Итак, уравнение (1) принимает вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \tag{2}$$

или

$$y^2 = 2px + qx^2, \tag{3}$$

где

$$p = -\frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad q = -\frac{a_{11}}{a_{22}}.$$

Составляя величину A_{33} для уравнения $y^2 - 2px - qx^2 = 0$, убеждаемся, что при $q < 0$ мы имеем эллипс, при $q > 0$ — гиперболу, а при $q = 0$ — параболу. Таким образом, мы обобщили результат § 206.

II. ГЛАВНЫЕ ДИАМЕТРЫ. НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Мы начинаем изучение метрических свойств конических сечений с вопроса о главных диаметрах. Во всем этом отделе мы будем предполагать координаты прямоугольными.

§ 237. Главные диаметры

Диаметр линии второго порядка называется *главным*, если он перпендикулярен к направлению, с которым он сопряжен. Такой диаметр есть, очевидно, ось симметрии линии и поэтому его называют также *осью* кривой. Точки пересечения оси с линией называются *вершинами* линии.

Поставим себе задачу найти главные диаметры линии второго порядка.

Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

есть уравнение данной линии (в прямоугольных координатах).

Рассмотрим сперва случай линии с определенным центром ($A_{33} \neq 0$). Главные диаметры линии в этом случае суть взаимно перпендикулярные сопряженные диаметры.

Пусть k_1 и k_2 — угловые коэффициенты этих диаметров. Они связаны соотношением (§ 230):

$$a_{22}k_1k_2 + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{11} = 0, \tag{2}$$

к которому теперь следует присоединить *условие перпендикулярности*

$$k_1k_2 = -1. \tag{3}$$

Пусть сперва $a_{12} \neq 0$. Тогда уравнения (2) и (3), которые можно переписать и так:

$$k_1 + k_2 = -\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}, \qquad k_1 k_2 = -1, \tag{4}$$

показывают, что k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})\,k - a_{12} = 0. \tag{5}$$

Так как величина

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2,$$

очевидно, положительна, то уравнение (5) имеет два действительных корня, которые и являются угловыми коэффициентами искомых главных диаметров.

Мы исключили случай, когда $a_{12} = 0$; но легко непосредственно проверить, что уравнение (5) дает направление главных диаметров во все случаях (для центральных линий). Действительно, если $a_{12} = 0$, но $a_{11} - a_{22} \neq 0$, то уравнение (5) имеет два корня: $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$; непосредственная проверка приводит, с другой стороны, к заключению, что в случае $a_{12} = 0$ диаметр, сопряженный с направлением ($X_1 \neq 0$, $Y_1 = 0$), т. е. с направлением оси Ox, параллелен оси Oy, т. е. его угловой коэффициент $k_2 = \infty$. Наконец, если одновременно $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, то уравнение (5) обращается в тождество $0 = 0$; в этом случае всякий диаметр будет главным, и, как мы увидим в § 239, данная линия есть окружность (действительная или мнимая).

Чтобы найти уравнения главных диаметров, достаточно в общее уравнение диаметра

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0 \tag{6}$$

подставить вместо X и Y пару чисел (X_1, Y_1) или (X_2, Y_2), определяемых соотношениями

$$\frac{Y_1}{X_1} = k_1 \quad \text{или} \quad \frac{Y_2}{X_2} = k_2, \tag{7}$$

где k_1 и k_2 — корни уравнения (5). Это правило остается в силе и тогда, когда $a_{12} = 0$, $a_{11} - a_{22} \neq 0$, т. е. $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$. Тогда надо взять $X_1 \neq 0$, $Y_1 = 0$ и $X_2 = 0$, $Y_2 \neq 0$. В случае же $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$ величинам X и Y можно приписывать произвольные значения, не равные одновременно нулю.

Рассмотрим теперь случай линии параболического типа, когда

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

В этом случае все диаметры параллельны между собою и угловой коэффициент их равен (§ 230)

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{8}$$

(из двух отношений $\frac{a_{11}}{a_{12}}$ и $\frac{a_{12}}{a_{22}}$ по крайней мере одно не является неопределенным, ибо, если, например, $a_{11} = a_{12} = 0$, то непременно $a_{22} \neq 0$, иначе линия не была бы второго порядка).

Угловой коэффициент k' хорд, перпендикулярных к этому направлению, дается формулой

$$\frac{Y}{X} = k' = -\frac{1}{k} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}. \tag{9}$$

Уравнение главного диаметра получим, подставив в (6) на место X и Y любую пару чисел (не равных одновременно нулю), отношение которых дается предыдущей формулой. Например, можно взять

$$X = a_{11}, \quad Y = a_{12} \quad \text{или} \quad X = a_{12}, \quad Y = a_{22}$$

(если $a_{11} = a_{12} = 0$, то следует взять вторую из указанных пар).

