

Отсюда следует, на основании правила умножения определителей, что определитель M'' подстановки (3) равен произведению определителей M и M' подстановок (1) и (2):

$$M'' = M \cdot M'. \quad (5)$$

Если, как мы всегда предполагаем, подстановки (1) и (2) неособенные, т. е., если $M \neq 0$, $M' \neq 0$, то в силу предыдущего равенства $M'' \neq 0$.

Итак, результат двух последовательных неособенных подстановок есть также неособенная подстановка.

III. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 10. Билинейные и квадратичные формы

Рассмотрим два ряда переменных (по n переменных в каждом ряде)

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

y_1, y_2, \dots, y_n .

Билинейной формой называется целая рациональная функция этих переменных, которая линейна и однопородна относительно переменных каждого ряда. Таким образом, билинейная форма есть сумма произведений вида $y_i x_j$, умноженных на постоянные коэффициенты. Эти коэффициенты мы будем обозначать одной буквой с двумя знакоами, например a_{ij} ; первый знакочек будет указывать номер входящей переменной y_i , а второй — номер переменной x_j . Обозначая данную билинейную форму через $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$, или просто через Ω , будем иметь

или, короче:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j, \quad (1a)$$

или еще

$$\Omega = y_1\Omega_1 + y_2\Omega_2 + \dots + y_n\Omega_n = \sum_{i=1}^n y_i\Omega_i, \quad (2)$$

где

$$\Omega_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

обозначают линейные формы переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Примером билинейной формы может служить скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P} = (x, y, z)$ и $\mathbf{P}' = (x', y', z')$, которое равно (в прямоугольных координатах)

$$xx' + yy' + zz',$$

и, следовательно, есть билинейная форма двух рядов переменных (координат двух данных векторов)

x, y, z и x', y', z'

(в нашем случае $n=3$).

Билинейная форма называется *симметричной*, если

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (4)$$

т. е. если коэффициенты при $y_i x_j$ и $y_j x_i$ одинаковы. Симметричная билинейная форма не изменится, если поменять местами переменные x_i и y_i . Приведенное выше выражение для скалярного произведения есть симметричная билинейная форма.

Если в симметричной билинейной форме Ω положить

$$x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ \dots, \ x_n = y_n,$$

то она обратится в квадратичную форму, которую мы обозначим через Φ :

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ \vdots \quad \vdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \dots + a_{nn}x_n^2. \quad (5)$$

В правой части есть ряд членов, равных между собою, а именно, в силу условия (4), члены вида $a_{ij}x_i x_j$ и $a_{ji}x_j x_i$ равны между собою и в сумме дают $2a_{ij}x_i x_j$. Таким образом, вместо (5) можно написать (выписывая в первую строку диагональные члены, содержащие квадраты переменных)

Вместо того чтобы обозначать коэффициенты при $x_i x_j$ через $2a_{ij}$, мы могли бы обозначать их просто через a_{ij} , но тогда получили бы менее симметричные формулы.

Формулу (5) можно кратко переписать в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (5a)$$

или

$$\Phi = \sum_{i=1}^n x_i \Phi_i, \quad (7)$$

где ради единства мы обозначили через Φ_i линейные формы, которые были выше обозначены через Ω_i , т. е. положили

$$\Phi_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j. \quad (8)$$

Легко видеть, что

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (8a)$$

и что равенство (7) можно переписать еще так:

$$2\Phi = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (7a)$$

Из сказанного следует, что каждой квадратичной форме (5) можно всегда прописать одну вполне определенную симметричную билинейную форму

$$\Omega = \sum_{i=1}^n y_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (9)$$

Билинейная форма Ω называется *полярной* по отношению к квадратичной форме Φ .

Определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

оставленный указанным образом из коэффициентов квадратичной формы Φ , называется ее *дискриминантом*. На основании (4) дискриминант квадратичной формы есть симметричный определитель.

A называется также дискриминантом билинейной формы Ω (как в случае симметричной, так и в случае несимметричной формы Ω).

З а м е ч а н и е. Очевидно, что если в несимметричной билинейной форме положить $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то мы также получим квадратичную форму. Но тогда коэффициентом при $x_i x_j$ будет не $2a_{ij}$ или $2a_{ji}$, а сумма $a_{ij} + a_{ji}$. На основании этого очевидно, что можно найти бесчисленное множество билинейных форм, которые при $x_i = y_i$ обращаются в заданную квадратичную. Но существует, как мы видели, только одна единственная *симметричная* форма, которая обладает этим свойством. Это есть полярная форма, определяемая формулой (9).

