ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ИНВАРИАНТЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ И ПОЛОЖЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мы уже знаем, к каким простейшим видам может быть приведено уравнение линии второго порядка в прямоугольных координатах. В этой главе мы займемся вопросом практического осуществления таких приведений и вопросом непосредственного определения формы и положения кривой по виду ее уравнения.

Весьма существенную роль при этом будет играть понятие *инварианта*.

I. ИНВАРИАНТЫ

§ 247. Преобразование уравнения при замене декартовых координат

Начнем с изучения вопроса о том, как изменяются коэффициенты левой части

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \qquad (1)$$

уравнения линии второго порядка при замене данной системы Oxy декартовых координат другою $O'x'y'$.

Мы знаем, что при такой замене старые и новые координаты одной и той же точки связаны линейными соотношениями вида

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + \alpha, \\ y &= m_1x' + m_2y' + \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где постоянные l_1, l_2, m_1, m_2, α, β зависят от положения новой системы относительно старой и от размеров и направлений координатных векторов. А именно, α, β обозначают координаты нового начала O' относительно старой системы, а (l_1, m_1) и (l_2, m_2) — координаты новых координатных векторов. В частности, в случае, когда обе системы — прямоугольные, одного и того же класса (§ 69, стр. 131), причем новая система получается из старой путем переноса начала в точку (α, β) и поворота на угол φ, формулы (2) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Если внести в полином (1) вместо x, y их выражения (2), то $F(x, y)$ обратится в полином также второй степени относительно x', y'. Этот полином мы обозначим через $F'(x', y')$, а коэффициенты его — соответственно через a'_{11}, $2a'_{12}$ и т. д., так что

$$F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33}. \quad (4)$$

Новые коэффициенты $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$ будут, конечно, определенным образом зависеть от старых коэффициентов $a_{11}, \ldots, a_{33}$ и от коэффициентов формул преобразования (2). Вопрос о выражении новых коэффициентов через старые, для упрощения выкладок, мы разобьем на два, рассматривая отдельно случай переноса начала координат без изменения координатных векторов и случай изменения координатных векторов без изменения начала.

1°. Перенос начала. В этом случае, если начало перенести в точку $O'(\alpha, \beta)$, старые координаты (x, y) связаны с новыми координатами (x', y') уравнениями

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta. \quad (5)$$

Подставляя эти значения в полином (1) и пользуясь формулой (11а) § 208, получим

$$F'(x', y') =$$
$$= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2F_1(\alpha, \beta)x' + 2F_2(\alpha, \beta)y' + F(\alpha, \beta). \quad (6)$$

Итак, мы получили следующий простой результат, который следует запомнить:

При переносе начала координат в точку (α, β) *полином* $F(x, y)$ *преобразуется следующим образом: коэффициенты членов второго измерения остаются без изменения. Коэффициенты при первых степенях новых переменных* x' *и* y' *равны соответственно значениям частных производных* $2F_1$, $2F_2$ *полинома* $F(x, y)$ *в точке* (α, β); *наконец, свободный член равен значению полинома* $F(x, y)$ *в той же точке* (α, β).

2°. Изменение координатных векторов без изменения начала. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y', \\ y &= m_1x' + m_2y'. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Если подставить эти выражения в полином $F(x, y)$, то мы получим полином $F'(x', y')$. Совершенно очевидно, на основании однородности формул преобразования (7), что члены второго измерения в полиноме $F'(x', y')$ произойдут исключительно от членов второго измерения в $F(x, y)$, члены первого измерения — от членов первого измерения, и что член нулевого измерения (свободный член) не изменится вовсе.

