеется бесчисленное множество пар сопряжённых диаметров. Посмотрим, какой вид примет уравнение такой линии, если начalo

координат взять в центре, а оси координат направить по двум сопряжённым диаметрам.

Так как центр находится в начале координат, то в уравнении линии будут отсутствовать члены первой степени, и оно будет иметь вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (1)$$

(см. § 228). Уравнение диаметра, сопряжённого с осью Ox , имеет вид (§ 230)

$$a_{11}x + a_{12}y = 0.$$

Так как эта прямая должна совпадать с осью Oy , то мы должны иметь $a_{12} = 0$. Следовательно, уравнение центральной линии, отнесённой к сопряжённым диаметрам, имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \quad (2)$$

В этом уравнении a_{11} и a_{22} отличны от нуля, ибо в противном случае величина $A_{33} = a_{11}a_{22}$ была бы равна нулю и линия не была бы центральной.

Рассмотрим сперва случай, когда $a_{33} \neq 0$. Деля обе части (2) на a_{33} и полагая

$$\lambda_1 = -\frac{a_{11}}{a_{33}}, \quad \lambda_2 = -\frac{a_{22}}{a_{33}},$$

получим уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1. \quad (3)$$

Если λ_1 и λ_2 — оба положительны, то, вводя обозначения

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2},$$

получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

Если λ_1 и λ_2 оба отрицательны, то, полагая

$$\lambda_1 = -\frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{b^2},$$

получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (5)$$

Наконец, если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то, не нарушая общности, можно считать $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (в противном случае достаточно поменять ролями оси Ox и Oy); полагая

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{b^2},$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь случай $a_{33} = 0$. Если a_{11} и a_{22} — одного знака, то можно считать $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ (в противном случае достаточно изменить на обратные знаки в обеих частях уравнения). Полагая $a_{11} = k_1^2$, $a_{22} = k_2^2$, будем иметь уравнение

$$k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 = 0, \quad (7)$$

изображающее совокупность двух мнимых прямых

$$k_1 x + i k_2 y = 0 \quad \text{и} \quad k_1 x - i k_2 y = 0;$$

если же a_{11} и a_{22} — различных знаков, то аналогичным образом получим уравнение

$$k_1^2 x^2 - k_2^2 y^2 = 0, \quad (8)$$

представляющее совокупность двух действительных прямых

$$k_1 x + k_2 y = 0 \quad \text{и} \quad k_1 x - k_2 y = 0.$$

Итак, уравнение всякой центральной линии второго порядка может быть приведено к одному из видов (4) — (8).

Положив в основу определения, данные в § 225, можно сказать, что в случаях (4) и (5) линия есть эллипс, ибо, как легко проверить, в этих случаях линия — эллиптического типа и нераспадающаяся¹⁾. В случае (5) линия не имеет ни одной действительной точки и называется *мнимым эллипсом*.

В случае (6) линия — гиперболического типа и нераспадающаяся²⁾, т. е. линия — гипербола.

Мы видим, далее, что распадающиеся центральные линии представимы одним из уравнений (7), (8). В первом случае мы имеем эллиптический тип³⁾, а во втором — гиперболический⁴⁾.

¹⁾ Действительно, здесь $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$; $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$,

$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -1$, $A_{33} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} > 0$, $A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

²⁾ Сравн. предыдущую сноскую.

³⁾ Действительно, в нашем случае $F(x, y) = k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2$; $A_{33} = k_1^2 \cdot k_2^2 > 0$;

$$A = \begin{vmatrix} k_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

⁴⁾ Сравн. предыдущую сноскую.

Итак, распадающаяся линия эллиптического типа есть совокупность двух мнимых сопряжённых непараллельных прямых, а распадающаяся линия гиперболического типа — совокупность двух действительных непараллельных прямых.

Уравнения (4) — (8) можно ещё упростить, подбирая надлежащим образом длины координатных векторов. А именно, им можно придать соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1, \quad (4a) \quad & x^2 - y^2 = 1, \quad (6a) \quad x^2 + y^2 = 0, \quad (7a) \\ x^2 + y^2 = -1, \quad (5a) \quad & x^2 - y^2 = 0. \quad (8a) \end{aligned}$$

Например, уравнение (4a) получается из (4) заменой x и y на ax и by , что сводится к изменению длин координатных векторов; аналогично относительно остальных уравнений.

Из (4a) непосредственно следует, что все действительные эллипсы могут быть получены один из другого аффинным преобразованием. Действительно, пусть на плоскости Oxy заданы два эллипса. Путём надлежащего выбора новых систем $O'x'y'$ и $O''x''y''$ уравнениям этих эллипсов можно соответственно придать вид $x'^2 + y'^2 = 1$ и $x''^2 + y''^2 = 1$. Эти два эллипса получаются, очевидно, один из другого аффинным преобразованием

$$x' = x'', \quad y' = y''.$$

То же, очевидно, относится и к линиям каждого из остальных видов (4) — (8). Наоборот, как легко видеть, линия одного из этих видов не может быть получена из линии другого вида путём аффинного преобразования.

Очевидно, что при аффинном преобразовании сопряжённые диаметры данной линии переходят в сопряжённые диаметры преобразованной; это следует из того, что при аффинном преобразовании середина хорды остаётся серединой.

Вообще, все свойства, перечисленные в этом отделе, а также и в предыдущей главе, сохраняются при аффинных преобразованиях, ибо при всех определениях мы пользовались пока только аффинными (или даже только проективными) свойствами.

З а м е ч а н и е 1. То обстоятельство, что уравнение линии принимает вид (2), если в качестве координатных осей взять два сопряженных диаметра, непосредственно вытекает из того, что два сопряженных диаметра вместе с несобственной прямой составляют, как легко видеть, автополярный треугольник (см. § 222, 232).

