§ 274. Диаметральные плоскости как полярные плоскости несобственных точек

Аналогично изложенному в § 232, можно определить диаметральную плоскость, сопряженную с направлением (X, Y, Z), как полярную плоскость несобственной точки $(X, Y, Z, 0)$. Так же точно центр можно рассматривать как полюс несобственной плоскости.

Из этих новых определений можно легко вывести все свойства диаметральных плоскостей и центра, выведенные выше иным путем. Но на этом мы здесь останавливаться не будем.

§ 275. Асимптоты

Асимптотой поверхности второго порядка Г называется всякая прямая, обе точки пересечения которой с Г совпадают в несобственной точке. Иными словами, асимптота есть касательная к Г в несобственной точке.

Пусть N — некоторая точка пространства, П — ее полярная плоскость относительно Г и γ — пересечение П и Г. Касательные, проведенные из N к Г, соединяют N с точками γ. Те из касательных, которые касаются Г в несобственных точках, должны проходить через те точки γ, которые находятся на несобственной плоскости. Таких точек, вообще говоря,— две (точки пересечения γ с несобственной плоскостью). Следовательно, из данной произвольной точки можно провести, вообще говоря, две асимптоты поверхности Г. Но если N находится в центре поверхности, то, как легко проверить, плоскость П (полярная плоскость точки N относительно Г) есть несобственная плоскость; линия γ — целиком несобственная, и всякая прямая, проведенная через N и любую точку γ, будет асимптотой.

Следовательно, асимптоты, проведенные из центра, образуют конус, называемый *асимптотическим конусом*. Это, очевидно,— конус асимптотических направлений, проведенных из центра. Не надо, конечно, забывать, что асимптоты могут быть мнимыми, а также несобственными.

III. МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА. ГЛАВНЫЕ ДИАМЕТРАЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К НОРМАЛЬНОМУ ВИДУ

Во всем этом отделе, посвященном метрическим свойствам, координаты предполагаются прямоугольными, если противное не оговорено.

§ 276. Главные диаметральные плоскости и главные направления

Направление (X, Y, Z) называется *главным* (по отношению к данной поверхности второго порядка), если диаметральная плоскость, сопряженная с ним, перпендикулярна к нему. Соответствующая диаметральная плоскость также называется главной. Она, очевидно, является плоскостью симметрии поверхности.

Разыскание главных направлений есть одна из важнейших задач в метрической теории поверхностей второго порядка, и мы теперь приступаем к решению этого вопроса.

Мы знаем из § 272, что уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением (X, Y, Z), имеет вид

$$Lx + My + Nz + K = 0, \tag{1}$$

где (мы пишем теперь индексы в другом порядке)

$$\left.\begin{aligned} L &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ M &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ N &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для того чтобы направление (X, Y, Z) было главным, т. е. плоскость (1) была перпендикулярна к направлению (X, Y, Z), необходимо и достаточно, чтобы величины L, M, N были пропорциональны величинам X, Y, Z, т. е. чтобы имели место соотношения

$$L = \lambda X, \quad M = \lambda Y, \quad N = \lambda Z, \tag{3}$$

где λ — некоторое число; или, подробнее,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z &= \lambda X, \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z &= \lambda Y, \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z &= \lambda Z, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или еще (перенося все члены в левую часть):

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0, \\ a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z &= 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Таким образом, величины X, Y, Z должны удовлетворять системе уравнений (4a). Если определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \tag{5}$$

этой системы отличен от нуля, то единственным решением ее является $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Но, по условию, X, Y, Z (координаты вектора направления) не должны равняться нулю одновременно. Значит, число λ должно удовлетворять уравнению

$$D(\lambda) = 0. \tag{6}$$

Это — уравнение третьей степени, ибо $D(\lambda)$ есть, очевидно, полином третьей степени:

$$D(\lambda) = S_0\lambda^3 + S\lambda^2 + S'\lambda + S''.$$

Нетрудно вычислить коэффициенты этого полинома. Действительно, очевидно, что члены, содержащие λ^3 и λ^2, произойдут исключительно от произведения членов главной диагонали определителя $D(\lambda)$, т. е. от

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda).$$

Отсюда ясно, что коэффициент при λ^3 равен -1, а коэффициент при λ^2 есть $a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Далее, свободный член S'' в $D(\lambda)$ равен $D(0)$; значит,

$$S'' = D(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель есть дискриминант формы $\varphi(x, y, z)$, который мы условились обозначать через A_{44}. Легко также найти выражение для S', но оно нам не понадобится.

Итак, имеем

$$D(\lambda) = -\lambda^3 + S\lambda^2 + S'\lambda + A_{44}, \tag{7}$$

где, в частности,

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \tag{8}$$

Пусть λ обозначает один из корней уравнения[1]) $D(\lambda) = 0$. Если теперь в системе (4а) подразумевать под λ это значение, то система эта будет, как известно, допускать решения (X, Y, Z), отличные от нуля. Таких решений будет даже бесчисленное множество, ибо если (X, Y, Z) есть одно какое-либо решение, то (kX, kY, kZ), где k — совершенно произвольный множитель, отличный от нуля, будет, очевидно, также решением.

Однако два решения, отличающиеся друг от друга только общим, не равным нулю множителем, мы не будем считать различными[2]).

---

[1]) Ниже будет показано, что все корни уравнения $D(\lambda) = 0$ действительные. Но мы пока этим фактом не пользуемся.

[2]) Решение (kX, kY, kZ) при $k \neq 0$, дает, очевидно, то же направление, что и (X, Y, Z). Поэтому-то мы условились не считать различными решения, отличающиеся общим множителем.

Предположим, в частности, что λ есть действительный корень уравнения $D(\lambda) = 0$. Тогда, очевидно, соответствующая система (4а) допускает действительное решение (X, Y, Z), ибо все коэффициенты этой системы — действительные числа.