Таким образом, будем иметь

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2, \tag{8}$$

$$a_{13}x+a_{23}y=a'_{13}x'+a'_{23}y', \tag{9}$$

$$a_{33}=a'_{33}.$$

Чтобы получить выражения новых коэффициентов при членах второго измерения, достаточно воспользоваться равенством (8), которое должно обратиться в тождество, если в левую часть вместо x, y внести их выражения (7). Это даст

$$a_{11}(l_1x'+l_2y')^2+2a_{12}(l_1x'+l_2y')(m_1x'+m_2y')+$$
$$+a_{22}(m_1x'+m_2y')^2=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2.$$

Раскрывая скобки в левой части и приравнивая коэффициенты при x'^2, $x'y'$, y'^2 в обеих частях, получим

$$\left.\begin{aligned} a'_{11}&=a_{11}l_1^2+a_{22}m_1^2+2a_{12}l_1m_1,\\ a'_{22}&=a_{11}l_2^2+a_{22}m_2^2+2a_{12}l_2m_2,\\ a'_{12}&=a_{11}l_1l_2+a_{22}m_1m_2+a_{12}(l_1m_2+l_2m_1).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Точно так же получим выражения новых коэффициентов при членах первого измерения, при помощи формулы (9), которая дает

$$a_{13}(l_1x'+l_2y')+a_{23}(m_1x'+m_2y')=a'_{13}x'+a'_{23}y',$$

откуда (сравнивая коэффициенты):

$$\left.\begin{aligned} a'_{13}&=a_{13}l_1+a_{23}m_1,\\ a'_{23}&=a_{13}l_2+a_{23}m_2.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Напомним, наконец, что

$$a'_{33}=a_{33}.$$

В случае *поворота осей прямоугольных координат*, когда формулы преобразования имеют вид

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\quad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

т. е. когда

$$l_1=\cos\varphi,\quad m_1=\sin\varphi,\quad l_2=-\sin\varphi,\quad m_2=\cos\varphi,$$

предыдущие формулы дают

$$\left.\begin{aligned} a'_{11}&=a_{11}\cos^2\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi,\\ a'_{22}&=a_{11}\sin^2\varphi+a_{22}\cos^2\varphi-2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi,\\ a'_{12}&=-(a_{11}-a_{22})\sin\varphi\cos\varphi+a_{12}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

$$\left.\begin{aligned} a'_{13}&=a_{13}\cos\varphi+a_{23}\sin\varphi,\\ a'_{23}&=-a_{13}\sin\varphi+a_{23}\cos\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

$$a'_{33}=a_{33}.$$

В дальнейшем нам придется иметь дело главным образом с формулами (10а). Их можно несколько упростить. Именно, вспоминая, что

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2},$$

получим довольно простые формулы:

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi, \\ a'_{22} &= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi, \\ a'_{12} &= -\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Запоминать эти формулы нет надобности.

Если мы имеем преобразование общего вида (перенос начала, сопровождаемый изменением координатных векторов), то значения новых коэффициентов получим по предыдущим формулам, произведя последовательно перенос начала, а затем изменение координатных векторов (или в обратном порядке).

Для дальнейшего важно отметить следующее. До сих пор речь шла о преобразовании *полинома* $F(x, y)$ при изменении системы координат.

Если речь идет об *уравнении* данной линии $F(x, y) = 0$, то уравнение той же линии в новой системе $O'x'y'$ мы можем получить, заменяя в полиноме $F(x, y)$ переменные x, y их выражениями через x', y'. Но после этого мы можем еще умножить полученное таким образом уравнение $F'(x', y') = 0$ на произвольный постоянный множитель k, отличный от нуля. Тогда коэффициенты нового уравнения не будут уже теми, которые определяются предыдущими формулами, однако будут отличаться от них только постоянным множителем (притом произвольным, но отличным от нуля).

Когда в дальнейшем будет идти речь о преобразовании уравнения линии при замене координат, мы будем всегда подразумевать (если противное не оговорено особо), что преобразование производится *без умножения на постоянный множитель*, т. е. что речь идет о преобразовании *полинома* $F(x, y)$.

