

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ОТДЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ. КРУГОВЫЕ СЕЧЕНИЯ

I. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ОТДЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 284. Перечень нормальных уравнений отдельных поверхностей

Мы убедились в предыдущих параграфах, что самое общее уравнение поверхности второго порядка (с действительными коэффициентами) путем надлежащего выбора осей прямоугольных координат может быть приведено к одному из нижеследующих видов (p и q обозначают положительные величины):

A. Неосообщенные поверхности второго порядка

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (действительный эллипсоид).
- 1a. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ (мнимый эллипсоид).
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (однополый гиперболоид).
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (двуполый гиперболоид).
4. $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (эллиптический параболоид).
5. $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ (гиперболический параболоид).

B. Нераспадающиеся особенные поверхности второго порядка

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (действительный конус второго порядка).
- 6a. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ (мнимый конус второго порядка).
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (действительный эллиптический цилиндр).

- 7а. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллиптический цилиндр).
 8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гиперболический цилиндр).
 9. $y^2 = 2px$ (параболический цилиндр).

С. Распадающиеся поверхности второго порядка

Распадающаяся поверхность второго порядка есть совокупность двух плоскостей, которые могут быть и мнимыми сопряженными. Плоскости могут быть параллельными, а также и совпадающими.

§ 285. Сечения поверхностей второго порядка параллельными плоскостями

В следующих параграфах мы будем изучать форму перечисленных выше действительных поверхностей (за исключением цилиндров, ввиду простоты их формы), применяя метод сечения параллельными плоскостями.

Следующее простое предложение облегчит нам это изучение.

Линии пересечения поверхности второго порядка параллельными плоскостями подобны и, большие того, гомотетичны. Исключение может представить случай, когда в сечении получаются гиперболы; любые две такие гиперболы будут или гомотетичны или одна из них будет гомотетична с гиперболой, сопряженной с другой.

Мы имеем в виду сечения, являющиеся действительными пересекающимися кривыми.

Действительно, возьмем плоскость Oxy параллельной нашим секущим плоскостям. Пусть

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

есть уравнение данной поверхности, а $z = h$ — уравнение секущей плоскости. Подставив $z = h$ в предыдущее уравнение, получим уравнение

$$F(x, y, h) = 0, \quad (2)$$

которому должны удовлетворять координаты x, y линии пересечения γ .

Значит, уравнение (2), рассматриваемое как уравнение линии на плоскости Oxy , представляет проекцию γ' линии пересечения на плоскость Oxy . Члены второго измерения в уравнении (2) суть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

и не зависят, очевидно, от h . Следовательно, в уравнениях линий γ' , соответствующих различным значениям h , коэффициенты при членах второго измерения одинаковы, а это и доказывает наше утверждение (см. § 260).

§ 286. Конус второго порядка

Начнем с рассмотрения поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (1)$$

Мы знаем, что это есть конус с вершиной в начале координат.

Так как уравнение (1) содержит только квадраты переменных, очевидно, что плоскости координат являются плоскостями симметрии конуса («главные диаметральные плоскости»), оси координат — осями симметрии («оси»), а начало (вершина) — центром симметрии («центр»).

Чтобы ближе изучить форму нашего конуса, пересечём его плоскостью $z = h$, параллельной плоскости Oxy (h обозначает постоянную).

В пересечении получится линия

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 0, \quad z = h,$$

проекция которой на плоскость Oxy , очевидно, дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 0,$$

или, по разделении на $\frac{h^2}{c^2}$:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad (2)$$

где для краткости положено

$$a' = \frac{ah}{c}, \quad b' = \frac{bh}{c}.$$

Следовательно, пересечение есть эллипс, с полуосями a' , b' и с центром на оси Oz .

При различных h получим различные эллипсы, которые все подобны между собою.

Пусть γ обозначает какой-либо из них. Тогда, очевидно, наш конус можно рассматривать как геометрическое место прямых, проходящих через O и через эллипс γ , который будет служить направляющей.

В частности, если $a = b$, то конус будет *прямым круговым*¹⁾ или *конусом вращения*, который рассматривают в элементарной геометрии.

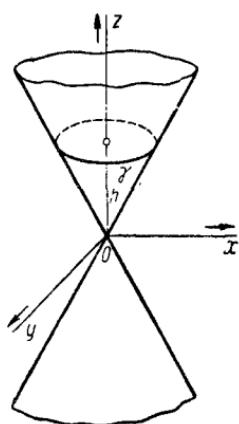
¹⁾ Мы увидим ниже (§ 297), что всякий (нераспадающийся) конус второго порядка можно рассматривать как «наклонный круговой конус».