Направление, характеризуемое вектором (X, Y, Z), будет одним из искомых главных направлений. Исключение может представить только тот случай, когда направление (X, Y, Z) окажется асимптотическим, ибо в этом случае ему не соответствует диаметральная плоскость в собственном смысле этого слова. Однако мы условимся называть главным направлением всякое направление, коэффициенты (X, Y, Z) которого удовлетворяют системе (4) или (4а); мы будем говорить, что это направление соответствует данному корню λ уравнения $D(\lambda) = 0$.

Мы видели, что каждому (действительному) корню λ соответствует по крайней мере одно главное направление. Мы увидим ниже, что данному корню, вообще говоря, будет соответствовать только одно главное направление. Но в некоторых случаях данному корню может соответствовать и бесчисленное множество главных направлений.

§ 277. Некоторые общие предложения о преобразовании квадратичной формы трех переменных

Для облегчения чтения дальнейшего мы изложим здесь (иногда приводя и доказательства) те предложения о преобразовании квадратичных форм, которые доказаны в Добавлении для общего случая. Здесь мы будем вести изложение применительно к интересующему нас случаю квадратичной формы

$$\varphi(X, Y, Z) = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + \\ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY \tag{1}$$

трех переменных.

Начнем со следующего замечания. Определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \tag{2}$$

есть дискриминант квадратичной формы

$$\psi(X, Y, Z) = \varphi(X, Y, Z) - \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2). \tag{3}$$

При преобразовании прямоугольных координат величины X, Y, Z преобразуются, как мы знаем, подстановкой вида

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2,$$

т. е. подстановка (4) — ортогональная. Значит определитель подстановки

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}=\pm 1; \tag{5}$$

это было доказано уже в § 71 [1]).

При преобразовании (4) квадратичная форма $\varphi(X, Y, Z)$ преобразуется в форму

$$\varphi'(X', Y', Z')=a'_{11}X'^2+a'_{22}Y'^2+a'_{33}Z'^2+2a'_{23}Y'Z'+ \\ +2a'_{31}Z'X'+2a'_{12}X'Y', \tag{1a}$$

где $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$ выражаются вполне определенным образом через коэффициенты первоначальной формы $\varphi(X, Y, Z)$ и коэффициенты $l_1, \ldots, n_3$ подстановки (4); форма же ψ преобразуется в форму

$$\psi'(X', Y', Z')=\varphi'(X', Y', Z')-\lambda(X'^2+Y'^2+Z'^2). \tag{3a}$$

Дискриминанты форм (3) и (3a) равны между собою, на основании сказанного в Добавлении (§ 14). Значит,

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix} \tag{6}$$

при *всяких* λ. Итак, $D(\lambda)$ есть инвариант при ортогональных подстановках, т. е. *ортогональный инвариант*. Если раскрыть этот определитель и расположить по степеням λ, т. е. написать (см. предыдущий параграф)

$$D(\lambda)=-\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+A_{44}, \tag{7}$$

то S, S', A_{44} также должны быть инвариантами. Отметим, в частности, два инварианта:

$$A_{44} \quad \text{и} \quad S=a_{11}+a_{22}+a_{33}. \tag{8}$$

Инвариантами являются также корни уравнения $D(\lambda)=0$, ибо уравнение это остается неизменным.

Далее, весьма важно отметить, что *ранг определителя* $D(\lambda)$ также *остается неизменным при преобразованиях* (4); доказательство см. в Добавлении, § 11. Напомним, наконец, что (как пока-

[1]) См. еще Добавление, § 14.

зано в § 11 Добавления), система линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial X}&=(a_{11}-\lambda)X+a_{12}Y+a_{13}Z=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial Y}&=a_{21}X+(a_{22}-\lambda)Y+a_{33}Z=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial Z}&=a_{31}X+a_{32}Y+(a_{33}-\lambda)Z=0\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

после подстановки (4) переходит в систему, эквивалентную следующей:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial X}&=(a'_{11}-\lambda)X'+a'_{12}Y'+a'_{13}Z'=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial Y}&=a'_{21}X'+(a'_{22}-\lambda)Y'+a'_{23}Z'=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial Z}&=a'_{31}X'+a'_{32}Y'+(a'_{33}-\lambda)Z'=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9a)$$

Это значит, что если X, Y, Z удовлетворяют системе (9), то величины X', Y', Z', связанные с ними подстановкой (4), удовлетворяют системе (9а), и обратно, если X', Y', Z' удовлетворяют системе (9а), то соответствующие X, Y, Z удовлетворяют системе (9).

§ 278. Свойства корней уравнения $D(\lambda)=0$ и соответствующих главных направлений

Теперь мы переходим к доказательству ряда предложений о корнях уравнения $D(\lambda)=0$ и соответствующих главных направлениях.

1. *Все корни уравнения $D(\lambda)=0$ — действительные.* В самом деле., пусть наше уравнение имеет мнимый (комплексный) корень $\lambda_1=\alpha+i\beta$. Тогда, на основании известной теоремы алгебры, оно будет иметь также сопряженный корень $\lambda_2=\alpha-i\beta$.