§ 11. Преобразование квадратичных форм

Пусть дана квадратичная форма

$$\Phi: \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

и пусть вместо переменных x_i введены новые переменные x'_i при помощи линейной и однородной подстановки (§ 8)

$$x_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} x'_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Тогда, очевидно, форма Φ превратится в квадратичную форму Φ' новых переменных x'_i :

$$\Phi' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{ij} x'_i x'_j. \quad (3)$$

Чтобы вычислить коэффициенты a'_{ij} преобразованной формы, достаточно подставить в правую часть (1) выражения (2) и сделать приведения. Эта

операция никакого труда не представляет, но мы все же проведем ее в два приема следующим образом. Рассмотрим билинейную форму Ω , полярную по отношению к форме Φ :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j = \sum_{i=1}^n y_i \Phi_i, \quad (4)$$

где, как всегда,

$$\Phi_i = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j. \quad (5)$$

Из формы Ω мы сначала получим форму Ω' , полярную по отношению к форме Φ' , для чего достаточно в правой части (4) произвести над переменными x_j подстановку (2), а над переменными y_i такую же подстановку, т. е. положить

$$y_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} y'_k. \quad (2a)$$

Если после этого положим в полученном результате $y'_i = x'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то мы, очевидно, получим форму Φ' .

Ясно, что преобразование Ω в Ω' мы можем произвести в два приема: сперва заменить переменные x_1, x_2, \dots, x_n и затем переменные y_1, y_2, \dots, y_n .

Итак, заменим сперва в правой части (4) переменные x_i их выражениями (2). Тогда форма Ω обратится в форму переменных $x'_1, \dots, x'_n, y_1, \dots, y_n$:

$$\Omega' = y_1 \Phi''_1 + y_2 \Phi''_2 + \dots + y_n \Phi''_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a''_{ij} y'_i x'_j, \quad (6)$$

где $\Phi''_1, \Phi''_2, \dots, \Phi''_n$ обозначают линейные формы

$$\Phi''_i = \sum_{j=1}^n a''_{ij} x'_j, \quad (7)$$

получаемые из форм (5) путем замены x_1, \dots, x_n их выражениями (2).

На основании формул (11) § 8, коэффициенты a''_{ij} даются формулами¹⁾

$$a''_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \lambda_{sj}, \quad (8)$$

и, на основании сказанного в том же § 8, дискриминант билинейной формы Ω'' , т. е. определитель

$$A'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \dots & a''_{nn} \end{vmatrix},$$

дается формулой

$$A'' = A \cdot \Lambda, \quad (9)$$

где A — дискриминант формы Ω (или исходной формы Φ), а Λ — определитель подстановки (2).

¹⁾ Здесь роль a'_{ik} исполняют a''_{ij} .

Производя теперь подстановку (2a) в форме Ω'' , мы получим требуемую форму

$$\Omega' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{ij} x'_i y'_j,$$

причем коэффициенты a'_{ij} выражаются через коэффициенты a''_{ij} по формулам, аналогичным тем, по которым коэффициенты a'''_{ij} выражаются через исходные.

Нет надобности выписывать эти формулы, следует только отметить следующие обстоятельства.

Аналогично формуле (9) мы будем, конечно, иметь

$$A' = A'' \Lambda,$$

где A' — дискриминант формы Ω' , так что

$$A' = A \cdot \Lambda^2,$$

Значит, дискриминант преобразованной формы равен дискриминанту исходной формы, умноженному на квадрат определителя подстановки.

Далее, мы знаем (§ 8), что ранги определителей A'' и A одинаковы; точно так же ранги определителей A' и A'' одинаковы, а поэтому A и A' также имеют одинаковые ранги.

Итак, мы имеем следующее предложение фундаментальной важности: *ранг дискриминанта квадратичной формы остается неизменным при линейном и однородном преобразовании переменных* (разумеется, речь идет о иеособенном преобразовании).