Конус состоит из двух пол, расположенных по обе стороны от вершины (черт. 167). Плоскости, проходящие через вершину конуса, разделяются по отношению к нему на три категории:

а) плоскости, пересекающие эллипс γ в двух различных точках; эти плоскости, очевидно, пересекают конус по совокупности двух прямых (образующих);

б) плоскости, не пересекающие эллипса γ ; эти плоскости, очевидно, имеют с конусом только одну общую точку (вершину);

с) плоскости, имеющие с γ только одну общую точку, или, лучше сказать, две совпадающие точки. Каждая из этих плоскостей, очевидно, имеет с конусом только одну общую прямую (лучше — две совпадающие прямые). Такая плоскость (обозначим ее через Π) пересекает плоскость эллипса γ по прямой, являющейся, очевидно, касательной к γ . Таким образом, плоскость Π проходит через образующую конуса и через касательную к γ (проведенную через точку пересечения образующей с конусом). Такая плоскость является касательной к конусу; упомянутая образующая является прямой касания плоскости и конуса.



Черт. 167

Если плоскость, проходящая через вершину и параллельная данной секущей плоскости, принадлежит к категории б), то, очевидно, данная плоскость пересекает только одну полу конуса, причем пересекает все образующие. Пересечение есть, следовательно, замкнутая линия второго порядка, т. е. эллипс.

Если плоскость, проходящая через вершину и параллельная данной, принадлежит к категории а), то, очевидно, данная плоскость пересекает обе полы конуса; значит, линия пересечения состоит из двух раздельных ветвей, т. е. эта линия есть гипербола.

Наконец, если плоскость, параллельная данной и проходящая через вершину, принадлежит к категории с) (т. е. касается конуса вдоль одной из образующих), то данная плоскость пересекает только одну полу конуса. Так как, далее, одна из образующих конуса ей параллельна, то линия пересечения простирается в бесконечность (состоя из одной ветви). Значит, линия пересечения — парабола.

Таким образом, мы еще раз установили, что эллипс, гипербола и парабола суть линии пересечения конуса второго порядка (в частности, прямого кругового) с плоскостями.

§ 287. Эллипсоид

Рассмотрим теперь эллипсоид, представляемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Ясно, что плоскости координат суть плоскости симметрии («главные диаметральные плоскости»), оси координат — оси симметрии («оси»), а начало — центр симметрии («центр») поверхности.

Очевидно также, что для всех точек поверхности будем иметь

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c.$$

Значит, вся поверхность заключена внутри прямоугольного параллелепипеда с ребрами $2a$, $2b$, $2c$, грани которого параллельны плоскостям координат и отсекают на осях Ox , Oy Oz соответственно отрезки $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ (черт. 168).

Мы знаем, что всякое пересечение поверхности (1) с плоскостью есть линия второго порядка; так как линия пересечения, на основании только что сказанного, не может простираться в бесконечность, то она — эллипс. Итак, сечения поверхности (1) плоскостями суть эллипсы, как мы уже видели раньше (§ 269).

Ясное представление о форме поверхности (1) можно получить, рассматривая ее пересечение с плоскостями, параллельными плоскостям координат.

Плоскость Oxy (т. е. $z = 0$) пересекает ее по эллипсу, уравнение которого в плоскости Oxy есть

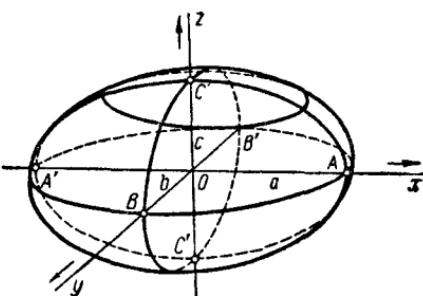
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Плоскость Oxz ($y = 0$) пересекает ее по эллипсу, уравнение которого в этой плоскости есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3)$$

Наконец, плоскость Oyz пересекает поверхность (1) по эллипсу, уравнение которого в этой плоскости есть

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$



Черт. 168

Эллипсы (2), (3), (4) называются «главными эллипсами». Рассмотрим теперь пересечения нашей поверхности с плоскостями, параллельными плоскости Oxy . Пусть

$$z = h$$

— одна из этих плоскостей. Подставляя $z = h$ в (1), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2},$$

которое, если его рассматривать как уравнение линии в плоскости Oxy , представляет уравнение проекции рассматриваемой линии пересечения на плоскости Oxy .

Эта линия будет, очевидно, действительной только при $|h| \leq c$.