§ 248. Понятие инварианта. Примеры

Мы переходим теперь к рассмотрению одного из важнейших вопросов, а именно к вопросу об *инвариантах*, связанных с уравнением линии второго порядка.

Мы начнем с пояснения этого понятия на примере. Будем, для простоты, считать, что координаты прямоугольные.

Если сложим первые две формулы (12), то получим

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}.$$

Значит, хотя при повороте осей координат величины a_{11} и a_{22} изменяются каждая в отдельности (обращаются в новые величины a'_{11}, a'_{22}), но сумма их остается неизменной. Легко проверить, что этот результат справедлив и в том случае, когда системы координат — различных классов. Мы знаем, кроме того, что a_{11} и a_{22} остаются неизменными при переносе начала. Итак, *сумма коэффициентов при квадратах переменных*

$$S=a_{11}+a_{22} \tag{1}$$

остается неизменной при любом преобразовании прямоугольных координат. Это обстоятельство выражают, говоря, что S есть *инвариант* полинома $F(x, y)$ *при преобразовании прямоугольных координат.*

Вообще, всякая функция

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

от коэффициентов полинома $F(x, y)$ называется *инвариантом при преобразовании прямоугольных координат*, если значение этой функции остается неизменным при переходе от данной прямоугольной системы к любой другой прямоугольной, т. е. если

$$f(a'_{11}, \ldots, a'_{33})=f(a_{11}, \ldots, a_{33}).$$

Основное значение понятия инварианта станет ясным, если заметить, что выражение вида $f(a_{11}, \ldots, a_{33})$ только в том случае может представлять геометрическую величину, характерную для самой рассматриваемой линии, а не зависящую от случайного положения осей координат, если это выражение есть инвариант. Поэтому вопрос о разыскании инвариантов полинома $F(x, y)$ является одним из самых основных в теории линий второго порядка.

Мы, как уже сказано, ограничимся пока разысканием инвариантов при преобразовании прямоугольных координат, или, как говорят, *ортогональных инвариантов*; в дальнейшем, говоря об инвариантах, мы будем подразумевать ортогональные инварианты, если противное не оговорено особо.

Приведем еще один пример инварианта. Формулы (12) § 247 дают

$$a'_{11}-a'_{22}=(a_{11}-a_{22})\cos 2\varphi+2a_{12}\sin 2\varphi,$$
$$2a'_{12}=-(a_{11}-a_{22})\sin 2\varphi+2a_{12}\cos 2\varphi.$$

Если возвести эти равенства в квадрат и сложить, то получим

$$(a'_{11}-a'_{22})^2+4a'^2_{12}=(a_{11}-a_{22})^2+4a^2_{12}.$$

Следовательно, выражение

$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2 \tag{2}$$

есть также инвариант (этот результат справедлив и для систем различных классов).

Оно может быть переписано еще так:

$$a_{11}^2+a_{22}^2-2a_{11}a_{22}+4a_{12}^2=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2).$$

Отметим теперь следующее обстоятельство. Если мы имеем несколько инвариантов $J_1, J_2, \ldots, J_n$, то всякая их функция $\Phi(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ будет также инвариантом. Это совершенно ясно, так как если $J_1, J_2, \ldots, J_n$ остаются неизменными при замене координат, то и $\Phi(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ останется неизменной.

Таким образом, например, $S^2=(a_{11}+a_{22})^2$ есть инвариант, ибо S есть инвариант. Вычитая S^2 из только что найденного инварианта $(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$, получим инвариант $-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$, или, отбросив постоянный множитель -4, инвариант

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В следующем параграфе будет приведено другое доказательство инвариантности последнего выражения.

§ 249. Основные инварианты уравнения линии второго порядка

Инварианты, найденные в предыдущем параграфе, могут быть получены еще иным путем на основании свойства дискриминанта квадратичной формы (см. Добавление, § 11); этим же путем мы найдем еще один инвариант и получим, таким образом, все основные ортогональные инварианты, связанные с уравнением линии второго порядка.