Прибавим к сказанному еще следующее замечание. Не надо думать, что линейные формы

$$\Phi'_i = \sum_{j=1}^n a'_{ij} x'_j = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi'}{\partial x'_i}, \quad (11)$$

которые связаны с преобразованной квадратичной формой Φ' так же, как формы Φ_i были связаны с исходной формой Φ , получаются из форм Φ_i путем простой замены переменных (2). Найдем зависимость между линейными формами Φ_i и Φ'_i .

По симому определению форм Ω и Ω' имеем

Ω' Ω ,

причем предыдущее равенство есть тождество, если в правой части вместо переменных x_i и y_i подразумевать их выражения (2) и (2а). Последнее равенство может быть переписано так:

$$y'_1\Phi'_1 + \dots + y'_n\Phi'_n = y_1\Phi_1 + \dots + y_n\Phi_n. \quad (12)$$

Подставляя в правую часть вместо переменных y_i их выражения (2а) через \hat{y}_i , получим

$$y'_1\Phi'_1 + y'_2\Phi'_2 + \dots + y'_n\Phi'_n = (\lambda_{11}y'_1 + \lambda_{12}y'_2 + \dots + \lambda_{1n}y'_n)\Phi_1 + \\ + (\lambda_{21}y'_1 + \lambda_{22}y'_2 + \dots + \lambda_{2n}y'_n)\Phi_2 + \\ \vdots \\ + (\lambda_{n1}y'_1 + \lambda_{n2}y'_2 + \dots + \lambda_{nn}y'_n)\Phi_n$$

Это равенство есть тождество, если в правых частях вместо x_i подразумевать их выражения через x'_i . Сравнивая коэффициенты при y'_1, y'_2, \dots, y'_n и обеих

частях, получим, наконец:

$$\Phi'_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \Phi_j. \quad (13)$$

Итак, формы Φ'_i суть линейные и однородные комбинации форм Φ_i , если в этих последних вместо переменных x_i подразумевать их выражения (2).

Меняя ролями старые и новые переменные, убедимся тем же способом, что и формы Φ_i суть линейные комбинации форм Φ'_i . Это вытекает также из того, что определитель, составленный из коэффициентов λ_{ij} , по условию, отличен от нуля и, следовательно, соотношения (13) могут быть разрешены относительно величин Φ_i .

Из этого вытекает одно простое очевидное следствие: если данные значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0, \dots, \Phi_n = 0, \quad (14)$$

то соответствующие им значения x'_1, x'_2, \dots, x'_n будут удовлетворять уравнениям

$$\Phi'_1 = 0, \Phi'_2 = 0, \dots, \Phi'_n = 0. \quad (15)$$

Иными словами, хотя функции $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ не переходят при подстановке (2) непосредственно в $\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_n$, все-таки система уравнений (14) переходит в эквивалентную ей систему (15).

§ 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Перейдем теперь к вопросу об упрощении квадратичной формы

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

путем линейной подстановки над переменными. А именно, покажем, что всякая квадратичная форма Φ может быть при помощи неособенной линейной подстановки

$$x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x'_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

приведена к «каноническому» виду

$$\Phi' = \lambda_1 x'_1^2 + \lambda_2 x'_2^2 + \dots + \lambda_r x'_r^2, \quad (9)$$

где фигурируют только квадраты переменных; через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ обозначены постоянные, отличные от нуля.

Важно при этом отметить, что если коэффициенты данной формы — действительные числа, то и коэффициенты подстановки могут быть взяты действительными; в этом случае будут, конечно, действительными и коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ в (3).

Формулы (2), связывающие новые и старые переменные, могут быть написаны и так (если их разрешить относительно переменных x'_i):

$$x'_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2a)$$

Для большей ясности рассмотрим сперва форму двух переменных

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Предположим сперва, что в эту форму входит по крайней мере один квадратный член, т. е. что по крайней мере одна из величин a_{11} и a_{22} отлична от нуля. Изменяя, в случае необходимости, нумерацию переменных, можно предположить, что $a_{11} \neq 0$. Тогда будем иметь

$$\Phi = a_{11} \left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}} x_1 x_2 \right) + a_{22} x_2^2 = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12} x_2}{a_{11}} \right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2 + a_{22} x_2^2,$$

или

$$\Phi = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x_2^2.$$

Произведя подстановку

$$x'_1 := x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2, \quad x'_2 := x_2,$$

мы приведем форму Φ к требуемому каноническому виду

$$\Phi' = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2,$$

где $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}$. Может случиться, что $\lambda_2 = 0$; тогда Φ приведется к виду

$$\Phi' = \lambda_1 x'^2_1.$$

Выше мы исключили случай, когда $a_{11} = a_{22} = 0$. В этом случае исходная форма имеет вид

$$\Phi = 2a_{12}x_1x_2.$$

Если, как мы будем считать, исходная форма не равна тождественно нулю; то $a_{12} \neq 0$.