Пусть X_1, Y_1, Z_1 — какое-либо решение системы (4а) или (4) § 276, соответствующее значению $\lambda=\lambda_1$, т. е. пусть

$$\left.\begin{aligned}a_{11}X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1&=\lambda_1X_1,\\ a_{21}X_1+a_{22}Y_1+a_{23}Z_1&=\lambda_1Y_1,\\ a_{31}X_1+a_{32}Y_1+a_{33}Z_1&=\lambda_1Z_1.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Пусть X_2, Y_2, Z_2 — числа, соответственно сопряженные с числами X_1, Y_1, Z_1. Числа эти будут, очевидно, удовлетворять системе

$$\left.\begin{aligned}a_{11}X_2+a_{12}Y_2+a_{13}Z_2&=\lambda_2X_2,\\ a_{21}X_2+a_{22}Y_2+a_{23}Z_2&=\lambda_2Y_2,\\ a_{31}X_2+a_{32}Y_2+a_{33}Z_2&=\lambda_2Z_2,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

полученной из (1) путем замены фигурирующих в ней комплексных величин сопряженными. Умножим теперь уравнения (1) соответственно на X_2, Y_2, Z_2 и сложим. Тогда получим

$$(a_{11}X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1)X_2+(a_{21}X_1+a_{22}Y_1+a_{23}Z_1)Y_2+$$
$$+(a_{31}X_1+a_{32}Y_1+a_{33}Z_1)Z_2=\lambda_1(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2).$$

Поступая аналогично с системой (2), т. е. умножая уравнения (2) соответственно на X_1, Y_1, Z_1 и складывая, получим

$$(a_{11}X_2+a_{12}Y_2+a_{13}Z_2)X_1+(a_{21}X_2+a_{22}Y_2+a_{23}Z_2)Y_1+$$
$$+(a_{31}X_2+a_{32}Y_2+a_{33}Z_2)Z_1=\lambda_2(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2).$$

Левые части двух предыдущих равенств, очевидно, тождественны, в силу того, что $a_{ij}=a_{ji}$. Поэтому, вычитая эти равенства, получим

$$(\lambda_1-\lambda_2)(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2)=0. \qquad (3)$$

Но величина $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$ необходимо отлична от нуля [1]). Следовательно, должно быть $\lambda_1-\lambda_2=(\alpha+\beta i)-(\alpha-\beta i)=2i\beta=0$, т. е. $\beta=0$. Значит, величина λ_1 должна быть действительной, а это и требовалось доказать.

2. *Главные направления, соответствующие двум различным корням уравнения $D(\lambda)$, взаимно перпендикулярны.*

Действительно, пусть λ_1 и λ_2 — два различных корня уравнения $D(\lambda)=0$; теперь мы знаем, что эти корни — действительные. Пусть (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) — направления, соответствующие этим корням. Величины эти удовлетворяют соответственно системам (1) и (2), из которых, как мы видели, вытекает равенство (3). Но так как по условию $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$, то необходимо

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0, \qquad (4)$$

а это есть как раз условие перпендикулярности векторов $(X_1, Y_1 Z_1)$ и (X_2, Y_2, Z_2).

3. *Если все три корня уравнения $D(\lambda)=0$ различны, то каждому корню соответствует только одно главное направление, так что имеются три и только три главных направления* (которые, на основании предыдущей теоремы, будут взаимно перпендикулярны). *Если направить новые оси координат Ox', Oy', Oz параллельно этим трем главным направлениям, то квадратичная форма*

$$\varphi(X, Y, Z)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+2a_{12}XY$$

[1]) Произведение комплексного числа $\alpha+i\beta$ на сопряженное $\alpha-i\beta$ равно $\alpha^2+\beta^2$. Значит, если данное число не нуль, то произведение это будет положительным.

приведется к «каноническому виду»:

$$\varphi'(X', Y', Z') = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2.$$

Действительно, мы знаем, что каждому из корней λ_1, λ_2, λ_3 соответствует по крайней мере по одному главному направлению. Если данному корню соответствует несколько главных направлений (ниже мы увидим, что в рассматриваемом случае этого быть не может), то возьмем какое-либо одно из них, так что будем иметь три (взаимно перпендикулярных) направления (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3), соответствующих трем корням λ_1, λ_2, λ_3.

Направим оси Ox', Oy', Oz' новой системы соответственно параллельно этим направлениям. Тогда квадратичная форма $\varphi(X, Y, Z)$ перейдет в квадратичную форму новых переменных X', Y', Z', которую мы обозначим так:

$$\varphi'(X', Y', Z') = a'_{11}X'^2 + \ldots + 2a'_{12}X'Y'.$$

Если X'_1, Y'_1, Z'_1 суть новые координаты вектора X_1, Y_1, Z_1, то они должны удовлетворять системе (см. конец предыдущего параграфа)

$$\left.\begin{aligned} (a'_{11} - \lambda_1) X'_1 + a'_{12}Y'_1 + a'_{13}Z'_1 &= 0, \\ a'_{21}X'_1 + (a'_{22} - \lambda_1) Y'_1 + a'_{23}Z'_1 &= 0, \\ a'_{31}X'_1 + a'_{32}Y'_1 + (a'_{33} - \lambda_1) Z'_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Но ведь при новой системе осей вектор X'_1, Y'_1, Z'_1 параллелен оси Ox', т. е. мы должны иметь $X'_1 \neq 0$, $Y'_1 = Z'_1 = 0$. Подставляя эти значения в (5), получаем

$$(a'_{11} - \lambda_1) X'_1 = 0, \quad a'_{21}X'_1 = 0, \quad a'_{31}X'_1 = 0,$$

откуда следует

$$a'_{11} = \lambda_1, \quad a'_{21} = 0, \quad a'_{21} = 0. \qquad (6)$$

Так же докажем, что $a'_{22} = \lambda_2$, $a'_{33} = \lambda_3$ и что все коэффициенты, содержащие различные индексы, обращаются в нуль. Таким образом, форма φ' имеет вид

$$\varphi'(X', Y', Z') = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2 \qquad (7)$$

(*канонический вид*).

Система уравнений (4а) § 276, определяющая главные направления, составленная применительно к новой системе осей, т. е. применительно к форме (7), принимает вид

$$(\lambda_1 - \lambda) X' = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda) Y' = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda) Z' = 0.$$

Эта система может иметь решения только при λ, равном одному из значений λ_1, λ_2, λ_3, что мы уже знали раньше. Но отсюда вытекает еще такое следствие.