Рассмотрим с этой целью квадратичную форму

$$\Phi(x, y, t)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2, \tag{1}$$

получающуюся из полинома $F(x, y)$ «дополнением до однородности», а также квадратичную форму

$$\varphi(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2, \tag{2}$$

представляющую собою совокупность членов второго измерения полинома $F(x, y)$.

Напомним, что дискриминант квадратичной формы (1) есть

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3}$$

и что дискриминант квадратичной формы (2) представляет собою алгебраическое дополнение A_{33} элемента a_{33} в предыдущем определителе:

$$A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2. \tag{4}$$

Вспомним теперь предложение (см. Добавление, § 11), гласящее, что *дискриминант квадратичной формы, получающейся из данной в результате линейной однородной подстановки над переменными, равен дискриминанту исходной формы, умноженному на квадрат определителя подстановки.*

При переходе от системы прямоугольных осей Oxy к системе прямоугольных осей $O'x'y'$ переменные x, y в полиноме $F(x, y)$ подвергаются неоднородной подстановке [1])

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi+\alpha, \\ y&=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+\beta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Чтобы иметь дело с линейной *однородной* подстановкой над переменными x, y, t квадратичной формы $\Phi(x, y, t)$, условимся подвергать эти последние подстановке

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi+\alpha t', \\ y&=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+\beta t', \\ t&=\qquad\qquad\qquad\quad t'. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

При $t=t'=1$ эта подстановка обращается в подстановку (5), а исходная и преобразованная формы $\Phi(x, y, t)$ и $\Phi'(x', y', t')$ обращаются в исходный и преобразованный полиномы $F(x, y)$ и $F'(x', y')$.

Определитель подстановки (5a) равен

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \alpha \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

---

[1]) Мы рассматриваем, для сокращения письма, только тот случай, когда системы координат — одного класса (§ 69). В противном случае вместо формул (5) будем иметь формулы

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi+\alpha, \\ y&=x'\sin\varphi-y'\cos\varphi+\beta; \end{aligned}$$

все результаты, изложенные в настоящем параграфе, останутся справедливыми и в этом случае.

Поэтому дискриминант A квадратичной формы $\Phi(x, y, t)$ останется неизменным при замене координат, т. е. мы будем иметь

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Итак, дискриминант A есть инвариант.

Применим теперь ту же теорему к квадратичной форме $\varphi(x, y)$, рассматривая линейную подстановку

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Так как определитель этой подстановки равен 1, то дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y)$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

остается неизменным при повороте осей координат. Так как, далее, перенос начала вовсе не изменяет коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} полинома $F(x, y)$, то A_{33} остается неизменным при всяком преобразовании прямоугольных координат. Таким образом, инвариантность A_{33} доказана снова.

Рассмотрим, далее, квадратичную форму [1])

$$\varphi(x, y)-\lambda(x^2+y^2)=(a_{11}-\lambda)x^2+2a_{12}xy+(a_{22}-\lambda)y^2, \qquad (*)$$

где λ — произвольная постоянная.

При подстановке (6) эта квадратичная форма переходит в форму

$$\varphi'(x', y')-\lambda(x'^2+y'^2)=(a'_{11}-\lambda)x'^2+2a'_{12}x'y'+(a'_{22}-\lambda)y'^2, \qquad (**)$$

ибо при подстановке (6) имеем тождественно

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2.$$

Так как дискриминанты форм (*) и (**) должны быть равны между собою, то

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda \end{vmatrix},$$

или, раскрывая определители:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=\lambda^2-(a'_{11}+a'_{22})\lambda+(a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}).$$

---

[1]) Мы применяем здесь к частному случаю общий прием, указанный в Добавлении (§ 14).