Произведя подстановку

$$x'_1 := \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x'_2 := \frac{x_1 - x_2}{2},$$

т. е.

$$x_1 = x'_1 + x'_2, \quad x_2 = x'_1 - x'_2,$$

получим окончательно

$$\Phi' = 2a_{12}(x'^2_1 - x'^2_2) = 2a_{12}x'^2_1 - 2a_{12}x'^2_2 = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2,$$

где

$$\lambda_1 = 2a_{12}, \quad \lambda_2 = -2a_{12}.$$

Вернемся теперь к общему случаю.

Приведение к каноническому виду (3) постепенно, производя над переменными ряд последовательных линейных подстановок.

Если в форме (1) отсутствуют все члены, содержащие квадраты переменных, то всегда можно путем линейной подстановки привести ее к виду, где такие члены имеются.

Пусть, действительно, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$. Тогда, по крайней мере, один из коэффициентов a_{ij} (при $i \neq j$) будет отличен от нуля, иначе форма была бы тождественно равна нулю. Производя, в случае необходимости, изменение нумерации переменных, можно считать, что $a_{12} \neq 0$. Тогда, производя подстановку

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & x'_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2}, \\ x'_3 &= x_3, \dots, & x'_n &= x_n, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

мы получим вместо члена $2a_{12}x_1x_2$ члены $2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$. Эти члены, очевидно, ии с какими другими не сократятся, ибо никакие другие члены не будут содержать $x_1'^2$ и $x_2'^2$.

Итак, произведя предварительно, в случае надобности, подстановку вида (4), можно считать, что форма Φ содержит, по крайней мере, один член с квадратом переменной. Изменяя, в случае надобности, нумерацию, мы можем считать, что $a_{11} \neq 0$. Выпишем теперь все члены формы Φ , содержащие переменную x_1 ; эти члены будут

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n. \quad (*)$$

Последняя сумма может быть переписана так:

$$\begin{aligned} & a_{11} \left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}} x_1 x_2 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}} x_1 x_n \right) = \\ & = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 + \text{члены, не содержащие } x_1. \end{aligned} \quad (**)$$

Внося теперь в Φ вместо совокупности членов (*) ее выражение (**), получим

$$\Phi = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 + \Phi_1(x_2, x_3, \dots, x_n),$$

где Φ_1 — квадратичная форма уже $n-1$ переменных x_2, x_3, \dots, x_n .

Производя подстановку

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ x'_2 = x_2, x'_3 = x_3, \dots, x'_n = x_n, \end{array} \right\} \quad (5)$$

мы приведем нашу форму Φ к виду

$$\Phi' = a_{11}x'_1^2 + \Phi_1(x'_2, \dots, x'_n),$$

где выделен один квадратный член, а Φ_1 есть квадратичная форма $n-1$ переменных.

Если Φ_1 тождественно равна нулю, то процесс приведения закончен; в противном случае, применяя только что указанный прием к форме Φ_1 , мы выделим из нее один квадратичный член и у нас останется форма уже от $n-2$ переменных, и т. д., так что, в конце концов, мы получим форму вида (3), содержащую члены только с квадратами переменных.

Все это достигается путем ряда линейных подстановок вида (4) или (5). Эти подстановки, очевидно, неособенные, ибо могут быть обращены. Поэтому и результат ряда этих подстановок есть неособенная подстановка (§ 9).

Таким образом, высказанное предложение доказано.

Число r членов в правой части (3) не может, конечно, превосходить числа переменных n и, вообще говоря, будет ему равно. Легко заранее вычислить это число r .

