Далее, из сказанного в двух предыдущих параграфах вытекает, что прямая Δ, скользящая по Δ_1, Δ_2, Δ_3, опишет поверхность Σ, а это и доказывает все наши утверждения.

Точно так же легко доказать, что если даны две прямые Δ_1, Δ_2, не расположенные в одной и той же плоскости, и плоскость Π, не параллельная ни одной из них, то прямая Δ, скользящая по Δ_1, Δ_2 и параллельная Π, опишет гиперболический параболоид.

Для доказательства достаточно взять три прямые Δ', Δ'', Δ''', параллельные плоскости Π и пересекающие обе прямые Δ_1, Δ_2. На основании сказанного выше мы можем всегда построить поверхность второго порядка, имеющую Δ', Δ'', Δ''' образующими одной и той же системы, и эта поверхность будет необходимо гиперболическим параболоидом.

Прямые Δ_1 и Δ_2 будут двумя образующими этой поверхности, и прямая, скользящая по ним, будучи параллельна плоскости Π, опишет эту поверхность.

III. КРУГОВЫЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 296. Предварительные замечания

Со многих точек зрения представляется интересным выяснить, в каких случаях в сечении поверхности второго порядка плоскостью получается окружность («круговое сечение»).

Прежде чем перейти к разысканию круговых сечений, отметим следующее важное обстоятельство. Если некоторая плоскость Π пересекает данную поверхность второго порядка по окружности, то и всякая плоскость, параллельная Π, пересекает эту поверхность по окружности (если сечение есть действительная линия). Это предложение есть непосредственное следствие предложения § 285, но мы докажем его еще раз, применяя тот же прием, что и в § 285.

Выберем временно такую систему (прямоугольных) координат, чтобы плоскость Oxy была параллельна плоскости Π. Тогда уравнение плоскости Π в этой системе имеет вид

$$z = h. \tag{1}$$

Пусть уравнение данной поверхности в этой системе осей есть

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{2}$$

Полагая $z = h$, получим уравнение проекции рассматриваемого сечения на плоскость Oxy. В этом уравнении коэффициентами при x^2, y^2 и xy будут соответственно a_{11}, a_{22}, $2a_{12}$. Для того чтобы рассматриваемая линия была окружностью, необходимо и доста-

точно, чтобы

$$a_{11}=a_{22},\quad a_{12}=0. \tag{3}$$

Это условие, как видим, вовсе не зависит от h, так что если оно соблюдено при данном значении h, то оно будет соблюдено и при всяком другом, а это и доказывает наше утверждение.

Надо все же помнить, что и при соблюдении условия (3) пересечение может быть мнимым. Если ограничиться рассмотрением только действительных линий, то надо говорить, что все плоскости, параллельные П и пересекающие данную поверхность по действительным линиям, пересекают ее по окружностям.

Из предыдущего вытекает еще одно важное следствие: если в уравнениях двух поверхностей второго порядка (отнесенных к какой-либо одной и той же системе осей) члены второго измерения одинаковы, то плоскости, пересекающие одну из них по окружности, будут пересекать по окружности и другую.

Действительно, в этом случае члены второго измерения в обоих уравнениях остаются одинаковыми, если перейти к любым другим осям координат[1]), в частности к таким (прямоугольным) осям, при которых плоскость Oxy параллельна плоскости, пересекающей одну из поверхностей по окружности. Но в этой системе для одной из поверхностей будем иметь условия (3); значит, эти же условия будут иметь место и для другой, а это и доказывает наше утверждение.

На основании этого можно, например, сразу сказать, что для двух сопряженных гиперболоидов и их асимптотического конуса плоскости, производящие круговые сечения, будут одними и теми же.

Здесь следует сделать оговорку, аналогичную сделанной выше: может случиться, что плоскость пересекает одну из рассматриваемых поверхностей по окружности, а другую не пересекает вовсе (пересекает по мнимой окружности). Но если она пересекает и другую по действительной линии, то линия эта будет окружностью.