Таким образом, уравнение главного диаметра напишется так:

$$a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = 0 \quad \text{или} \quad a_{12}F_1 + a_{22}F_2 = 0. \tag{10}$$

Вопрос о нахождении главных диаметров можно также решить и иным, более симметричным способом, допускающим обобщение на случай пространства трех измерений (и даже любого числа измерений). Но мы здесь на этом не будем останавливаться, так как при изучении вопроса об упрощении уравнений поверхностей второго порядка (гл. XI) мы изложим упомянутый способ применительно к случаю трех измерений, после чего читатель без всякого труда сможет применить его и к случаю двух измерений.

Замечание. Легко при помощи дополнительных хорд (§ 233) построить главные диаметры эллипса и гиперболы, заданных очертаниями. Для этого достаточно построить один какой-либо диаметр AB линии (§ 233) и описать окружность, имеющую AB своим диаметром. Если M есть одна из точек пересечения этой окружности с данной линией, то хорды AM и MB будут взаимно перпендикулярными дополнительными хордами, а диаметры, им параллельные,— главными диаметрами. Точки пересечения этих последних с кривой дадут нам вершины ее.

Чтобы построить главный диаметр параболы, достаточно построить один какой-либо диаметр Δ, провести хорду, перпендикулярную к нему, и через середину хорды провести прямую, параллельную Δ. Это и будет главный диаметр параболы. Точка пересечения его с параболой определит вершину.

§ 238. Нормальные уравнения конических сечений в декартовых прямоугольных координатах

Если дана центральная линия второго порядка, то, взяв в качестве осей прямоугольной декартовой системы координат главные диаметры, приведём (см. § 234) уравнение линии к одному из сле-

дующих видов (a, b, k_1, k_2, p, k означают действительные числа):

1°. В случае действительного эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1°а. В случае мнимого эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

2°. В случае гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3°. В случае мнимых сопряженных не параллельных прямых

$$k_1^2x^2+k_2^2y^2=0.$$

4°. В случае действительных не параллельных прямых

$$k_1^2x^2-k_2^2y^2=0.$$

Если линия не имеет определенного центра [центра нет [1]) или имеется прямая центров], то, взяв за ось Ox главный диаметр, а за ось Oy — касательную в вершине [2]) (в случае параболы), или любую прямую, ей перпендикулярную (в случае двух параллельных прямых), будем иметь (см. § 235):

5°. В случае параболы

$$y^2=2px.$$

6°. В случае пары параллельных прямых

$$y^2=\pm k^2$$

(при верхнем знаке прямые — действительные, при нижнем — мнимые).

Теперь мы видим, что линии, названные нами в § 225 эллипсом, гиперболой и параболой, суть те же линии, что были определены в главе VII (кроме мнимого эллипса, который в главе VII не рассматривался).

Мы уже видели, что с аффинной точки зрения все эллипсы эквивалентны между собою, так же как и все гиперболы и все параболы (§§ 234, 235).

С точки зрения метрической эллипсы различаются друг от друга размерами [3]) и формой (более или менее вытянутые); среди эллипсов выделяется наиболее простая форма — окружность.

---

[1]) Центр — несобственный.

[2]) В точке пересечения главного диаметра с линией.

[3]) Здесь мы понимаем слово «метрический» в узком смысле, считая различными фигуры неодинаковых размеров.

То же относится к гиперболам (среди гипербол роль, аналогичную окружности, играет равносторонняя гипербола) и параболам [1].

В качестве приложения докажем предложение, высказанное в § 76 (сноска на стр. 149), а именно, что всякое аффинное преобразование можно рассматривать как результат движения, возможно плюс отражение, и растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Пусть Γ — окружность на плоскости Π. После аффинного преобразования плоскости Π в плоскость Π' окружность Γ обратится в некоторый эллипс Γ' на Π'. Главным диаметрам этого эллипса соответствуют два взаимно перпендикулярных диаметра окружности [2] Γ. Итак, всегда существуют два взаимно перпендикулярных направления, остающихся взаимно перпендикулярными и после преобразования. Пусть теперь O — некоторая точка на Π и $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — два вектора, с началом в O, имеющие только что указанные направления. Пусть O', $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ — соответствующие элементы на Π'. Путем движения, возможно плюс отражение, мы можем совместить O с O' и направить векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ по векторам $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ (которые по условию взаимно перпендикулярны).

Теперь очевидно, что достаточно добавить надлежащие растяжения по направлениям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, чтобы добиться требуемого результата.