При $\lambda = \lambda_1$ система эта обращается в следующую:

$$0 \cdot X = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda_1) Y' = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda_1) Z' = 0.$$

Так как $\lambda_2 - \lambda_1$ и $\lambda_3 - \lambda_1$, по условию, отличны от нуля, то необходимо $Y' = Z' = 0$; величина же X' остаётся произвольной; мы её должны взять отличной от нуля, ибо иначе было бы $X' = Y' = Z' = 0$.

Значит, корню $\lambda = \lambda_1$ отвечает одно и только одно направление $(X', 0, 0)$, т. е. направление оси Ox'. Так же точно докажем, что корням λ_2 и λ_3 отвечает только по одному направлению (а именно, направления осей Oy' и Oz').

Таким образом, наше предложение 3 доказано вполне. Оно является частным случаем предложения, изложенного в следующем пункте.

4. *Каждому простому корню уравнения $D(\lambda) = 0$ соответствует одно, вполне определенное главное направление. Двойному корню соответствует бесчисленное множество главных направлений* (а именно, главными направлениями, соответствующими двойному корню, будут все направления, перпендикулярные к главному направлению, которое соответствует корню, отличному от данного двойного); наконец, *если уравнение имеет один тройной корень, то все направления будут главными. Во всех случаях существует по крайней мере одна тройка взаимно перпендикулярных главных направлений, и если придать новым осям координат эти направления, то форма φ обратится в форму*

$$\varphi' = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2, \tag{8}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни уравнения $D(\lambda) = 0$, которые могут быть и равными между собою.

Докажем это предложение. Пусть λ_3 — один какой-нибудь корень уравнения $D(\lambda) = 0$, всё равно, простой или кратный. Возьмем новую систему осей, направив Oz' параллельно главному направлению, соответствующему этому корню (или параллельно одному из них, если таких направлений несколько); оси Ox' и Oy' направим произвольно (но так, разумеется, чтобы они были перпендикулярны к Oz' и между собою). Тогда совершенно так же, как при доказательстве предыдущего предложения, найдем, что

$$a'_{33} = \lambda_3, \quad a'_{13} = 0, \quad a'_{23} = 0.$$

Значит, при данном выборе осей будем иметь

$$\varphi'(X', Y', Z') = \lambda_3 Z'^2 + a'_{11} X'^2 + 2a'_{12} X'Y' + a'_{22} Y'^2.$$

Но из предыдущего мы знаем [1]), что путем подходящего поворота осей $Ox'y'$ в их плоскости (при этом координата Z' не изменяется) квадратичную форму двух переменных

$$a_{11}X'^2+2a_{12}X'Y'+a_{22}Y'^2$$

можно привести к каноническому виду

$$\lambda_1X'^2+\lambda_2Y'^2.$$

Мы для простоты снова обозначили через X', Y' новые координаты относительно повернутой системы. Итак, путем подходящего выбора осей квадратичная форма φ приводится к каноническому виду

$$\varphi'=\lambda_1X'^2+\lambda_2Y'^2+\lambda_3Z'^2.$$

Относительно λ_1 и λ_2 мы пока не знаем, являются ли они корнями уравнения $D(\lambda)=0$. Но это весьма легко показать. Действительно, составляя определитель $D(\lambda)$ применительно к форме φ', получим тождество [2])

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda_1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda).$$

Следовательно, λ_1, λ_2, λ_3 суть корни уравнения $D(\lambda)=0$.

Рассмотрим теперь отдельно три случая.

а) Все корни λ_1, λ_2, λ_3 различны. В этом случае, как мы уже знаем, каждому корню соответствует только одно главное направление; это вытекает также из нижеследующего.

Для нахождения координат X_1, Y_1, Z_1 главного направления (в старой системе осей), соответствующего корню λ_1, следует решить систему

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_1)X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1&=0,\\ a_{21}X_1+(a_{22}-\lambda_1)Y_1+a_{23}Z_1&=0,\\ a_{31}X_1+a_{32}Y_1+(a_{33}-\lambda_1)Z_1&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Ранг определителя $D(\lambda_1)$ этой системы равен двум, ибо определитель $D(\lambda_1)$, составленный применительно к преобразованной форме (8), есть

$$D(\lambda_1)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_1\end{vmatrix}$$

---

[1]) Это доказано в § 253. Независимо от доказанного в § 253 можно доказать упомянутое предложение, применяя прием, изложенный в настоящем параграфе, к квадратичной форме двух переменных

$$\varphi(X,Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2.$$

[2]) Вспомним, что определитель $D(\lambda)$ остается неизменным при преобразовании координат.

и ранг его [1]), очевидно, равен двум, ибо $D(\lambda_1) = 0$, а определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)$$

отличен от нуля, так как λ_1, λ_2, λ_3 различны по предположению.

Значит, одно из уравнений системы (9) есть следствие двух других, которые дают вполне определенные значения для отношения величин X_1, Y_1, Z_1, т. е. вполне определенное главное направление.

Так же найдем главные направления, соответствующие корням λ_2 и λ_3. Эти три направления, как мы знаем, будут взаимно перпендикулярными.

b) Два корня λ_1 и λ_2 равны между собою, а третий λ_3 не равен им:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

При $\lambda = \lambda_3$ мы получим, как и в предыдущем случае, вполне определенное главное направление (X_3, Y_3, Z_3).

При $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ранг определителя $D(\lambda_1)$ системы (9) будет равен 1, ибо определитель $D(\lambda_1)$, составленный применительно к преобразованной форме, будет

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix},$$

и ранг его, очевидно, равен 1.