Действительно, мы знаем, что ранг дискриминанта квадратичной формы не изменяется при линейном преобразовании переменных (§ 11). Составим дискриминант формы Φ' . Это — определитель n -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

ранг которого равен, очевидно, r , ибо определитель порядка r , составленный из первых r строк и первых r столбцов, равен $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$ и отличен от нуля, а определители порядка выше r содержат, очевидно, строки и (столбцы), состоящие только из нулей, и поэтому равны нулю.

Итак, число r членов в канонической форме равно рангу дискриминанта данной формы.

Если дискриминант

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

данной формы отличен от нуля, то ранг его равен n и, значит, каноническая форма имеет вид

$$\Phi' = \lambda_1 x'_1^2 + \dots + \lambda_n x'_n^2, \quad (3a)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ все отличны от нуля. В этом случае данная форма называется *неособенной*.

Если же $A=0$, то в (3) будет $r < n$, и данная форма называется *особенной*.

Иногда удобнее форму Φ' писать в виде (3a) даже тогда, когда она особенная. В этом случае некоторые из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ равны нулю.

После приведения формы к каноническому виду (3) ее можно еще упростить, произведя подстановку

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda_1} x'_1, \dots, \xi_r = \sqrt{\lambda_r} x'_r, \quad \xi_{r+1} = x'_{r+1}, \dots, \quad \xi_n = x'_n.$$

Тогда наша форма приведется попросту к сумме квадратов

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2.$$

Однако, такое приведение, если оставаться в области действительных чисел, что мы и будем считать в дальнейшем (когда противное не оговорено), возможно только в том случае, когда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ — положительные числа.

Если некоторые из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ отрицательны, то не нарушая общности, можно считать, что

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_k > 0, \lambda_{k+1} < 0, \dots, \lambda_r < 0$$

(причем может случиться, что $k=0$, т. е. все λ отрицательны, или $k=r$, т. е. все λ положительны).

Тогда, полагая

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda_1} x'_1, \dots, \xi_k = \sqrt{\lambda_k} x'_k, \quad \xi_{k+1} = \sqrt{-\lambda_{k+1}} x'_{k+1}, \dots, \quad \xi_r = \sqrt{-\lambda_r} x'_r,$$

$$\xi_{r+1} = x'_{r+1}, \dots, \xi_n = x'_n,$$

мы приведем нашу форму к виду

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2 - \xi_{k+1}^2 - \dots - \xi_r^2. \quad (a)$$

Мы видели, что число r членов в канонической форме вполне определяется исходной формой. Легко показать, что число k положительных (и, значит, число $r-k$ отрицательных) членов также не зависит от способа приведения формы к каноническому виду (согласно принятому условию мы считаем, что коэффициенты исходной формы, а также коэффициенты рассматриваемых подстановок — числа действительные).

Действительно, предположим, что каким-либо способом мы привели нашу квадратичную форму к виду

$$\xi_1'^2 + \dots + \xi_k'^2 - \xi_{k+1}'^2 - \dots - \xi_r'^2, \quad (b)$$

где $k' \neq k$, например, $k' > k$. Переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \dots, \xi_n$, а также $\xi'_1, \dots, \xi'_r, \dots, \xi'_n$ суть линейные однородные функции исходных переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Мы всегда можем придать этим последним такие частные значения (не равные одновременно нулю), чтобы получить

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_k = \xi'_{k+1} = \dots = \xi'_r = \xi'_{r+1} = \dots = \xi'_n = 0.$$

Действительно, последние соотношения суть линейные и однородные уравнения относительно неизвестных x_1, \dots, x_n , причем число этих уравнений $k + (n - k') = n + k - k'$ меньше n , ибо $k - k' < 0$. Значит, эта система всегда имеет ненулевые решения. Взяв такие частные значения переменных, получим для форм (а) и (б) частные значения: $-\xi_{k+1}^2 - \dots - \xi_r^2$ и $\xi_1'^2 + \dots + \xi_{k'}^2$, и, следовательно (при указанных частных значениях переменных), будем иметь

$$-\xi_{k+1}^2 - \dots - \xi_r^2 = \xi_1'^2 + \dots + \xi_{k'}^2,$$

а это возможно только в том случае, когда

$$\xi_{k+1} = \dots = \xi_r = \xi'_1 = \dots = \xi'_{k'} = 0,$$

ибо, по условию, мы имеем дело с действительными величинами. Итак, мы должны будем иметь

$$\xi'_1 = \xi'_2 = \dots = \xi'_{k'} = \xi'_{k'+1} = \dots = \xi'_n = 0,$$

а это возможно только в том случае, когда¹⁾

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

что противоречит условию. Следовательно, должно быть $k = k'$.