Перепишем предыдущее уравнение, разделив его на $1 - \frac{h^2}{c^2}$, так:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad (5)$$

где, для краткости, положено

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b' = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}. \quad (6)$$

Таким образом, линия пересечения есть эллипс с полуосями a' , b' и центром на Oz . При $h = 0$ получим $a' = a$, $b' = b$, т. е. главный эллипс (2). При возрастании h от 0 до c полуоси a' , b' убывают; эллипс (5) уменьшается, оставаясь подобным самому себе, и при $h = c$ сжимается в точку C , расположенную на оси Oz .

Таким образом, плоскость $z = c$ касается эллипсоида в точке C .

Симметричную картину получим при убывании h от 0 до $-c$; плоскость $z = -c$ касается эллипсоида в точке C' ($0, 0, -c$), расположенной на оси Oz .

Совершенно аналогичные результаты получим, рассматривая пересечение плоскостями $x = h$ и $y = h$. Плоскости $x = \pm a$ и $y = \pm b$ касаются поверхности в точках A ($a, 0, 0$), A' ($-a, 0, 0$), B ($0, b, 0$), B' ($0, -b, 0$).

Точки A , A' , B , B' , C , C' называются *вершинами* эллипсоида, отрезки AA' , BB' , CC' , а также их длины $2a$, $2b$, $2c$ — осями его, величины же a , b , c — полуосями.

Если

$$a > b > c,$$

то a есть *большая*, b — *средняя*, c — *малая полуоси*.

В частном случае, когда $a = b$, все эллипсы (5) обращаются в окружности. Ясно, что в этом случае наш эллипсоид может быть получен вращением эллипса $ACA'C'$ с осями $|AA'| = 2a$ и $|CC'| = 2c$ вокруг оси $C'C$. Такой эллипсоид называется *эллип-*

соидом вращения. Он называется *вытянутым*, если $c > a$, и *сплюснутым*, если $c < a$.

Наконец, если $a = b = c$, то эллипсоид обращается в *сферу*.

Упражнения и дополнения

1. Написать уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду (1) в точке (x_0, y_0, z_0) .

Ответ.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

2. Составить уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением (X, Y, Z) .

Ответ.

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 0.$$

3. Вывести условие того, чтобы уравнение второго порядка $F(x, y, z) = 0$ выражало сферу, т. е. приводилось к виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - K = 0,$$

где $K = \pm r^2$ (при верхнем знаке имеем действительную сферу, при нижнем — мнимую).

Ответ. Методом, аналогичным изложенному в § 239, покажем, что необходимыми и достаточными условиями являются следующие (в прямоугольных координатах):

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0;$$

при этом K дается формулой

$$K = \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{11}a_{44}}{a_{11}^2}.$$

При $K > 0$ имеем действительную сферу, при $K < 0$ — мнимую. При $K = 0$ уравнение приводится к виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0.$$

Это — «сфера нулевого радиуса» или «изотропный конус».

Выведенное условие можно заменить и следующим: для того чтобы поверхность $F(x, y, z) = 0$ представляла сферу, необходимо и достаточно, чтобы она проходила через сферическую окружность (§ 175), т. е. чтобы ее пересечение с несобственной плоскостью было мнимой несобственной окружностью.

Доказательство предоставляем читателю.

§ 288. Однополый гиперболоид

Нормальное уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Она симметрична относительно плоскостей координат («главные диаметральные плоскости»), осей координат («оси») и начала координат O , которое будет ее центром (черт. 169).

Пересечение этой поверхности с плоскостью Oxy есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

(«главный» или «горловой» эллипс), с плоскостью Oxz — гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3)$$

и с плоскостью Oyz — гипербола

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3a)$$

(«главные гиперболы»). Если пересечь нашу поверхность плоскостью $z = h$, то получим линию, проекция которой на плоскость Oxy дается уравнением

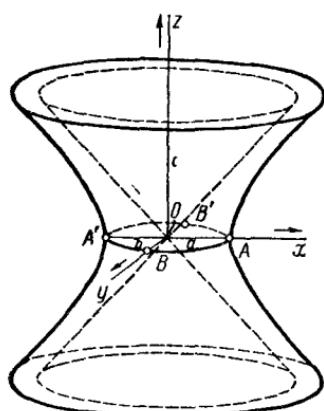
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2},$$

или

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad (4)$$

где

$$a' = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b' = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}. \quad (5)$$



Черт. 169

Это есть эллипс с полуосями a' , b' ; пересечение существует при всяком h . При $h = 0$ получаем горловой эллипс (2).

При возрастании $|h|$ полуоси a' , b' беспрепятственно возрастают, а эллипс (4) беспрепятственно увеличивается, оставаясь

подобным горловому эллипсу. Ясно, что поверхность состоит из одной полы, простирающейся в бесконечность по обе стороны от плоскости Oxy .