Это соотношение должно иметь место при всяких λ, следовательно, коэффициенты при различных степенях λ должны быть одинаковы в правой и левой частях. Это дает

$$a_{11}+a_{22}=a'_{11}+a'_{22},\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}.$$

Второе из этих равенств выражает инвариантность A_{33}; первое же показывает, что

$$S=a_{11}+a_{22}$$

есть также инвариант — результат, полученный в предыдущем параграфе иным путем.

Итак, мы приходим к следующему важному выводу: *выражения*

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\quad S=a_{11}+a_{22} \tag{7}$$

суть ортогональные инварианты полинома $F(x, y)$.

A и A_{33} суть соответственно дискриминанты форм $\Phi(x, y, t)$ и $\varphi(x, y)$. Мы будем их, для краткости, называть соответственно «большим» и «малым» дискриминантами полинома $F(x, y)$.

Замечание 1. Вспомним, что равенство $A=0$ выражает необходимое и достаточное условие того, чтобы наша линия второго порядка была распадающейся.

Равенство же $A_{33}=0$ выражает необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратичная форма $\varphi(x, y)$ была полным квадратом, т. е. чтобы

$$\varphi(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=\lambda(ax+by)^2;$$

см. Добавление, начало § 12.

Замечание 2. Кроме инвариантов (7) можно составить бесчисленное множество других: всякая функция от A, A_{33}, S будет также инвариантом (см. предыдущий параграф). Вопрос о том, является ли, обратно, всякий инвариант функцией указанных трёх, будет рассмотрен ниже (§ 261).

Отметим, что, в частности, корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-S\lambda+A_{33}=0 \tag{8}$$

суть также инварианты, ибо коэффициенты этого уравнения не изменяются при замене прямоугольных координат. В противоположность инвариантам (7) величины λ_1 и λ_2 — иррациональные инварианты (т. е. не выражаются рационально через коэффициенты полинома F). Инварианты S и A_{33} суть функции от λ_1, λ_2:

$$S=\lambda_1+\lambda_2,\quad A_{33}=\lambda_1\lambda_2.$$

К инвариантам могут быть также причислены ранги определителей A и A_{33}. Ранг определителя A — не только ортогональный инвариант, но и проективный, ибо он остается неизменным при всяком проективном преобразовании (т. е. при всякой линейной однородной неособенной подстановке над x, y, z, t; см. Добавление, § 11).

§ 250. Метрические инварианты в случае обобщенных декартовых координат

Формулы, выражающие метрические свойства[1]) линии второго порядка, не должны зависеть от положения линии по отношению к системе декартовых координат, но они, вообще говоря, зависят от длин координатных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и угла ν между ними (т. е. от формы и размеров системы, но не от ее положения относительно линии).

Форма и размеры системы вполне характеризуются коэффициентами квадратичной формы (которую мы будем называть *основной метрической формой*)

$$g_{11}X^2+2g_{12}XY+g_{22}Y^2, \tag{1}$$

выражающей квадрат длины произвольного вектора $\mathbf{P}(X, Y)$; мы применяем здесь обозначения § 56. Действительно, мы имеем (§ 55)

$$g_{11}=|\mathbf{u}|^2,\ g_{22}=|\mathbf{v}|^2,\ g_{12}=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\nu, \tag{2}$$

что вполне определяет $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ и ν $(0<\nu<\pi)$, когда даны[2]) g_{11}, g_{22}, g_{12}.

В соответствии с этим, под *метрическими инвариантами* полинома $F(x, y)$ мы будем понимать функции

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, g_{11}, g_{12}, g_{22}),$$

зависящие от коэффициентов полинома F и от коэффициентов основной метрической формы (1), остающиеся неизменными при замене данной декартовой системы произвольной другой декартовой системой.

Мы найдем метрические инварианты, обобщающие ортогональные инварианты A, A_{33}, S и сводящиеся к этим последним в случае прямоугольной системы (т. е. когда $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{12}=0$).