Доказанная только что теорема носит название «закона инерции квадратичных форм».

Возвращаясь к каноническому виду (3), заметим следующее: если все коэффициенты λ_i положительны и если мы условимся рассматривать лишь действительные значения переменных, то, очевидно, форма Φ' , а следовательно, и исходная форма Φ , может принимать только неотрицательные значения. Если же все коэффициенты λ_i — отрицательные, то форма может принимать только неположительные значения. В обоих этих случаях форма называется *определенной*²⁾. В первом случае она называется *положительной*, а во втором — *отрицательной*.

Легко, наконец, видеть, что определенная *неособенная* форма Φ может обращаться в нуль (при действительных значениях переменных) тогда и только тогда, когда все переменные x_1, \dots, x_n обращаются в 0. Действительно,

1) По условию, $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ суть линейные однородные функции от x_1, x_2, \dots, x_n , связанные с ними соотношениями вида $\xi'_1 = \mu_{11}x_1 + \dots + \mu_{1n}x_n, \dots, \xi'_n = \mu_{n1}x_1 + \dots + \mu_{nn}x_n$, причем определитель, составленный из μ_{ij} отличен от нуля (подстановка — неособенная). Значит, если $\xi'_1 = \dots = \xi'_n = 0$, то необходимо $x_1 = \dots = x_n = 0$.

2) Некоторые авторы применяют это название только в случае неособенных форм; в случае особенной формы они применяют название «полуопределенная».

если $\Phi = 0$ и, следовательно,

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2 = 0,$$

то мы должны иметь $x_1' = x_2' = \dots = x_n' = 0$ (ибо все коэффициенты λ_i — одного знака и не равны нулю). А из этого следует, что

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Замечание. Существует простое общее правило, позволяющее узнать, является ли данная форма положительной, отрицательной или неопределенной. Не останавливаясь на этом правиле (которое можно найти в курсах высшей алгебры), заметим только следующее: для того чтобы квадратичная форма двух переменных

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

была неособенной и положительной, необходимо и достаточно, чтобы $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ (а следовательно, и $a_{22} > 0$); это непосредственно следует из формул, приведенных в начале этого параграфа.

§ 13. Условия распадения квадратичной формы на два линейных множителя

Сказанное в предыдущем параграфе позволяет, между прочим, сразу ответить на вопрос: при каком условии квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (1)$$

может быть представлена в виде произведения двух линейных множителей

$$\Phi = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n) \quad (2)$$

(действительных или мнимых)? Докажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы ранг дискриминанта формы равнялся 1 или 2.

Действительно, если линейные формы

$$f_1 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \text{ и } f_2 = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \quad (3)$$

независимы между собою, то в подстановке

$$x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

$$x'_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n,$$

$$x'_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

...

$$x'_n = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n,$$

можно подобрать коэффициенты $c_1, \dots, c_n, \dots, l_1, \dots, l_n$ так, чтобы подстановка была неособенной¹⁾. После этой подстановки (коэффициенты которой

¹⁾ Это всегда можно сделать бесчисленным множеством способов. Действительно, так как линейные формы (3) независимы, то ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix}$$

равен двум (\S 5) и, следовательно, один из определителей $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 b_3 - a_3 b_1 \dots$ отличен от нуля. Не нарушая общности, можно считать

могут быть и мнимыми) наша форма приведется к виду $\Phi' = x'_1 x'_4$.

Полагая $x'_1 = \xi_1 - \xi_2$, $x'_2 = \xi_1 + \xi_2$; $x'_3 = \xi_3$, ..., $x'_n = \xi_n$, приведем ее к виду $\xi_1^2 - \xi_2^2$.

Значит, в нашем случае $r=2$, и ранг дискриминанта равен двум.

Если же формы (3) зависимы, то мы будем иметь тождественное

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n) = k(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n),$$

где k — некоторая постоянная. Значит, наша форма имеет вид

$$\Phi = k(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^2. \quad (2a)$$

Считая, что, например, $a_1 \neq 0$, и, полагая

$$x'_1 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_n = x_n,$$

мы приведем ее к виду $\Phi' = k x'_1^2$.