З а м е ч а н и е 2 Мы всё же не можем утверждать пока, что действительный эллипс и гипербола, определённые нами в § 225, суть те же линии, которые были названы эллипсом и гиперболой в самом начале (§ 195 и следующие); нам остаётся еще показать, что уравнения действительного эллипса и гиперболы, так, как

они определены здесь, могут быть приведены соответственно к видам (4) и (6) подходящим выбором *прямоугольных* декартовых координат. Это будет доказано несколько ниже (§ 238).

§ 235. Простейшие уравнения линий параболического типа

Диаметры линий параболического типа, как мы знаем, все параллельны между собою. Поэтому мы не можем взять два сопряженных диаметра в качестве осей координат.

Однако мы можем упростить уравнение такой линии, взяв в качестве оси Oy какую-либо прямую, не параллельную диаметрам, а в качестве оси Ox — диаметр, сопряжённый с направлением Oy . Диаметр, сопряжённый с направлением Oy , имеет уравнение,

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

Так как этот диаметр совпадает по условию с осью Ox , то мы должны иметь $a_{21} = a_{23} = 0$, $a_{22} \neq 0$. Так как, далее, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{11}a_{22} = 0$ (ибо линия — параболического типа), то $a_{11} = 0$. Следовательно, уравнение линии примет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим сперва случай, когда $a_{13} \neq 0$. В этом случае линия (1) пересекает ось Ox ; действительно, полагая $y = 0$, получим абсциссу точки пересечения $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$. Перенесём начало координат (не изменяя координатных векторов) в эту точку. Тогда, как легко проверить, уравнение линии примет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$$

или, вводя обозначение $-\frac{a_{13}}{a_{22}} = p$,

$$y^2 = 2px. \quad (2)$$

Линия, представляемая этим уравнением, — нераспадающаяся, как легко проверить, составляя определитель A ; следовательно, это — парабола. Ось Ox является в рассматриваемом случае диаметром параболы, а ось Oy — касательной в точке пересечения этого диаметра с параболой, как это следует из сказанного в § 231 (и как легко проверить непосредственно).

Если $a_{13} = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}. \quad (3)$$

Значит, в этом случае наша линия — совокупность двух параллельных прямых, действительных (если a_{22} и a_{33} — различных знаков) или мнимых (если a_{22} и a_{33} — одного знака). Если $a_{33} = 0$, то мы имеем две совпадающие прямые.

Итак, линия параболического типа есть либо парабола, и тогда её уравнение можно привести к виду (2), либо совокупность двух параллельных прямых, как мы это видели уже раньше (§ 225а).

Подходящим выбором длин координатных векторов (сравн. предыдущий параграф) уравнению параболы можно придать вид

$$y^2 = 2x. \quad (2a)$$

Из этого, в частности, следует, что все параболы могут быть получены одна из другой аффинным преобразованием. Больше того, все параболы подобны между собою; это делается ясным тогда, когда мы покажем (в § 238), что параболы, так, как они определены здесь, суть параболы, определённые раньше (в § 200), относительно которых было уже показано (§ 207), что все они подобны.

§ 236. Уравнения линий второго порядка, отнесенных к касательной и диаметру, проведенному через точку касания

Мы вывели такое уравнение для случая параболы. Составим теперь аналогичные уравнения для произвольной нераспадающейся линии второго порядка. Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

есть уравнение линии, отнесённой к указанной системе осей. Так как линия проходит через O , то $a_{33} = 0$. Далее, уравнение касательной в точке O есть

$$a_{13}x + a_{23}y = 0,$$

и так как эта прямая должна совпадать с осью Oy , то ¹⁾

$$a_{23} = 0, \quad a_{13} \neq 0.$$

Наконец, уравнение диаметра, сопряжённого с направлением оси Oy , есть

$$a_{12}x + a_{22}y = 0,$$

ибо $a_{23} = 0$. Этот диаметр должен совпадать с осью Ox . Значит, должно быть $a_{12} = 0, a_{22} \neq 0$.

¹⁾ Уравнение касательной должно быть определенным, так как линия — нераспадающаяся.

Итак, уравнение (1) принимает вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \quad (2)$$

или

$$y^2 = 2px + qx^2, \quad (3)$$

где

$$p = -\frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad q = -\frac{a_{11}}{a_{22}}.$$

Составляя величину A_{33} для уравнения $y^2 - 2px - qx^2 = 0$, убеждаемся, что при $q < 0$ мы имеем эллипс, при $q > 0$ — гиперболу, а при $q = 0$ — параболу. Таким образом, мы обобщили результат § 206.

II. ГЛАВНЫЕ ДИАМЕТРЫ. НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Мы начинаем изучение метрических свойств конических сечений с вопроса о главных диаметрах. Во всем этом отделе мы будем предполагать координаты прямоугольными.

§ 237. Главные диаметры

Диаметр линии второго порядка называется *главным*, если он перпендикулярен к направлению, с которым он сопряжен. Такой диаметр есть, очевидно, ось симметрии линии и поэтому его называют также *осью* кривой. Точки пересечения оси с линией называются *вершинами* линии.

Поставим себе задачу найти главные диаметры линии второго порядка.

Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

есть уравнение данной линии (в прямоугольных координатах).

Рассмотрим сперва случай линии с определенным центром ($A_{33} \neq 0$). Главные диаметры линии в этом случае суть взаимно перпендикулярные сопряженные диаметры.

Пусть k_1 и k_2 — угловые коэффициенты этих диаметров. Они связаны соотношением (§ 230):

$$a_{22}k_1k_2 + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{11} = 0, \quad (2)$$

к которому теперь следует присоединить *условие перпендикулярности*

$$k_1k_2 = -1. \quad (3)$$