Вершины A , A' , B , B' горлового эллипса называются *вершинами* нашего гиперболоида. Отрезки AA' и BB' , а также их длины $|AA'| = 2a$ и $|BB'| = 2b$ называются *поперечными осями* его. Отрезок длины $2c$, с серединой в O , расположенный по оси Oz , а также его длина называется *продольной осью*.

Ясное представление о форме гиперболоида в удаленных точках дает одновременное рассмотрение *асимптотического конуса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (6)$$

(Это — действительно асимптотический конус, так как он представляет собою конус асимптотических направлений с вершиной в центре; см. § 275).

Пересечение этого конуса с плоскостью $z = h$ есть, как мы видели, эллипс с центром на оси Oz и полуосями

$$a'' = \frac{a|h|}{c}, \quad b'' = \frac{b|h|}{c};$$

этот эллипс подобен эллипсу пересечения гиперболоида с той же плоскостью.

Так как, на основании формул (5), $a'' < a'$, $b'' < b'$, то первый эллипс заключен внутри второго. Значит, конус (6) заключен целиком внутри гиперболоида (т. е. по ту сторону от гиперболоида, где проходит ось Oz).

Далее, легко показать, что при беспримечательном возрастании $|h|$ разности $a' - a''$ и $b' - b''$ стремятся к нулю.

Например,

$$a' - a'' = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} - \frac{a|h|}{c}.$$

Умножая и деля правую часть на

$$a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} + \frac{a|h|}{c},$$

получим, после очевидных упрощений:

$$a' - a'' = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} + \frac{|h|}{c}},$$

откуда и следует, что $\lim_{h \rightarrow \infty} (a' - a'') = 0$.

Таким же образом докажем, что

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (b' - b'') = 0.$$

Из сказанного следует, что эллипсы пересечения нашего гиперболоида и конуса (6) стремятся слиться при возрастании h , т. е. что в достаточно далеких частях пространства конус сколь угодно близко примыкает к гиперболоиду.

Если $a = b$, то эллипсы (4) обращаются в окружности, и гиперболоид (1) может быть получен вращением гиперболы (3) или (3а) вокруг поперечной оси. Такой гиперболоид называется *однополым гиперболоидом вращения*.

В § 269 было показано, что среди пересечений гиперболоида с плоскостями имеются линии всех трех типов (эллиптического, гиперболического, параболического). Легко это показать и аналитически (см. упражнения).

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что линии пересечения гиперболоида (1) с плоскостями, параллельными плоскостям Oyz и Oxz , суть гиперболы (в частном случае — совокупности двух прямых, если плоскости проходят через вершины горлового эллипса).

Доказательство. Проекция на плоскость Oxz линии пересечения с плоскостью $y = h$ дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это есть гипербола, при $|h| \neq b$, или совокупность двух прямых, при $h = \pm b$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

2. Доказать, что линии пересечения гиперболоида (1) с любыми плоскостями, параллельными осям Oz , суть гиперболы (в частности — совокупности двух пересекающихся прямых).

Доказательство. Так как пересечение гиперболоида с плоскостями, параллельными плоскости Oyz , уже рассмотрено в предыдущем упражнении, можно считать, что секущая плоскость не параллельна этой плоскости. Пусть уравнение ее есть $y = mx + k$. Подставляя предыдущее выражение для y в уравнение гиперболоида (1), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+k)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

выражающее проекцию просматриваемого сечения на плоскость Oxz . Коэффициенты¹⁾ a_{11} , a_{22} при x^2 , z^2 в этом уравнении равны соответственно $\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}$, $-\frac{1}{c^2}$. Коэффициент $2a_{12}$ при xz равен нулю.

Значит, $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) < 0$ и, следовательно, рассматриваемая проекция — линия гиперболического типа, т. е. либо гипербола, либо совокупность двух пересекающихся прямых. Такого же вида должна быть и проектируемая линия, а это и доказывает наше утверждение.

3. Доказать, что среди линий пересечения гиперболоида (1) с плоскостями имеются линии всех трех типов (эллиптического, гиперболического и параболического) и что линия пересечения с данной плоскостью — того же типа, что и линия пересечения асимптотического конуса с той же плоскостью.

Доказательство. Линии пересечения с плоскостями, параллельными осям Oz , уже изучены (они — гиперболического типа). Рассмотрим линию пересечения с плоскостью $z = mx + ny + k$, не параллельной оси Oz .

Подставив это выражение для z в уравнение (1), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(mx+ny+k)^2}{c^2} = 1, \quad (7)$$

дающее проекцию линии пересечения на плоскость Oxy .