Таким образом, в этом случае $r=1$.

Обратно, если $r=1$ или $r=2$, форма Φ , как мы знаем, может быть приведена к виду

$$\Phi' = \lambda_1 x'_1^2 \text{ или } \Phi' = \lambda_1 x'_1^2 + \lambda_2 x'_2^2,$$

притом подстановкой с действительными коэффициентами, если, как мы условились считать, коэффициенты данной формы — действительные числа. В первом случае, подставляя вместо x'_1 его выражение через переменные x_1, x_2, \dots, x_n , мы увидим, что Φ имеет вид (2a), т. е. Φ является полным квадратом линейной функции. Во втором случае имеем

$$\Phi' = (\sqrt{\pm \lambda_1} x'_1 + \sqrt{\mp \lambda_2} x'_2) (\sqrt{\pm \lambda_1} x'_1 - \sqrt{\mp \lambda_2} x'_2),$$

т. е. форма разлагается на два линейных множителя, действительных или мнимых. Если λ_1 и λ_2 имеют различные знаки, то всегда можно так подобрать знаки $\pm \lambda_1$ и $\mp \lambda_2$, чтобы множители были действительными. В противном случае это, очевидно, невозможно. Наше утверждение, таким образом, доказано.

Пример. Квадратичная форма двух переменных

$$\Phi = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

всегда разлагается на два линейных множителя. Из формул, приведенных в начале предыдущего параграфа, заключаем, что при $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ множители эти различные и мнимые; при $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$ множители эти различные и могут быть выбраны действительными; при $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ множители эти совпадающие (и действительные).

$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Тогда, например, подстановка

$$x'_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad x'_1 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n,$$

$$x'_3 = x_3, \quad x'_4 = x_4, \quad \dots, \quad x'_n = x_n$$

удовлетворяет нашему условию, ибо ее определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 14. Ортогональные подстановки

Рассмотрим квадратичную форму частного вида

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (1)$$

При линейной подстановке

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}x'_1 + \dots + \lambda_{1n}x'_n \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n &= \lambda_{n1}x'_1 + \dots + \lambda_{nn}x'_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

она перейдет, вообще говоря, в форму общего вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{ij}x'_i x'_j.$$

Однако, при некотором выборе коэффициентов λ_{ij} подстановки (2), может случиться, что преобразованная форма будет также иметь вид

$$x'^2_1 + \dots + x'^2_n. \quad (3)$$

В таком случае подстановка (1) называется *ортогональной*. Это название дано по аналогии с подстановками, выражающими в случае $n=3$ или $n=2$ преобразование прямоугольных координат; см. главу III, § 72.

Легко вывести соотношения, которые должны связывать коэффициенты ортогональной подстановки и которые представляют собой обобщение соотношений (3), (4), (3а), (4а) § 71. Действительно, внося выражения (2) в (1) и записав, что в получаемом выражении коэффициенты при $x'_r x'_s$ равны нулю, если $r \neq s$, и равны 1, если $r=s$, легко находим

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ir} \lambda_{is} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ 1 & \text{при } r=s. \end{cases} \quad (4)$$

Эти формулы являются обобщением формул (3), (4) § 72. Обозначим через Λ определитель подстановки (2)

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}.$$

Производя умножение $\Lambda \cdot \Lambda$ (по столбцам) и применяя формулы (4), легко выводим

$$\Lambda^2 = \Lambda \Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда

$$\Lambda = \pm 1. \quad (5)$$

Придадим теперь в соотношениях (4) значку r какое-либо определенное значение и выделим из этих соотношений те, которые соответствуют этому значению знака. Мы получим таким образом систему n уравнений

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ir} \lambda_{is} = \delta_{rs} \quad (s=1, 2, \dots, n),$$

где δ_{rs} обозначает 0 при $s \neq r$ и 1 при $s=r$. Рассматривая $\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{nr}$ как неизвестные и решая последнюю систему по способу § 3, получим, очевидно, обозначая через Λ_{kr} алгебраическое дополнение элемента λ_{kr} в определителе Λ :

$$\lambda_{1r} = \frac{\Lambda_{1r}}{\Lambda}, \dots, \lambda_{nr} = \frac{\Lambda_{nr}}{\Lambda},$$