Значит, в системе (9) два из уравнений будут следствиями одного единственного, которое мы, для краткости, запишем так:

$$AX + BY + CZ = 0. \tag{10}$$

Мы получаем, таким образом, бесчисленное множество главных направлений, соответствующих двойному корню $\lambda_1 = \lambda_2$. Этими направлениями будут, очевидно, все направления, перпендикулярные к вектору (A, B, C). Но так как все эти направления должны быть перпендикулярны к вектору (X_3, Y_3, Z_3), то выходит, что векторы (A, B, C) и (X_3, Y_3, Z_3) параллельны и что главными направлениями, соответствующими двойному корню $\lambda_1 = \lambda_2$, являются те и только те направления, которые перпендикулярны к направлению (X_3, Y_3, Z_3), соответствующему простому корню λ_3. Выбрав произвольным образом одно из них (X_1, Y_1, Z_1) и затем взяв какой-нибудь вектор (X_2, Y_2, Z_2), перпендикуляр-

[1]) Вспомним, что ранг $D(\lambda)$ не меняется при преобразовании.

ный к обоим векторам (X_1, Y_1, Z_1) и (X_3, Y_3, Z_3), получим тройку взаимно перпендикулярных направлений. Взяв оси координат параллельными этим направлениям, приведем форму φ к каноническому виду (8).

c) Наконец, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то ранг определителя системы (9) равен нулю, ибо все элементы определителя $D(\lambda_1)$, составленного применительно к преобразованной форме (8), будут равны нулю. Значит, система (9) удовлетворяется тождественно всяким направлением (X, Y, Z); всякое направление будет главным. В этом случае форма φ имеет канонический вид (8) при всяком выборе (прямоугольных) осей координат, в частности, и в исходной системе.

Итак, мы имеем следующую алгебраическую теорему: *При помощи ортогональной подстановки, всякая квадратичная форма трех переменных может быть приведена к каноническому виду*

$$\varphi = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — *корни уравнения* $D(\lambda) = 0$, *все действительные.* Вместе с тем мы имеем способ действительно произвести указанные преобразования.

§ 279. Преобразование уравнения поверхности при замене декартовых координат

В следующих параграфах мы займемся упрощением уравнения поверхности второго порядка путем замены прямоугольных координат. Предварительно заметим следующие обстоятельства (сказанное в этом параграфе справедливо и в случае декартовых координат общего вида):

1°. При переносе начала координат

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma$$

полином $F(x, y, z)$ изменяется следующим образом:

$$\begin{gathered} F(x' + \alpha,\ y' + \beta,\ z' + \gamma) = \\ = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + \\ + 2F_1(\alpha, \beta, \gamma)\,x' + 2F_2(\alpha, \beta, \gamma)\,y' + 2F_3(\alpha, \beta, \gamma)\,z' + \\ + F(\alpha, \beta, \gamma), \end{gathered} \tag{1}$$

т. е. *при переносе начала координат в точку* (α, β, γ) *полином* $F(x, y, z)$ *преобразуется так: коэффициенты при членах второго измерения остаются без изменения; коэффициенты при первых степенях новых переменных* x', y', z' *равны соответственно значениям частных производных* $2F_1$, $2F_2$, $2F_3$ *в точке* (α, β, γ); наконец, *свободный член есть значение полинома* $F(x, y, z)$ *в той же точке.*

2°. Не выписывая формул, дающих изменение коэффициентов полинома $F(x, y, z)$ при изменении координатных векторов без изменения начала, заметим только, что в этом случае свободный член остается без изменения, члены второго измерения преобразованного полинома происходят исключительно от членов второго измерения первоначального, и аналогично ведут себя члены первого измерения.

§ 280. Ортогональные инварианты

Так же, как и в случае линий второго порядка, основную роль в вопросе преобразования уравнения поверхности второго порядка играют *инварианты*.

Прежде всего легко показать, что «большой дискриминант» полинома $F(x, y, z)$ — так мы будем называть дискриминант A формы $\Phi(x, y, z, t)$ — есть инвариант при преобразовании прямоугольных координат. Действительно, мы знаем, что формулы перехода имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + \alpha, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + \beta, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где α, β, γ — координаты нового начала O', а (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) — косинусы направления новых осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ относительно старых.

Рассмотрим наряду с этим подстановку

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + \alpha t', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + \beta t', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + \gamma t', \\ t &= \qquad\qquad\qquad\quad t'. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

При $t = t' = 1$ получим подстановку (1), и форма Φ обратится в полином $F(x, y, z)$.

Определитель подстановки (1a) равен

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & \alpha \\ m_1 & m_2 & m_3 & \beta \\ n_1 & n_2 & n_3 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{2}$$

Отсюда заключаем, что дискриминант A есть инвариант, ибо при преобразовании формы $\Phi(x, y, z, t)$ подстановкой (1a) дискриминант, как мы знаем, умножается на квадрат определителя подстановки, который здесь равен единице.

Далее, мы знаем, что дискриминант квадратичной формы

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy, \quad (3)$$

представляющей собою совокупность членов второго измерения в полиноме $F(x, y, z)$, т. е. определитель

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

[«малый дискриминант» полинома $F(x, y, z)$] есть инвариант при подстановках вида (1), если $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Но, очевидно, величины α, β, γ вовсе не влияют на коэффициенты членов второго измерения. Значит, A_{44} есть инвариант при всякой подстановке вида (1).

Кроме того, мы видели, что корни λ_1, λ_2, λ_3 уравнения

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

также остаются неизменными. Значит, λ_1, λ_2, λ_3 суть инварианты (в противоположность инвариантам A, A_{44} это — иррациональные инварианты).

Итак, мы нашли следующие *ортогональные инварианты* полинома $F(x, y, z)$ (т. е. инварианты при преобразовании *прямоугольных* осей):

$$A, \ A_{44}, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3. \quad (6)$$

Ранги определителей A и A_{44} также остаются неизменными, и их поэтому следует причислить к инвариантам.

Мы увидим, что перечисленные инварианты вполне определяют вид поверхности (1).