Коэффициенты при членах второго измерения в этом уравнении суть²⁾:

$$a_{11} = \frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{c^2}, \quad 2a_{12} = -\frac{2mn}{c^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2} - \frac{n^2}{c^2};$$

¹⁾ Здесь мы применяем обозначения § 208, поменяв ролями y и z .

²⁾ Мы применяем обозначения § 208.

значит,

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{a^2 b^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{a^2} \right).$$

Ясно, что, придавая подходящие значения m и n , можно удовлетворить любому из трех условий: $A_{33} > 0$, $A_{33} = 0$, $A_{33} < 0$, т. е. получить в проекции линию любого из трех типов. Того же типа будет и линия пересечения.

Ясно, далее, что A_{33} не изменится вовсе, если в правой части (7) заменить единицу нулем (или любой другой постоянной). Значит, тип линии пересечения будет тот же, если вместо данной поверхности взять ее асимптотический конус.

4. На основании сказанного в предыдущем упражнении показать, что плоскости, параллельные касательным плоскостям асимптотического конуса (и только такие плоскости), пересекают гиперболоид по параболам.

§ 289. Двуполый гиперболоид

Нормальное уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (1)$$

Поверхность эта обладает теми же свойствами симметрии, что и рассмотренные в предыдущих параграфах: плоскости Oyz , Oxz , Oxy являются плоскостями симметрии («главные диаметральные плоскости»), оси Ox , Oy , Oz — осями симметрии («оси»); точка O — центр симметрии («центр»).

Плоскость Oxy не пересекает поверхности, ибо при $z = 0$ получим уравнение

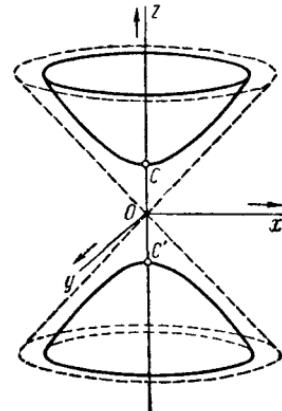
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

представляющее мнимый эллипс. Плоскости Oxz и Oyz пересекают поверхность соответственно по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (2)$$

и

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3)$$



Черт. 170

(«главные гиперболы», из которых на черт. 170 изображена первая).

Пересечем поверхность плоскостью $z = h$. В пересечении получится линия, проекция которой на плоскость Oxy дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

Значит, пересечение действительное, если $|h| \geq c$, мнимое, если $|h| < c$.

Предполагая $|h| > c$, перепишем предыдущее уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a' &= a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \\ b' &= b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Значит, пересечение есть эллипс с центром на оси Oz с полуосами a' , b' . При возрастании $|h|$ эллипс этот беспрепримительно возрастает, оставаясь подобным самому себе.

Когда h стремится к c , то a' и b' стремятся к 0, и эллипс сжимается в точку $C(0, 0, c)$, расположенную на оси Oz . Если же h стремится к $-c$, то эллипс сжимается в точку $C'(0, 0, -c)$. Плоскости $z = +c$, $z = -c$ касаются гиперболоида в этих точках, называемых вершинами его.

Отрезок CC' , а также его длина $2c$ называется *продольной осью* двуполого гиперболоида, отрезки длиною $2a$ и $2b$ (а также их длины), расположенные соответственно по осям Ox и Oy (имея середины в начале O), называются *поперечными осями*.

Между плоскостями $z = c$, $z = -c$ нет точек гиперболоида; следовательно, он состоит из двух раздельных пол.

Введем в рассмотрение, как в предыдущем параграфе, конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (6)$$

который является асимптотическим для нашей поверхности.

Легко видеть (сравн. предыдущий параграф), что наша поверхность заключена целиком внутри этого конуса и что она беспрепримально приближается к нему в частях, достаточно удаленных.

Если $a = b$, то наш гиперболоид есть *двуполый гиперболоид вращения*, получаемый вращением гиперболы с продольной осью $|CC'| = 2c$ и поперечной осью $2a = 2b$ вокруг оси CC' .

Часто бывает полезно одновременное рассмотрение однополого и двуполого гиперболоидов.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

уравнения которых различаются только знаком в правой части. Эти гиперболоиды называются *сопряженными* по отношению друг к другу.

На основании сказанного в предыдущем и этом параграфах, эти поверхности имеют общий асимптотический конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

который разделяет их, так что первая находится вне асимптотического конуса, а вторая внутри.

Поперечные и продольные оси у них одни и те же. Этим выясняется геометрический смысл «продольной оси» однополого и «поперечных осей» двуполого гиперболоидов.

Упражнения и дополнения

1. Показать, что сечения двуполого гиперболоида плоскостями, параллельными плоскостям координат Oxz , Oyz суть гиперболы.

