проходит через точки $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$, то мы должны иметь

$$a_{11}+2a_{12}i-a_{22}=0,$$
$$a_{11}-2a_{12}i-a_{22}=0,$$

откуда получаем $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$, а это и доказывает наше утверждение. Для заключения достаточно даже, чтобы линия проходила через одну из циклических точек, например $(1, i, 0)$, ибо это дает уравнение $a_{11}+2a_{12}i-a_{22}=0$, откуда следует (так как мы предполагаем коэффициенты действительными), что

$$a_{11}-a_{22}=0, \quad a_{12}=0.$$

III. НОРМАЛЬ. ФОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КАСАТЕЛЬНЫХ

Во всём этом отделе координаты — прямоугольные, если противное не оговорено.

§ 240. Нормаль к плоской линии

Нормалью к данной плоской линии называется перпендикуляр, восставленный к касательной в точке касания[1]) (в плоскости рассматриваемой кривой). Легко найти уравнение нормали в прямоугольных декартовых координатах.

На основании вида уравнения касательной[2])

$$(x-x_0)F_1(x_0, y_0)+(y-y_0)F_2(x_0, y_0)=0$$

заключаем, что вектор, имеющий координаты $X=F_1(x_0, y_0)$ и $Y=F_2(x_0, y_0)$, перпендикулярен к касательной и поэтому может быть рассматриваем как вектор направления нормали. Следовательно, уравнение нормали можно представить в виде

$$\frac{x-x_0}{F_1(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{F_2(x_0, y_0)}. \tag{1}$$

§ 241. Свойства касательных к эллипсу

Пусть эллипс задан нормальным уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{1}$$

Так как в нашем случае

$$\Phi(x, y, t)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-t^2$$

---

[1]) Понятие нормали — не аффинное и не проективное, так как при аффинном преобразовании (а тем более при проективном) прямой угол не остается, вообще говоря, прямым.

[2]) См. уравнение (6) § 217. По принятым в § 208 обозначениям

$$F_1=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F_2=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

и

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = \frac{x_0}{a^2}, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = \frac{y_0}{b^2}, \quad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = -1,$$

то уравнение касательной примет вид [§ 217, формула (5)]:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где x_0, y_0 — координаты точки касания M_0 (черт. 154).

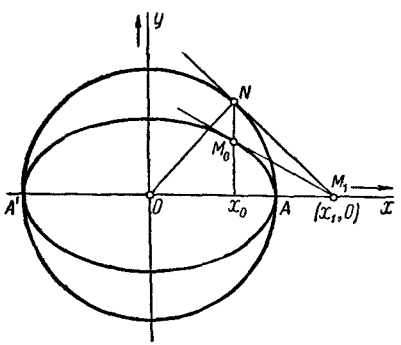
Найдем точку пересечения M_1 $(x_1, 0)$ касательной с осью Ox. Для этого положим в (2) $y = 0$, $x = x_1$, что даёт

$$\frac{x_1 x_0}{a^2} = 1,$$

т. е.

$$x_1 = \frac{a^2}{x_0}. \tag{3}$$

Последняя формула показывает, что точку M_1 можно весьма просто построить при помощи циркуля и линейки, когда задана точка касания M_0: достаточно описать из O, как центра, окружность радиуса a, провести через M_0 прямую, перпендикулярную к оси Ox до пересечения с окружностью в точке N, и, наконец, восставить из N перпендикуляр к ON. Точка пересечения этого перпендикуляра с осью Ox и будет искомой. Действительно, из элементарной геометрии известно, что $|ON|^2 = a^2 = x_0 x_1$.



Черт. 154

Построив точку M_1 и соединив ее прямою с M_0, найдем графическим путем касательную.

Формула (3) показывает еще, что положение точки M_1 зависит только от a и x_0, так что для всех эллипсов, имеющих ту же ось $A'A$, что и данный, касательная в точке с абсциссой x_0 пройдет через точку M_1. В частности, это будет иметь место для окружности радиуса a, с центром в O. Отсюда еще раз следует правильность указанного выше построения точки M_1.