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что

$$A_{44} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad (7)$$

ибо A_{44} есть свободный член уравнения (5), т. е. уравнения (7) § 277. Это следует еще из того, что, составляя инвариант A_{44} применительно к форме φ, приведенной к каноническому виду $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2$, будем иметь

$$A_{44} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

§ 281. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 1. Центральные поверхности

Начнем с поверхностей, имеющих определенный (собственный) центр, т. е. таких, что

$$A_{44} \neq 0. \tag{1}$$

Пусть $O'(\alpha, \beta, \gamma)$ — центр поверхности, который мы умеем находить. Перенеся начало координат в эту точку, т. е. произведя подстановку

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma,$$

мы приведем $F(x, y, z)$ к виду (§ 271)

$$\left.\begin{aligned} F'(x', y', z') = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + \\ + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + a'_{44}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где исчезнут члены, содержащие первые степени координат. Мы знаем, кроме того (§ 279), что $a'_{44} = F(\alpha, \beta, \gamma)$. Но легко найти a'_{44}, и не вычисляя $F(\alpha, \beta, \gamma)$. Действительно, составляя инвариант A применительно к полиному (2), получим

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{vmatrix} = a'_{44}A_{44} \text{ и, значит, } a'_{44} = \frac{A}{A_{44}}.$$

Итак, при перенесении начала в центр, уравнение $F(x, y, z) = 0$ приводится к виду

$$\begin{aligned} a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + \\ + 2a_{12}x'y' + \frac{A}{A_{44}} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее, найдем три главных взаимно перпендикулярных направления нашей поверхности по правилам, указанным в § 278, и возьмем новые оси $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ по этим направлениям, оставляя начало неизменным. Подставив вместо x', y', z' их выражения через ξ, η, ζ, мы приведем уравнение (3) к виду

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0 \tag{4}$$

(свободный член не изменяется, так как, при повороте осей, x', y', z' суть линейные и однородные функции от ξ, η, ζ). Так как $A_{44} \neq 0$, то λ_1, λ_2, λ_3 все отличны от нуля, ибо $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A_{44}$ [1]).

[1]) См. § 280, замечание.

Пусть сперва $A \neq 0$. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 + k_3\zeta^2 = 1, \tag{5}$$

где

$$k_1 = -\frac{\lambda_1 A_{44}}{A}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_2 A_{44}}{A}, \quad k_3 = -\frac{\lambda_3 A_{44}}{A}. \tag{6}$$

Вид поверхности зависит от знаков величин k_1, k_2, k_3. Могут представиться следующие случаи.

a) k_1, k_2, k_3 все положительны. Полагая

$$k_1 = \frac{1}{a^2}, \quad k_2 = \frac{1}{b^2}, \quad k_3 = \frac{1}{c^2},$$

получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1;$$

это — уравнение *действительного эллипсоида* (см. § 269, 1°); в самом деле, поверхность эта — нераспадающаяся ($A \neq 0$) и имеет действительные точки. Линия γ_∞ (§ 269) имеет уравнение[1])

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0 \text{ при } \tau = 0;$$

она — нераспадающаяся и мнимая.

b) k_1, k_2, k_3 все три отрицательны. Тогда, подобно предыдущему, получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = -1;$$

это, очевидно,— уравнение *мнимого эллипсоида.*

c) Одно из чисел k_1, k_2, k_3 отрицательно, другие положительны, Мы можем считать (изменив, если нужно, нумерацию), что $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 < 0$. Полагая

$$k_1 = \frac{1}{a^2}, \quad k_2 = \frac{1}{b^2}, \quad k_3 = -\frac{1}{c^2},$$

получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1;$$

это — уравнение *однополого гиперболоида* (см. § 269, 2°). В самом деле, эта поверхность принадлежит к категории (a_3) § 264, ибо в однородных координатах (ξ, η, ζ, τ) ее уравнение напишется так:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} - \tau^2 = 0;$$

---

[1]) Здесь ξ, η, ζ, τ обозначают то, что в § 269 было обозначено через x, y, z, t.

линия γ_∞ имеет уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0 \quad \text{при } \tau=0;$$

она — нераспадающаяся действительная.

d) Два числа k_1, k_2, k_3, отрицательны, одно — положительно. Мы можем, например, считать $k_1<0$, $k_2<0$, $k_3>0$. Полагая

$$k_1=-\frac{1}{a^2}, \quad k_2=-\frac{1}{b^2}, \quad k_3=\frac{1}{c^2},$$

получим уравнение

$$-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

т. е. уравнение *двуполого гиперболоида* (см. § 269, 2°), как легко убедиться (сравн. предыдущий случай).

Пусть теперь $A=0$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2=0$$

и, в зависимости от знаков λ_1, λ_2, λ_3, получим, подобно предыдущему, уравнения одного из двух видов:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

(*мнимый конус*; в этом случае λ_1, λ_2, λ_3 все одного знака), или

$$\frac{\zeta^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

(*действительный конус*; в этом случае λ_1, λ_2, λ_3 не все одного знака).

Этим исчерпываются поверхности второго порядка, имеющие определенный центр.

§ 282. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду.

2. Поверхности без определенного центра. Предположим теперь, что

$$A_{44}=0, \tag{1}$$

т. е. что поверхность или не имеет центра или имеет их бесчисленное множество. В этом случае один или два корня уравнения $D(\lambda)=0$ равны нулю, ибо, как мы знаем, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=A_{44}$. Будем считать, что $\lambda_3=0$.

Теперь мы начнем с того, что найдем три главных взаимно перпендикулярных направления и повернем оси координат так,

чтобы они сделались параллельными этим направлениям. Тогда совокупность членов второго измерения примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

а уравнение $F(x, y, z) = 0$ преобразуется в следующее:

$$F'(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + \\ + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0 \tag{2}$$

(свободный член не изменится, ибо мы производим поворот осей без изменения начала). Составляя дискриминант A для преобразованного полинома $F'(x', y', z')$, получим

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix} = -a'^2_{34}\lambda_1\lambda_2. \tag{3}$$

Пусть сперва $A \neq 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_{34} \neq 0$.