§ 297. Круговые сечения центральных поверхностей второго порядка

Начнем с разыскания круговых сечений центральных поверхностей второго порядка: эллипсоида, обоих гиперболоидов и конуса. Исключая временно случай конуса, уравнения всех этих поверхностей можем представить в виде

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1. \tag{1}$$

[1]) Мы предполагаем, что уравнения наших поверхностей приведены к виду $F(x, y, z)=0$ и что, при замене осей, мы ограничиваемся заменой x, y, z в полиномах $F(x, y, z)$ их выражениями через новые координаты (не производя сокращения или умножения уравнений на постоянные множители).

Пусть имеется какая-либо плоскость, пересекающая поверхность (1) по окружности. Тогда параллельная ей плоскость, проходящая через начало координат (центр), также будет пересекать нашу поверхность по окружности (на основании сказанного в предыдущем параграфе), если только последнее сечение — действительная линия. Но, очевидно, в случае эллипсоида и однополого гиперболоида всякая плоскость, проходящая через центр, пересекает поверхность по действительной линии.

Таким образом, в случае эллипсоида и однополого гиперболоида мы можем ограничиться разысканием плоскостей, производящих круговые сечения, проходящих через центр. Все остальные плоскости круговых сечений будут параллельны им.

Итак, пусть имеется круговое сечение, плоскость которого проходит через начало. Пусть радиус сечения есть r.

Построим сферу с центром в начале, имеющую радиус r. Сфера эта проходит, следовательно, через наше круговое сечение. Уравнение этой сферы напишем в виде

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1. \tag{2}$$

Точки искомого кругового сечения должны одновременно удовлетворять уравнениям (1) и (2), а следовательно, и уравнению, получаемому вычитанием их, т. е. уравнению

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right)z^2=0. \tag{3}$$

Поверхность второго порядка, представляемая уравнением (3), есть конус с вершиною в начале координат, который содержит в качестве составной части плоскость, производящую наше круговое сечение. Действительно, если (x_0, y_0, z_0) есть какая-либо точка нашего кругового сечения, то она принадлежит конусу (3), и значит, вся прямая, проходящая через начало координат и эту точку, принадлежит поверхности (3). Следовательно, эта последняя содержит все прямые, выходящие из O и расположенные в плоскости кругового сечения, которая, таким образом, целиком принадлежит поверхности (3).

Но мы знаем, что в этом случае поверхность (3) должна распадаться на две плоскости, а для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратичной формы в левой части уравнения (3), зависящей от трех переменных x, y, z, был равен нулю. Но этот дискриминант есть

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2} \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right).$$

Итак, должно быть

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right)=0. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь в отдельности случаи эллипсоида и гиперболоида.

1. В случае эллипсоида имеем

$$\alpha=a^2, \quad \beta=b^2, \quad \gamma=c^2. \tag{5}$$

Будем считать, что

$$a>b>c. \tag{6}$$

Уравнение (4) дает три значения для r:

$$r=a, \quad r=b, \quad r=c.$$

При $r=a$ уравнение (3) принимает вид

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)z^2=0.$$

Так как коэффициенты при y^2 и z^2 имеют один и тот же знак, то последнее уравнение удовлетворяется только точками оси Ox (т. е. при $y=z=0$), и значит, не представляет совокупности двух действительных плоскостей (оно представляет совокупность двух мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой). Такой же результат получим при $r=c$.

Остается рассмотреть случай, когда $r=b$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0,$$

или

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0.$$

Так как

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}>0, \quad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}>0,$$

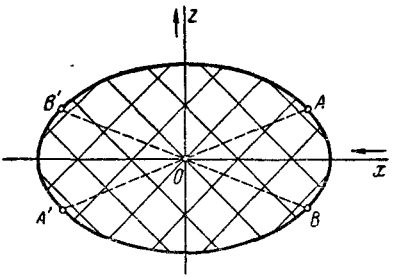
то предыдущее уравнение дает совокупность двух действительных плоскостей:

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}-z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0, \quad x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}+z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0, \tag{7}$$

проходящих через среднюю ось эллипсоида и одинаково наклоненных по отношению к большой (или малой) оси.