Заметим с этой целью следующее. При подстановке [сравн. предыдущий параграф, формулы (5а)]

$$x=l_1x'+l_2y'+\alpha t',\ y=m_1x'+m_2y'+\beta t',\ t=t' \tag{3}$$

форма $\Phi(x, y, t)$ переходит в форму $\Phi'(x', y', t')$; дискриминанты A и A' этих форм связаны соотношением

$$A'=A\cdot\Delta^2, \tag{4}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \alpha \\ m_1 & m_2 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

---

[1]) Имеем в виду метрические свойства в узком смысле (§ 78).

[2]) g_{11}, g_{12}, g_{22} должны быть всегда задаваемы так, чтобы форма (1) была положительной. См. § 67, 2°.

Подстановке (3) соответствует следующая подстановка для координат вектора:

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y', \\ Y &= m_1X' + m_2Y'; \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

при этой подстановке форма (1) обращается в форму

$$g'_{11}X'^2 + 2g'_{12}X'Y' + g'_{22}Y'^2. \tag{1'}$$

Дискриминант

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

формы (1) связан с дискриминантом G' формы (1') соотношением

$$G' = G \cdot \Delta^2, \tag{7}$$

где Δ — тот же самый определитель, что и в (4), как это видно на основании (5). Из (4) и (7) следует

$$\frac{A'}{G'} = \frac{A}{G},$$

т. е. $\frac{A}{G}$ есть метрический инвариант.

Точно так же докажем, что $\frac{A_{33}}{G}$, где A_{33} обозначает по-прежнему дискриминант формы

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

есть инвариант при преобразованиях, не изменяющих начала координат.

Рассмотрим, наконец, форму

$$\varphi(x, y) - \lambda(g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2) =$$
$$= (a_{11} - \lambda g_{11})x^2 + 2(a_{12} - \lambda g_{12})xy + (a_{22} - \lambda g_{22})y^2.$$

На основании сказанного выше, отношение дискриминанта этой формы к G, т. е. отношение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda g_{11} & a_{12} - \lambda g_{12} \\ a_{21} - \lambda g_{21} & a_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} : G$$

есть инвариант при замене системы координат без изменения начала. Раскрывая определитель, получим после простых приведений, что это отношение равно

$$\lambda^2 - \lambda\frac{a_{11}g_{22} + a_{22}g_{11} - 2a_{12}g_{12}}{G} + \frac{A_{33}}{G}.$$

Так как последнее выражение инвариантно при всяких λ, то все коэффициенты при различных степенях λ — инварианты. Свободный член и коэффициенты при λ^2 не дают ничего нового. Остается еще один новый инвариант:

$$\frac{a_{11}g_{22} + a_{22}g_{11} - 2a_{12}g_{12}}{G}.$$

Итак, мы нашли три инварианта:

$$A^* = \frac{A}{G}, \quad A^*_{33} = \frac{A_{33}}{G}, \quad S^* = \frac{a_{11}g_{22} + a_{22}g_{11} - 2a_{12}g_{12}}{G}. \tag{8}$$

Инвариантность последних двух выражений доказана пока только при условии неизменности начала; но, очевидно, перенос начала вовсе не влияет на a_{11}, a_{12}, a_{22} и A_{33}; что же касается до g_{11}, g_{12}, g_{22}, то при их преобразовании мы пользуемся формулами (3а) для координат вектора, где положение начала вовсе не играет никакой роли.

В случае необобщенной декартовой (косоугольной) системы

$$g_{11}=1, \quad g_{12}=\cos\nu, \quad g_{22}=1,$$

$$G=\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu \\ \cos\nu & 1 \end{vmatrix}=\sin^2\nu,$$

и инварианты (8) принимают вид

$$A^*=\frac{A}{\sin^2\nu}, \quad A^*_{33}=\frac{A_{33}}{\sin^2\nu}, \quad S^*=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\nu}{\sin^2\nu}. \tag{9}$$

При $\nu=\frac{\pi}{2}$ эти инварианты обращаются в ортогональные инварианты A, A_{33}, S.