Перенося начало координат в некоторую точку (α, β, γ), т. е. полагая $x' = \xi + \alpha$, $y' = \eta + \beta$, $z' = \zeta + \gamma$, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2a'_{34}\zeta + 2(a'_{14} + \lambda_1\alpha)\xi + 2(a'_{24} + \lambda_2\beta)\eta + a_{44} + \\ + \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2a'_{14}\alpha + 2a'_{24}\beta + 2a'_{34}\gamma = 0.$$

Подберем теперь α, β и γ так, чтобы

$$\lambda_1\alpha + a'_{14} = 0, \quad \lambda_2\beta + a'_{24} = 0, \\ a_{44} + \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2a'_{14}\alpha + 2a'_{24}\beta + 2a'_{34}\gamma = 0.$$

Это всегда можно сделать: первые два из последних условий определяют α и β, а третье [1]) определяет γ. После этого наше уравнение примет вид

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2a'_{34}\zeta = 0. \tag{4}$$

Если λ_1 и λ_2 одного знака (это будет при $A < 0$), то (переменив, в случае надобности, направление оси ζ на обратное) можно считать, что

$$\frac{1}{p} = -\frac{\lambda_1}{a'_{34}} > 0, \quad \frac{1}{q} = -\frac{\lambda_2}{a'_{34}} > 0,$$

---

[1]) Третье условие, в силу первых двух, упрощается и сводится к следующему:

$$a_{44} + a'_{14}\alpha + a'_{24}\beta + 2a'_{34}\gamma = 0.$$

и уравнение (4) примет вид

$$\frac{\xi^2}{p}+\frac{\eta^2}{q}=2\zeta;$$

соответствующая поверхность — *эллиптический параболоид*.

Действительно, в нашем случае линия γ_∞, имеющая уравнение

$$\frac{\xi^2}{p}+\frac{\eta^2}{q}=0 \text{ при } \tau=0$$

— распадающаяся и мнимая (см. § 269, 3°).

Если λ_1 и λ_2 — различных знаков (это будет при $A>0$), то таким же способом получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{p}-\frac{\eta^2}{q}=2\zeta,$$

т. е. уравнение *гиперболического параболоида*, ибо линия γ_∞ — распадающаяся и действительная (§ 269, 4°). Так как на основании (3)

$$a'_{34}=\pm\sqrt{-\frac{A}{\lambda_1\lambda_2}}, \tag{3a}$$

то p и q можно вычислить, не производя преобразования координат.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $A=0$. В этом случае $a'^2_{34}\lambda_1\lambda_2=0$. Значит, одно из чисел λ_1, λ_2, a'_{34} равно нулю. Если λ_1 и λ_2 оба отличны от нуля, то $a'_{34}=0$, и уравнение (2) обращается в уравнение с двумя переменными x, y; значит, оно изображает цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz. В частности, цилиндр этот может распадаться на две плоскости (действительные или мнимые). Исключая этот случай (он характеризуется тем, как мы знаем, что ранг определителя A равен 1 или 2), будем иметь один из следующих случаев:

1) λ_1 и λ_2 одного знака; тогда уравнение (2) представляет, очевидно, на плоскости Oxy, эллипс, и путем переноса начала координат ему можно придать вид

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=\pm 1.$$

В этом случае поверхность — *эллиптический цилиндр* (действительный или мнимый).

2) λ_1 и λ_2 различных знаков; тогда получим аналогично

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1,$$

т. е. *гиперболический цилиндр*.

3) Одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю [1]); тогда мы будем иметь *параболический цилиндр* или *совокупность двух параллельных плоскостей* (действительных или мнимых). В самом деле, наше уравнение (2) приводится к виду (если, например, $\lambda_1 = 0$)

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0.$$

Возьмем новую систему осей $O\xi\eta\zeta$ такую, что $O\eta$ совпадает с Oy', а система $O\xi\zeta$ повернута относительно системы $Ox'z'$ на угол α. Тогда будем иметь

$$y' = \eta, \quad x' = \xi\cos\alpha - \zeta\sin\alpha, \quad z' = \xi\sin\alpha + \zeta\cos\alpha,$$

и предыдущее уравнение примет вид

$$\lambda_2\eta^2 + 2\xi(a'_{14}\cos\alpha + a'_{34}\sin\alpha) + 2a'_{24}\eta + 2\zeta(-a'_{14}\sin\alpha + a'_{34}\cos\alpha) + \\ + a_{44} = 0.$$

Выбирая угол α так, чтобы

$$-a'_{14}\sin\alpha + a_{34}\cos\alpha = 0, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a'_{34}}{a'_{14}},$$

мы приведем уравнение к виду

$$\lambda_2\eta^2 + 2a''_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a_{44} = 0.$$

Если $a''_{14} \neq 0$, то мы можем, путем переноса начала в плоскости $O\xi\eta$, привести уравнение к виду

$$\eta^2 = 2p\xi$$

и поверхность — *параболический цилиндр*. Если же $a''_{14} = 0$, то, как легко видеть, поверхность есть совокупность двух параллельных плоскостей. Этот последний случай отличается от параболического тем, что ранг определителя A равен 1 или 2 (что, вообще, характеризует распадение поверхности на две плоскости).

§ 283. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 3. Сводка результатов

Резюмируя изложенное в предыдущих параграфах, можно сказать следующее.

1. Поверхность второго порядка распадается на две плоскости тогда и только тогда, когда ранг определителя A равен 1 или 2 [2]).

2. *Если исключить случай распадения*, то все остальные возможные случаи сводятся к указанным в нижеследующих двух

---

[1]) Оба корня λ_1 и λ_2 нулю быть равны не могут, ибо в противном случае мы имели бы уравнение поверхности не второго, а первого порядка.

[2]) Нулю ранг равен быть не может, так как тогда все коэффициенты данного уравнения должны были бы быть равны нулю.