Все прочие круговые сечения производятся плоскостями, параллельными этим двум плоскостям.

Итак, имеется два ряда круговых сечений; плоскости их параллельны одной из плоскостей (7). На черт. 175 изображены главный эллипс в плоскости Oxz и следы плоскостей (перпендикулярных к плоскости Oxz), производящих круговые сечения. Эти следы образуют два ряда параллельных хорд нашего эллипса. Ясно, что центры круговых сечений находятся на серединах этих хорд. Значит, центры круговых сечений одного и того же ряда расположены на одной и той же прямой, а именно на диаметре главного эллипса в плоскости Oxz, сопряженном с направлением следов соответствующих круговых сечений. Прямые AA' и BB', на которых расположены центры круговых сечений, пересекают эллипсоид в четырех точках A, A', B, B', которые называются *точками закругления*, или *омбилическими точками*.



Черт. 175

В случае сплюснутого эллипсоида вращения ($a = b > c$) плоскости (7) сливаются в одну, $z=0$, и мы получаем только один ряд круговых сечений, перпендикулярных к оси вращения; омбилические точки (их будет теперь только две) совпадают с концами оси вращения. В случае вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$) получаем аналогичный результат. Наконец, в случае $a = b = c$ эллипсоид есть сфера, и всякое сечение является круговым. В этом случае все точки поверхности — омбилические.

2. В случае однополого гиперболоида имеем:

$$\alpha = a^2, \quad \beta = b^2, \quad \gamma = -c^2.$$

Значит, для r можно взять только два действительных значения: $r = a$ и $r = b$. Предположим, что $a > b$.

Тогда, аналогично предыдущему, легко установить, что поверхность (3) распадается на две действительные плоскости только в случае $r = a$; уравнение ее в этом случае будет

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) z^2 = 0.$$

Оно распадается на два линейных:

$$y\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} - z\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} = 0, \quad y\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} + z\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} = 0. \quad (8)$$

Значит, круговые сечения производятся двумя плоскостями (8), проходящими через большую ось горлового эллипса и одинаково наклоненными к плоскости этого эллипса. Все прочие круговые

сечения производятся плоскостями, параллельными упомянутым. Таким образом, мы и здесь имеем два ряда круговых сечений.

Следы плоскостей, производящих круговые сечения, на плоскости Oyz образуют два ряда параллельных хорд главной гиперболы в плоскости Oyz. Центры круговых сечений расположены, очевидно, на диаметрах этой гиперболы, сопряженных с упомянутыми хордами. Так как хорды пересекают гиперболу в действительных точках, то эти диаметры не пересекают ее (пересекают сопряженную гиперболу).

В случае однополого гиперболоида вращения ($a = b$) обе плоскости (8) сливаются в одну, $z = 0$, и мы имеем только один ряд круговых сечений, перпендикулярных к оси вращения с центрами на ней.

3. Рассмотрим теперь двуполый гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (*)$$

Легко видеть, на основании сказанного в § 296, что плоскость всякого кругового сечения этого двуполого гиперболоида будет плоскостью кругового сечения однополого гиперболоида, сопряженного с ним, уравнение которого есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (**)$$

Обратно, плоскости, производящие круговые сечения в гиперболоиде (**), производят также круговые сечения в гиперболоиде (*), если только пересекают его по действительной линии.

Значит, круговые сечения двуполого гиперболоида производятся теми плоскостями, параллельными одной из плоскостей (8), которые вообще встречают нашу поверхность. И тут мы имеем два ряда круговых сечений.