2. Показать, что в пересечении двуполого гиперболоида с плоскостями могут получиться конические сечения всех трех типов. Показать, что сечения данною плоскостью данного двуполого гиперболоида, однополого гиперболоида, сопряженного с ним, и их общего асимптотического конуса суть линии одного и того же типа.

Доказательство то же, что в упражнениях 2 и 3 предыдущего параграфа.

§ 290. Эллиптический параболоид

Эта поверхность имеет нормальное уравнение

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (1)$$

где p и q — постоянные одного знака. Мы будем считать, что $p > 0$, $q > 0$.

Плоскости Oxz и Oyz являются, очевидно, ее плоскостями симметрии («главные диаметральные плоскости»), ось Oz — осью симметрии («ось»).

Конус асимптотических направлений, с вершиной в O ,

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \quad (2)$$

распадается на две мнимые сопряженные плоскости, пересекающиеся по (действительной) прямой Oz . Следовательно, единственным действительным асимптотическим направлением является направление Oz , т. е. направление оси поверхности. Это направление встречает несобственную плоскость в точке с однородными координатами $(0, 0, 1, 0)$ — единственной несобственной точке поверхности. Несобственная плоскость касается поверхности в этой точке (§ 269). Предлагаем читателю доказать это еще раз, составив однородное уравнение поверхности (1) и написав уравнение касательной плоскости в точке с однородными координатами $(0, 0, 1, 0)$.

Эта точка является также несобственным и единственным центром поверхности, как легко проверить и непосредственно, составляя уравнения, определяющие центр.

Все диаметральные плоскости параллельны поэтому оси Oz (предлагаем читателю проверить это непосредственно, составив уравнение диаметральных плоскостей).

Все точки поверхности расположены по одну сторону плоскости Oxy , со стороны $z > 0$, ибо при $z < 0$ уравнение (1) не имеет действительных решений (черт. 171).

Плоскости Oxz и Oyz пересекают поверхность по параболам

$$x^2 = 2pz \text{ и } y^2 = 2qz \quad (3)$$

(«главные параболы») с параметрами p и q и осью Oz . Величины p и q называются *параметрами* нашего параболоида.

Рассмотрим пересечение нашей поверхности с плоскостями

$$z = h,$$

параллельными плоскости Oxy ; мы должны считать, как было сказано, $h > 0$. Проекция пересечения на плоскость Oxy дается уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{2ph}, \quad b = \sqrt{2qh}; \quad (4)$$

значит, пересечение есть эллипс с полуосами a , b и центром на оси Oz . При возрастании h этот эллипс беспредельно возрастает, оставаясь подобным самому себе.

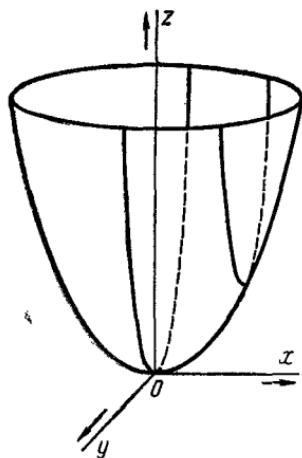
При h , стремящемся к 0, эллипс сжимается в точку O ; плоскость Oxy касается параболоида в этой точке, называемой *вершиной* его.

Рассмотрим теперь пересечение нашей поверхности с плоскостью $x = x_0$, параллельной плоскости Oyz . В пересечении получаем линию, проекция которой на плоскость Oyz дается уравнением

$$\frac{y^2}{q} = 2z - \frac{x_0^2}{p},$$

или

$$y^2 = 2q(z - z_0), \quad (5)$$



Черт. 171

где

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p}. \quad (6)$$

Следовательно, искомое сечение есть парабола с параметром q , ось которой параллельна Oz и вершина которой расположена в плоскости Oxz . Координаты (x_0, z_0) вершины связаны соотношением (6), и, следовательно, вершина расположена на параболе $x^2 = 2pz$.

Заметим, что параметр параболы (5) (т. е. величина q) не зависит от положения секущей плоскости $x = x_0$. Значит, все параболы, получающиеся от пересечения с плоскостью $x = x_0$, конгруэнты.

Совершенно аналогичный результат получим, рассматривая пересечение с плоскостями, параллельными плоскости Oxz .

Из сказанного вытекает следующее предложение:

Эллиптический параболоид есть поверхность, описанная неизменной параболой, вершина которой скользит по другой неизменной параболе, плоскость которой перпендикулярна к плоскости подвижной параболы, а ось имеет то же направление. Параметры p и q упомянутых парабол суть параметры данного параболоида.