§ 251. Приложение: теоремы Аполлония

Пусть дан эллипс уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1}$$

в прямоугольных координатах Oxy. Взяв в качестве новых осей Ox', Oy' необобщенной системы два каких-либо сопряженных диаметра, получим уравнение вида (§ 234)

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-1=0, \tag{1'}$$

изображающее ту же кривую. Полином в левой части (1′) получается из полинома в левой части (1) заменой координат вида: $x=l_1x'+l_2y'$, $y=m_1x'+m_2y'$ без умножения результата на постоянный множитель; это следует из того, что свободные члены этих полиномов одинаковы.

Составляя инварианты

$$S^*=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\nu}{\sin^2\nu}, \quad A^*_{33}=\frac{A_{33}}{\sin^2\nu}$$

для этих полиномов, получим два замечательных соотношения, связывающих длины полуосей a, b с длинами a', b' сопряженных полудиаметров[1]) и с углом ν между этими последними.

Действительно, для системы Ox, Oy имеем

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}, \quad a_{22}=\frac{1}{b^2}, \quad a_{12}=0, \quad \nu=\frac{\pi}{2},$$

и, следовательно,

$$S^*=S=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}, \quad A^*_{33}=A_{33}=\frac{1}{a^2b^2}$$

Для осей Ox', Oy' будем иметь аналогично:

$$S^*=\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\nu}, \quad A^*_{33}=\frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\nu}.$$

---

[1]) То, что a', b' суть длины полудиаметров, направленных по Ox' и Oy', очевидно: полагая в (1′) $y'=0$, получим $x'=\pm a'$; аналогично и для b'.

Приравнивая правые части, получим

$$a'^2b'^2\sin^2\nu = a^2b^2,$$

$$\frac{a'^2+b'^2}{a'^2b'^2\sin^2\nu} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

Последнее соотношение, в силу предпоследнего, дает

$$a'^2+b'^2 = a^2+b^2,$$

и, значит, мы имеем следующие соотношения:

$$a'^2+b'^2 = a^2+b^2; \quad a'b'\sin\nu = ab. \tag{2}$$

Эти формулы выражают две следующие теоремы Аполлония:

1. *Сумма квадратов двух сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная* (равная сумме квадратов полуосей).

2. *Площадь параллелограмма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах эллипса, есть величина постоянная* (равная площади прямоугольника, построенного на двух полуосях).

Аналогичные теоремы имеем для гиперболы. Именно, путем, совершенно подобным предыдущему, получим формулы

$$a'^2-b'^2 = a^2-b^2, \quad a'b'\sin\nu = ab. \tag{3}$$

Значит, для гиперболы вторая теорема Аполлония формулируется точно так же, как для случая эллипса. Первая же заменяется следующей:

Разность квадратов двух сопряженных полудиаметров гиперболы есть величина постоянная (равная разности квадратов полуосей).

Замечание. Вторая теорема Аполлония для эллипса по существу совпадает с предложением, указанным в § 244, упр. 2.

Вторая же теорема Аполлония для гиперболы по существу совпадает с предложением, доказанным в конце § 245.

II. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 252. Преобразование к центру

Если линия второго порядка имеет (собственный) центр (один или бесчисленное множество), то уравнение ее можно упростить, перенеся начало координат в центр (или один из центров). Именно, из § 228 мы знаем, что в уравнении линии относительно новой системы осей (с началом в центре) отсутствуют члены первой степени, и, значит, уравнение принимает вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0, \tag{1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} имеют те же значения, что и в исходном уравнении, а $a'_{33} = F(\alpha, \beta)$ (см. § 247).

Коэффициент a'_{33} очень легко также выразить через коэффициенты исходного уравнения в случае центральной линии (линии с одним определенным центром), т. е. когда

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0. \tag{2}$$