Докажем теперь одно весьма важное свойство.

Касательная к эллипсу составляет равные углы с радиусами-векторами, проведенными из фокусов к точке касания.

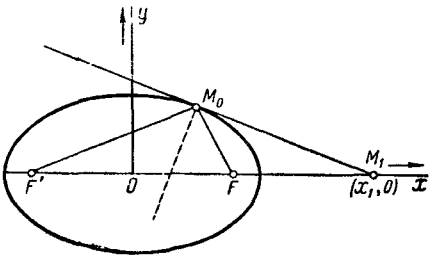
Пусть F' и F — фокусы эллипса и M_0 — точка касания. Легко видеть, что касательная проходит вне угла $F'M_0F$. Мы хотим показать, что острые углы, составляемые направлениями M_0F' и M_0F

с касательной, равны между собою, т. е. что касательная есть биссектриса угла между M_0F и продолжением $F'M_0$ (черт. 155).

Из элементарной геометрии известно, что биссектриса внутреннего или внешнего угла при M_0 треугольника $F'M_0F$ делит противоположную сторону на части, пропорциональные длинам сторон $|F'M_0|$ и $|FM_0|$, и что обратно, если прямая M_0M_1 пересекает сторону $F'F$ в точке M_1, удовлетворяющей условию

$$\frac{|F'M_0|}{|FM_0|} = \frac{|F'M_1|}{|FM_1|}, \qquad (4)$$

то M_0M_1 есть биссектриса угла при M_0, внешнего (если M_1 находится вне отрезка $F'F$) или внутреннего (если M_1 находится внутри отрезка $F'F$). В нашем случае очевидно, что M_1 находится вне отрезка $F'F$. Докажем, что равенство (4) имеет место.



Черт. 155

На основании формул § 199, дающих расстояния точки эллипса до фокусов, имеем

$$|F'M_0| = a + ex_0, \quad |FM_0| = a - ex_0,$$

где $e = \frac{c}{a}$ обозначает, как всегда, эксцентриситет; далее, на основании формулы (3) настоящего параграфа,

$$|F'M_1| = |x_1 + c| = \left|\frac{a^2}{x_0} + c\right| = \frac{a(a + ex_0)}{|x_0|},$$

и аналогично

$$|FM_1| = \frac{a(a - ex_0)}{|x_0|}.$$

Следовательно,

$$\frac{|F'M_1|}{|FM_1|} = \frac{a + ex_0}{a - ex_0} = \frac{|F'M_0|}{|FM_0|},$$

а это и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует еще, что *нормаль к эллипсу в точке M_0 есть биссектриса угла $F'M_0F$.*

Поверхность, получаемая вращением эллипса вокруг большой оси, называется *вытянутым эллипсоидом вращения.* Вообразим себе зеркало, имеющее такую форму. На основании основного закона отражения геометрической оптики («луч падающий и луч отраженный составляют одинаковые углы с нормалью») заключаем о следующем свойстве зеркала указанного вида: лучи, испускаемые источником, находящимся в одном из фокусов, после отражения собираются в другом. (Этим свойством и объясняется название «фокус»).

§ 242. Свойства касательных к гиперболе

Пусть гипербола задана нормальным уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad (1)$$

В этом случае

$$\Phi(x, y, t)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-t^2,$$

и уравнение касательной в точке $M_1(x_0, y_0)$ имеет вид

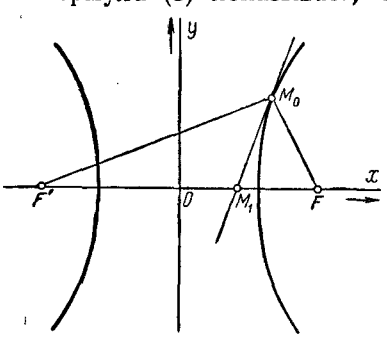
$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Точка пересечения $M_1(x_1, 0)$ касательной с осью Ox определяется формулой

$$\frac{x_1x_0}{a^2}=1, \quad \text{т. е. } x_1=\frac{a^2}{x_0}. \qquad (3)$$

Так как для (действительных) точек гиперболы $|x_0|\geqslant a$, то $|x_1|\leqslant a$; значит, точка $M_1(x_1, 0)$ находится между вершинами гиперболы.