таблицах, где λ_1, λ_2, λ_3 обозначают корни уравнения $D(\lambda) = 0$ и (в случае $A \neq 0$)

$$k_1 = -\frac{\lambda_1 A_{44}}{A}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_2 A_{44}}{A}, \quad k_3 = -\frac{\lambda_3 A_{44}}{A}.$$

I. $A \neq 0$ (неособенные поверхности)	
$A_{44} \neq 0$: центральные поверхности (имеется *один* собственный центр). 1) k_1, k_2, k_3 положительны: *действительный эллипсоид.* 1а) k_1, k_2, k_3 отрицательны: *мнимый эллипсоид.* 2) Среди k_1, k_2, k_3 два положительных: *однополый гиперболоид.* 3) Среди k_1, k_2, k_3 два отрицательных: *двуполый гиперболоид.*	$A_{44} = 0$: поверхности без центра (имеется *один* несобственный центр). 1) $A < 0$. *Эллиптический параболоид.* 2) $A > 0$. *Гиперболический параболоид.*
II. $A = 0$. Особенные поверхности (конусы и цилиндры)	
$A_{44} \neq 0$: центральные поверхности (имеется один собственный центр) 1) λ_1, λ_2, λ_3 одного знака: *мнимый конус.* 2) λ_1, λ_2, λ_3 различных знаков: *действительный конус.*	$A_{44} = 0$ ($\lambda_3 = 0$): поверхности без определенного центра (имеется прямая центров, собственная или несобственная). 1) λ_1, λ_2 одного знака: *эллиптический цилиндр* (действительный или мнимый). 2) λ_1, λ_2 различных знаков: *гиперболический цилиндр.* 3) λ_1, или λ_2 равно нулю: *параболический цилиндр.*

Замечания. 1. Для определения, к какому из перечисленных видов принадлежит данная поверхность, нет необходимости решать уравнение $D(\lambda) = -\lambda^3 + S\lambda^2 + S'\lambda + A_{44} = 0$; достаточно определить только знаки корней λ_1, λ_2, λ_3 (которые, как мы знаем, всегда действительные). Определение знаков можно произвести, например, по известному правилу Декарта[1]).

2. В случае поверхности без определенного центра ($A_{44} = 0$), один из корней уравнения $D(\lambda) = 0$ равен нулю; два других определяются *квадратным* уравнением: $-\lambda^2 + S\lambda + S' = 0$.

3. В случае распадающейся поверхности второго порядка, которая характеризуется тем, что ранг определителя A равен единице или двум, достаточно разложить полином $F(x, y, z)$ на два линейных множителя по способу, указанному в Добавлении (§ 13), для того чтобы получить уравнения плоскостей, на которые распадается поверхность.

---

[1]) См. следующий параграф.

§ 283а. О правиле знаков Декарта

Скажем несколько слов о правиле знаков Декарта, на которое мы сослались в замечании 1 к таблицам предыдущего параграфа.

Пусть дано алгебраическое уравнение n-й степени с действительными коэффициентами

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

в котором некоторые из коэффициентов могут быть равны нулю. Если все коэффициенты отличны от нуля, то уравнение называется *полным*. Если два соседних коэффициента имеют разные знаки, то говорят, что имеет место *перемена знака*; если же два соседних коэффициента имеют одинаковые знаки, то говорят, что имеет место *постоянство знака*. При этом имеются в виду только коэффициенты, отличные от нуля. Например, в уравнении $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ имеют место две перемены знака и одно постоянство.

Пусть p — число перемен знака, а q — число постоянств. Ясно, что $p + q = m - 1$, где m — число коэффициентов, отличных от нуля. В *полном* уравнении $p + q = n$.

Правило Декарта, в общем случае, гласит: *число положительных корней уравнения $f(x) = 0$ равно числу перемен знака, или меньше его на четное число*[1]). Отсюда, очевидно, следует: число отрицательных корней равно числу перемен знака в уравнении $f(-x) = 0$, или меньше его на четное число. Если $f(x) = 0$ — полное уравнение, то каждой перемене знака отвечает постоянство знака в уравнении $f(-x) = 0$, и каждому постоянству — перемена (ибо из двух соседних членов один всегда четной, а другой — нечетной степени, так что при замене x на $-x$ один меняет знак, а другой нет). Поэтому можно в случае полного уравнения утверждать: число положительных корней равно числу перемен знака или меньше его на четное число; число же отрицательных корней равно числу постоянств знака или меньше его на четное число.

Отсюда, далее, следует: если все корни полного уравнения — действительные, то число положительных корней в точности равно числу p перемен знака, а число отрицательных — числу q постоянств[2]). Таким образом, правило Декарта вполне решает вопрос о знаках корней, если данное уравнение — полное и если заранее известно, что все корни его — действительные. Последнее обстоятельство как раз имеет место в интересующем нас случае характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$. Легко, далее, видеть, что в нашем случае уравнения третьей степени с действительными корнями всегда имеет место предложение: *число положительных корней в точности равно числу перемен знака*. Действительно, в случае полного уравнения это уже доказано. В случае неполного уравнения число перемен равно 0, 1 или 2 (ибо число коэффициентов не превосходит трех). В первом и втором случае предложение очевидно. В случае же двух перемен знака число положительных корней согласно общему правилу может быть или 2, или 0. Докажем, что последнее не может иметь место. Действительно, тогда уравнение должно было бы иметь три отрицательных корня и, следовательно, в уравнении $D(-\lambda) = 0$ должно было бы быть по крайней мере три перемены знака, что невозможно, ибо уравнение — неполное. При доказательстве последнего пункта мы не учли, что наше уравнение может иметь корни, равные нулю. Но и в этом случае, как легко непосредственно проверить (мы предоставим это читателю), правило остается в силе.

---

[1]) Доказательство этого правила дается в курсах алгебры.

[2]) Действительно, если бы число положительных корней было меньше p или число отрицательных меньше q, то число всех действительных корней было бы меньше $p + q = n$, что противоречит условию.