Мы видели (§ 269), что плоские сечения эллиптического параболоида суть либо эллипсы, либо параболы; аналитическое доказательство этого факта приведено в упражнениях.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что линии пересечения эллиптического параболоида (1) с плоскостями, параллельными оси Oz , суть параболы.

Доказательство. Высказанное утверждение почти очевидно, ибо легко видеть, что линия пересечения должна быть линией второго порядка, простирающейся в бесконечность и состоящей из одной ветви, а это может быть только парабола.

Аналитически это можно показать так. Предполагая, что секущая плоскость не параллельна плоскости Oyz , напишем ее уравнение в виде

$$y = mx + k$$

и подставим это значение y в (1); получим уравнение

$$\frac{x^2}{p} + \frac{(mx+k)^2}{q} - 2z = 0,$$

или

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q} \right) x^2 + \frac{2mkx}{q} - 2z + \frac{k^2}{q} = 0,$$

выражающее проекцию линии пересечения на плоскость Oxz .

Так как дискриминант¹⁾ $A_{33} = 0$, то эта проекция — параболического типа.

¹⁾ Мы применяем здесь те же обозначения, что в § 208, поменяв ролями y и z .

В том, что проекция есть парабола, можно убедиться, составив дискриминант

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{p} + \frac{m^2}{q} & 0 & \frac{mk}{q} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{mk}{q} & -1 & \frac{k^2}{q} \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q}\right),$$

который, очевидно, отличен от нуля.

Отсюда легко заключить, что и сама линия пересечения есть парабола.

2. Доказать, что сечения эллиптического параболоида плоскостями, не параллельными оси Oz , суть эллипсы.

Доказательство. Если $z = mx + ny + k$ есть уравнение секущей плоскости, то уравнение проекций линий пересечения на плоскость Oxy имеет вид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2(mx + ny + k) = 0.$$

Для этой линии $A_{33} = \frac{1}{pq} > 0$; значит, это — эллипс (действительный или

мнимый), который может выродиться и в пару мнимых сопряженных прямых.

Итак, плоские сечения эллиптического параболоида суть либо параболы (упражнение 1), либо эллипсы.

§ 291. Гиперболический параболоид

Нормальное уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (1)$$

где $p > 0$, $q > 0$. Плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии («главные плоскости»), ось Oz — осью симметрии («ось»).

Конус асимптотических направлений с вершиной в O

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \quad (2)$$

распадается на две действительные плоскости. Двойная прямая поверхности (2), т. е. прямая Oz пересекает несобственную плоскость в точке с однородными координатами $(0, 0, 1, 0)$; в этой точке несобственная плоскость касается поверхности (это следует из сказанного в § 269, а также весьма просто проверяется непосредственно). Точка эта является в то же время единственным и несобственным центром поверхности, как показывает непосредственная проверка. Поэтому все диаметральные плоскости параллельны Oz .

Сечение поверхности плоскостью $z = 0$ есть совокупность двух прямых

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{p} = 0,$$

т. е.

$$\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad (2a)$$

(Δ' и Δ'' на черт. 172). Сечения поверхности главными плоскостями суть параболы

$$x^2 = 2pz \text{ и } y^2 = -2qz \quad (3)$$

(«главные параболы»), с параметрами p , q и осями, направленными параллельно оси Oz в противоположные стороны.

Сечение плоскостью $z = h$ имеет проекцией на плоскость Oxy гиперболу

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1. \quad (4)$$

Если $h > 0$, то продольная ось гиперболы направлена по Ox , а поперечная — по Oy .

По величине полуоси этой гиперболы равны

$$a = \sqrt{2ph} \text{ и } b = \sqrt{2qh}. \quad (5)$$

При возрастании h полуоси беспрепятственно возрастают. Все эти гиперболы подобны и подобно расположены.

При $h < 0$ уравнение (4) можно переписать так:

$$\frac{x^2}{-2ph} - \frac{y^2}{-2qh} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{2p|h|} - \frac{y^2}{2q|h|} = -1,$$

откуда видно, что мы имеем гиперболу, сопряженную с гиперболой, получающейся при положительном h с тем же абсолютным значением. Эти гиперболы также подобны и подобно расположены.

Проекции всех гипербол (как при $h > 0$, так и при $h < 0$) на плоскость Oxy имеют одни и те же асимптоты, а именно, — прямые (2а).

Поверхность имеет вид, изображенный на черт. 172.