Прямые, соединяющие центры этих окружностей, расположены, как было показано выше, в плоскости Oyz и пересекают данный двуполый гиперболоид (*) в четырех точках, называемых точками закругления или омбилическими точками.

В случае двуполого гиперболоида вращения ($a = b$) оба ряда круговых сечений сливаются в один, и омбилические точки (их будет теперь две) совпадают с вершинами гиперболоида.

4. Легко также найти круговые сечения конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (***)$$

Действительно, на основании сказанного в § 296 эти круговые сечения производятся теми же плоскостями, что и круговые сечения однополого гиперболоида (**).

Если рассматривать одно из круговых сечений как направляющую, то мы видим, что всякий конус второго порядка (***) может быть рассматриваем как «наклонный круговой конус», т. е. как геометрическое место прямых, проходящих через неподвижную точку и неподвижную окружность.

В случае $a = b$ («прямой круговой конус») оба ряда круговых сечений сливаются в один.

§ 298. Круговые сечения эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра

Нам остается рассмотреть только круговые сечения эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра, ибо гиперболический параболоид, а также параболический и гиперболический цилиндры не могут иметь круговых сечений. Действительно, мы знаем, что все плоские сечения гиперболического параболоида — линии параболического и гиперболического типов. Также очевидно, что параболический и гиперболический цилиндры не могут иметь круговых сечений.

Итак, рассмотрим эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{1}$$

На основании сказанного в § 296, плоскости, производящие круговые сечения в поверхности (1), производят также круговые сечения в эллиптическом цилиндре

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1. \tag{2}$$

На основании сказанного в том же § 296, мы можем ограничиться разысканием сечений, плоскости которых проходят через начало координат. Пусть r — радиус одного из таких сечений, и

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \tag{3}$$

— уравнение сферы с центром в начале координат, проходящей через это сечение. Вычитая (3) из (2), получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r^2}\right)y^2 - \frac{z^2}{r^2} = 0, \tag{4}$$

которому должны удовлетворять все точки искомого сечения. Как и в предыдущем параграфе, заключаем, что r должно удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r^2} = 0,$$

откуда следует, что $r^2 = p$ или $r^2 = q$.

Пусть $p > q$. Тогда, как легко видеть, при $r^2 = q$ конус (4) не распадается на действительные плоскости. Остается предположить, что $r^2 = p$. Тогда уравнение (4) может быть переписано так:

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) y^2 - \frac{z^2}{p} = 0$$

и представляет две действительные плоскости:

$$y\sqrt{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} - z\sqrt{\frac{1}{p}} = 0 \quad \text{и} \quad y\sqrt{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} + z\sqrt{\frac{1}{p}} = 0, \qquad (5)$$

проходящие через большую ось поперечного сечения цилиндра плоскостью $z = 0$, которое есть эллипс

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1,$$

и одинаково наклоненные к плоскости этого поперечного сечения.

Все прочие круговые сечения производятся плоскостями, параллельными одной из плоскостей (5). Мы имеем, значит, и здесь два ряда круговых сечений, одинаково наклоненных к поперечному сечению цилиндра. В случае кругового цилиндра оба эти ряда сливаются в один.

Вернемся к параболоиду (1). На основании сказанного, круговые сечения в нем производятся плоскостями, параллельными одной из плоскостей (5) и встречающими данную поверхность.

Следы круговых сечений на плоскости Oyz дают хорды параболы $y^2 = 2qz$; центры круговых сечений расположены на серединах этих хорд, т. е. на диаметрах, сопряженных с их направлениями. Мы имеем, таким образом, на плоскости Oyz две прямые, параллельные оси, на которых расположены центры круговых сечений. Прямые эти пересекают параболоид в двух точках, называемых *омбилическими*.

В случае параболоида вращения ($p = q$) имеется только один ряд круговых сечений с центрами на оси вращения. Омбилическая точка только одна — вершина параболоида.