§ 239. Об уравнении окружности

Линия, представляемая (в прямоугольных координатах) уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0, \tag{1}$$

есть, как мы знаем (§ 80), окружность. Линию, представляемую уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+r^2=0, \tag{1a}$$

мы будем называть мнимою окружностью, с центром в (a, b) и мнимым радиусом ir (r мы считаем действительным числом). Окружность есть, очевидно, частный случай эллипса.

Легко решить вопрос: каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение (в прямоугольных координатах)

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{2}$$

представляло окружность (действительную или мнимую)?

Перепишем уравнения (1) и (1a) так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-K=0, \tag{1b}$$

---

[1] Мы знаем, что все параболы подобны между собою; если понимать слово «метрический» в широком смысле (считая эквивалентными подобные фигуры), то все параболы эквивалентны.

[2] Мы знаем, что при аффинном преобразовании сопряженные диаметры остаются сопряженными; с другой стороны, сопряженные диаметры окружности взаимно перпендикулярны.

где $K = \pm r^2$. Для того, чтобы линия (2) представляла собою ту же линию, что и (1b), необходимо и достаточно, чтобы было тождественно

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \\ = k(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - K),$$

где k — некоторая постоянная, отличная от нуля.

Сравнивая коэффициенты, получим

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} = k, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = k, \quad a_{13} = -ka, \quad a_{23} = -kb, \\ a_{33} = k(a^2 + b^2 - K). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Из этих соотношений вытекает, в частности,

$$a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad a_{12} = 0. \qquad (4)$$

Обратно, если условия (4) соблюдены, то уравнение (1) представляет окружность. Это последнее в сущности уже доказано в § 80; повторим доказательство, несколько дополнив его. Если соблюдено условие (4), то можно найти числа k, a, b, K, удовлетворяющие условиям (3). А именно, будем, очевидно, иметь

$$k = a_{11} = a_{22}, \quad a = \frac{-a_{13}}{a_{11}}, \quad b = \frac{-a_{23}}{a_{11}},$$

$$K = a^2 + b^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}} = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2}.$$

Если $K > 0$, то окружность действительная, если $K < 0$ — мнимая.

Наконец, если $K = 0$, то данное уравнение приведется к виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$, которое удовлетворяется только следующими действительными значениями:

$$x = a, \quad y = b.$$

В этом случае можно сказать, что мы получаем окружность нулевого радиуса.

Окружность нулевого радиуса представляет собою не что иное, как совокупность двух изотропных прямых (§ 162): $y - b = i(x - a)$, $y - b = -i(x - a)$, проходящих через действительную точку (a, b).

Мы видели в § 175, что все окружности проходят через циклические точки. Легко видеть, что и обратно: всякая линия второго порядка, проходящая через циклические точки, есть окружность.

Действительно, если линия (пишем уравнение в однородных координатах)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t = 0$$

проходит через точки $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$, то мы должны иметь

$$a_{11}+2a_{12}i-a_{22}=0,$$
$$a_{11}-2a_{12}i-a_{22}=0,$$

откуда получаем $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$, а это и доказывает наше утверждение. Для заключения достаточно даже, чтобы линия проходила через одну из циклических точек, например $(1, i, 0)$, ибо это дает уравнение $a_{11}+2a_{12}i-a_{22}=0$, откуда следует (так как мы предполагаем коэффициенты действительными), что

$$a_{11}-a_{22}=0, \quad a_{12}=0.$$

III. НОРМАЛЬ. ФОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КАСАТЕЛЬНЫХ

Во всём этом отделе координаты — прямоугольные, если противное не оговорено.

§ 240. Нормаль к плоской линии

Нормалью к данной плоской линии называется перпендикуляр, восставленный к касательной в точке касания[1]) (в плоскости рассматриваемой кривой). Легко найти уравнение нормали в прямоугольных декартовых координатах.

На основании вида уравнения касательной[2])

$$(x-x_0)F_1(x_0, y_0)+(y-y_0)F_2(x_0, y_0)=0$$

заключаем, что вектор, имеющий координаты $X=F_1(x_0, y_0)$ и $Y=F_2(x_0, y_0)$, перпендикулярен к касательной и поэтому может быть рассматриваем как вектор направления нормали. Следовательно, уравнение нормали можно представить в виде

$$\frac{x-x_0}{F_1(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{F_2(x_0, y_0)}. \tag{1}$$

§ 241. Свойства касательных к эллипсу

Пусть эллипс задан нормальным уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{1}$$

Так как в нашем случае

$$\Phi(x, y, t)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-t^2$$

---

[1]) Понятие нормали — не аффинное и не проективное, так как при аффинном преобразовании (а тем более при проективном) прямой угол не остается, вообще говоря, прямым.

[2]) См. уравнение (6) § 217. По принятым в § 208 обозначениям

$$F_1=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F_2=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}.$$