Сечения поверхности плоскостями $x = x_0$ суть параболы, проекции которых на плоскость Oyz даны уравнением

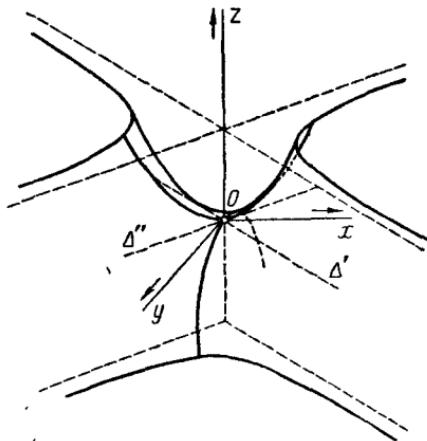
$$\frac{y^2}{q} = -2z + \frac{x_0^2}{p},$$

или

$$y^2 = -2q(z - z_0), \quad (6)$$

где

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p}. \quad (7)$$



Черт. 172

Все эти параболы конгруэнтны и имеют параметр q . Вершина параболы, получающейся в сечении, расположена на главной параболе $x^2 = 2pz$ (в плоскости Oxz), а ось направлена противоположно Oz .

Совершенно аналогичный результат получим при пересечении плоскостями $y = y_0$.

Отсюда следует свойство гиперболического параболоида, совершенно аналогичное свойству эллиптического параболоида (см. конец предыдущего параграфа), с той только разницей, что в нашем случае оси *подвижной и неподвижной парабол направлены в противоположные стороны*.

Легко показать, что все плоские сечения гиперболического параболоида суть линии гиперболического или параболического типа (см. упражнения 2 и 3).

Упражнения и дополнения

1. Показать, что если взять новые оси Ox' , Oy' , направленные по прямым (2a), а ось Oz оставить без изменения, то в новых осях, вообще косоугольных, уравнение гиперболического параболоида примет вид

$$x'y' = kz,$$

где, в случае необщенных координат,

$$k = \frac{p+q}{2}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что при указанном выборе осей будем иметь тождество

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = \frac{4x'y'}{p+q};$$

сравн. § 203.

2. Показать, что сечения параболоида (1) плоскостями, параллельными оси Oz , суть либо параболы, либо прямые.

Доказательство. Пусть $y = mx + k$ есть секущая плоскость. Проекция сечения на плоскость Oxz дается уравнением (сравн. упражнение 1 предыдущего параграфа):

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{m^2}{q} \right) x^2 - \frac{2mkx}{q} - 2z - \frac{k^2}{q} = 0.$$

Значит, $A_{33} = 0$, т. е. линия — параболического типа. Дискриминант $A = -\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q}$. Если $m^2 \neq \frac{q}{p}$, то мы имеем параболу; если же

$m = \pm \sqrt{\frac{q}{p}}$, то уравнение проекции обращается в уравнение первой степени, выражающее прямую. В этом случае можем сказать, что мы имеем две прямые пересечения, из которых одна несобственная.

3. Доказать, что линии пересечения гиперболического параболоида (1) с плоскостями, не параллельными оси Oz , суть линии гиперболического типа.

Доказательство. При обозначениях, аналогичных обозначениям упражнения 2 предыдущего параграфа, получим уравнение

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2(mx + ny + k) = 0,$$

для которого $A_{33} = -\frac{1}{pq} < 0$; следовательно, линия пересечения — гиперболического типа.

II. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этом отделе мы займемся разысканием действительных прямых, целиком расположенных на данной поверхности второго порядка. Так как в случае особенных поверхностей (конус, цилиндр, совокупность двух плоскостей) решение этого вопроса совершенно элементарно, мы займемся в дальнейшем только неособенными поверхностями второго порядка.

§ 292. Общие замечания

Мы уже видели (§ 267), что поверхности с эллиптическими точками (таковыми являются эллипсоид, двуполый гиперболоид, эллиптический параболоид) не могут содержать действительных прямых и что, напротив, поверхности с гиперболическими точками (таковыми являются однополый гиперболоид и гиперболический параболоид) содержат бесчисленное множество действительных прямых.

Мы увидим ниже, что однополый гиперболоид и гиперболический параболоид могут быть (двумя способами) образованы движением прямой (мы все время имеем в виду действительные прямые). Поэтому-то прямые, принадлежащие этим поверхностям, называются *прямолинейными образующими*, а сами поверхности — *линейчатыми*.

В том, что на эллипсоиде, двуполом гиперболоиде и эллиптическом параболоиде нет действительных прямых, можно еще непосредственно убедиться следующим элементарным путем¹⁾.

В случае эллипсоида это очевидно, ибо эта поверхность целиком находится на конечном расстоянии и не может содержать целую прямую²⁾.

В случае двуполого гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

¹⁾ В упражнениях этого параграфа дается еще одно доказательство этих утверждений.

²⁾ Прямая не может только частично принадлежать поверхности: мы знаем, что если прямая имеет с поверхностью второго порядка больше двух общих точек, то она принадлежит поверхности целиком.