Формула (3) показывает, что точку M_1 при заданных a и x_0 можно весьма просто построить, пользуясь циркулем и линейкой; построение предоставляем произвести читателю (см. случай эллипса). Построив точку M_1 и соединив ее прямую с точкой M_0, получим касательную к гиперболе в данной точке M_0 (черт. 156).



Черт. 156

Совершенно аналогично случаю эллипса легко показать, что *касательная к гиперболе делит пополам угол между прямыми, соединяющими точку касания с фокусами*; на этот раз речь идёт об угле $F'M_0F$ или вертикальном с ним. Для доказательства достаточно проверить, что

$$\frac{|F'M_1|}{|FM_1|}=\frac{|F'M_0|}{|FM_0|};$$

предоставляем эту проверку читателю.

Из указанного свойства касательной следует, что *нормаль к гиперболе делит пополам угол между отрезком M_0F и продолжением отрезка $F'M_0$.*

Если вращать гиперболу вокруг оси $F'F$, то получим поверхность, состоящую из двух раздельных частей (пол), называемую

двуполым гиперболоидом вращения. Представим себе вогнутое зеркало, поверхность которого имеет форму одной полы гиперболоида. Из выведенного свойства нормали следует, что лучи, выходящие из источника света, помещенного в фокусе F, после отражения от зеркальной поверхности примут такое направление, как если бы все они выходили из фокуса F'.

Если гипербола задана уравнением

$$xy = k, \tag{4}$$

т. е. если за оси координат (вообще, косоугольных) приняты асимптоты (§ 203), то

$$\Phi(x, y, t) = xy - kt^2,$$

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = \frac{1}{2} y_0, \qquad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = \frac{1}{2} x_0, \qquad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = -k,$$

и уравнение касательной принимает вид

$$xy_0 + yx_0 = 2k.$$

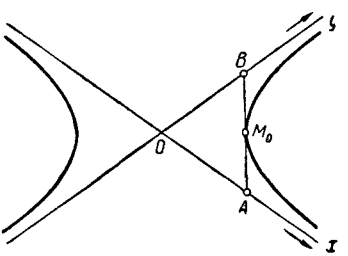
Будем для простоты считать координаты необобщенными. Отрезки, отсекаемые касательной на осях координат (асимптотах), равны соответственно (черт. 157)

$$OA = \frac{2k}{y_0}, \qquad OB = \frac{2k}{x_0},$$

или, принимая во внимание, что $x_0 y_0 = k$:

$$OA = 2x_0, \qquad OB = 2y_0. \tag{5}$$

Отсюда следует, между прочим, что *отрезок касательной между асимптотами делится точкой касания пополам.*



Черт. 157

Далее, на основании формул (5), можно показать, что *площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы и касательной к ней, есть величина постоянная* (т. е. не зависит от положения точки касания).

Действительно, площадь эта равна

$$\frac{1}{2} |OA| \, |OB| \sin \nu = 2 |x_0 y_0| \sin \nu = 2k \sin \nu,$$

где ν — угол между асимптотами.

§ 243. Свойства касательных к параболе

Возьмем уравнение параболы в нормальном виде:

$$y^2 - 2px = 0. \tag{1}$$

Имеем

$$\Phi(x, y, t) = y^2 - 2pxt,$$

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = -p, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = y_0, \quad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = -px_0,$$

и уравнение касательной будет

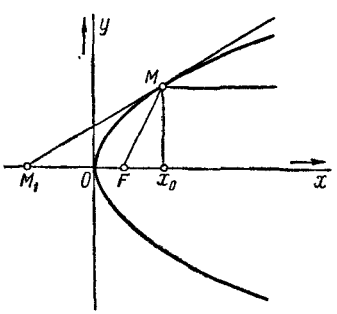
$$-px + y_0 y - px_0 = 0,$$

или

$$y_0 y = p(x + x_0). \tag{2}$$

Касательная пересекает ось Ox в точке M_1 $(x_1, 0)$, где $x_1 = -x_0$ (черт. 158), откуда вытекает очень простой очевидный способ построения касательной.

Докажем теперь, что *касательная к параболе в любой точке M составляет равные углы с радиусом-вектором, соединяющим фокус F с точкой M, и прямой, проведенной из M параллельно оси* (это свойство можно рассматривать как предельный случай аналогичного свойства касательной к эллипсу; в нашем случае один из фокусов удален в бесконечность в направлении оси параболы).



Черт. 158

Чтобы это доказать, заметим, что треугольник M_1FM — равнобедренный [1]), и, значит, углы его при M_1 и M равны. Но угол при M_1 равен углу касательной с прямой, проведённой из M параллельно Ox, а угол при M есть угол, составленный касательной с радиусом-вектором.

Отсюда вытекает следующее свойство вогнутого параболического зеркала, поверхность которого образована вращением параболы вокруг оси: лучи, выходящие из фокуса, после отражения делаются параллельными оси. Обратно, пучок параллельных лучей, падающий в направлении оси, собирается в фокусе.

---

[1]) Действительно, мы знаем (§ 200), что $|FM| = \frac{p}{2} + x_0$. Но

$$|M_1F| = |x_1| + |OF| = \frac{p}{2} + x_0,$$

ибо $p = 2|OF|$ и по доказанному выше $|x_1| = |x_0|$. Значит,

$$|MF| = |M_1F|.$$

Упражнения и дополнения (к §§ 241—243)

1. Доказать, что в случае эллипса понятие внутренних и внешних точек, введенное в конце § 219, совпадает с обычным понятием внутренних и внешних точек для замкнутой кривой.

Доказательство. Под «внешними» и «внутренними» точками мы будем понимать внешние и внутренние точки в обычном смысле слова и докажем, что это согласуется с понятиями, введенными в § 219.

Пусть $M(\xi, \eta)$ — данная точка, из которой требуется провести касательные к эллипсу.

Точки касания определяются пересечением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

с прямою — полярой точки M:

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=1.$$

Для нахождения точек касания следует решить эту систему уравнений относительно x, y. Исключая y, получим, после простых приведений, квадратное уравнение, определяющее x:

$$Ax^2+2Bx+C=0,$$

где для краткости положено:

$$A=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2},$$

$$B=-\xi,$$

$$C=a^2\left(1-\frac{\eta^2}{b^2}\right).$$

Корни этого уравнения будут действительными, если $B^2-AC>0$, мнимыми, если $B^2-AC<0$, совпадающими, если $B^2-AC=0$.

Простые вычисления показывают, что

$$B^2-AC=\frac{a^2\eta^2}{b^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right);$$

следовательно, знак B^2-AC определяется знаком выражения

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1.$$

Легко видеть, что это выражение положительно, если точка (ξ, η) расположена вне эллипса, и отрицательно, если точка (ξ, η) находится внутри эллипса. Отсюда и следует наше утверждение. Если указанное выражение равно нулю, то точка (ξ, η) расположена на эллипсе, и мы имеем, как и следовало ожидать, одну касательную («две совпадающие касательные»).

2. Доказать, что с точки зрения определения, данного в § 219, внешними точками по отношению к гиперболе являются те, которые находятся между двумя ветвями гиперболы, а внутренними — все остальные (кроме точек самой гиперболы).

3. Доказать, что точками, внешними по отношению к параболе, являются точки плоскости, расположенные с фокусом по разные стороны параболы.