или, на основании (5):

$$\lambda_{kr} = \pm \Lambda_{kr}, \quad (6)$$

где знак берется тот же, что и в (5). Решая теперь уравнение (2) относительно x'_1, x'_2, \dots, x'_n , получаем, на основании (5) и (6) (см. § 3):

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \dots + \lambda_{n1}x_n, \\ x'_2 &= \lambda_{12}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \dots + \lambda_{n2}x_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x'_n &= \lambda_{1n}x_1 + \lambda_{2n}x_2 + \dots + \lambda_{nn}x_n. \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Мы видим, таким образом, что подстановка (2a), являющаяся обратной подстановке (2), получается из последней заменой в таблице коэффициентов строк на столбцы и обратно. Применяя к подстановке (2a) те же рассуждения, что и к подстановке (2), получим вместо (4) соотношения

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ri} \lambda_{si} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ 1 & \text{при } r = s, \end{cases} \quad (4a)$$

являющиеся, таким образом, следствием соотношений (4), точно так же, как в частном случае $n=3$ соотношения (3a), (4a) § 71 являются следствием соотношений (3), (4) того же параграфа.

Заметим еще следующее весьма важное для нас обстоятельство. Пусть дана произвольная квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (7)$$

и пусть над переменными произведена ортогональная подстановка (2), так что форма Φ обращается в

$$\Phi' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{ij} x'_i x'_j. \quad (8)$$

Тогда дискриминанты A и A' форм Φ и Φ' равны между собою, т. е.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Это следует из равенства

$$A' = A \cdot \Lambda^2$$

и из свойства (5) ортогональной подстановки.

Доказанный результат формулируют следующим образом: *дискриминант квадратичной формы есть инвариант при ортогональных подстановках* или, короче, *дискриминант есть «ортогональный» инвариант*.

Легко указать еще ряд других выражений, составленных при помощи коэффициентов формы Φ и обладающих тем же свойством инвариантности.

Действительно, рассмотрим вспомогательную форму

$$\Psi = \Phi - \lambda (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2),$$

где λ — произвольный параметр. При ортогональной подстановке (2) эта форма переходит в форму

$$\Psi' = \Phi' - \lambda (x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2),$$

ибо Φ переходит в Φ' , а $x_1^2 + \dots + x_n^2$ обращается в $x_1'^2 + \dots + x_n'^2$. Дискриминанты форм Ψ и Ψ' должны быть, по доказанному, равны между собою. Дискриминант D формы Ψ отличается от дискриминанта A формы Φ только тем, что диагональные члены $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ заменены разностями $a_{11} - \lambda, a_{22} - \lambda, \dots, a_{nn} - \lambda$, так что

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Аналогичное выражение имеем для дискриминанта формы Ψ' ; поэтому, согласно сказанному, будем иметь равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} - \lambda \end{vmatrix}, \quad (11)$$

справедливое для любого значения параметра λ .

С другой стороны, раскрывая определитель (10) и располагая по степеням λ будем, очевидно, иметь

$$D = C_0 \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n, \quad (12)$$

где C_0, \dots, C_n — определенные выражения, составленные из коэффициентов a_{ij} . Мы не будем давать все эти выражения, а ограничимся только нахождением C_0, C_1 и C_n ¹⁾. Прежде всего ясно, что члены, содержащие λ^n и λ^{n-1} , могут произойти исключительно от членов, получающихся от перемножения элементов главной диагонали:

$$(a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots$$

(мы выписали только интересующие нас два члена). Значит,

$$C_0 = (-1)^n, \quad C_1 = (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}).$$

Чтобы вычислить C_n , заметим, что, на основании (12), C_n равняется значению D при $\lambda = 0$; следовательно:

$$C_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A$$

¹⁾ В тексте книги эти выражения вычислены непосредственно для тех частных случаев, которые нам понадобились (а именно, для случаев $n = 2$ и $n = 3$).

Возвратимся теперь к равенству (11). Разлагая правую часть и располагая по степеням λ , получим равенство

$$C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_n = C'_0\lambda^n + C'_1\lambda^{n-1} + \dots + C'_n, \quad (11a)$$

где C'_0, \dots, C'_n суть выражения, составленные из коэффициентов a_{ij} точно так же, как C_0, \dots, C_n составлены из коэффициентов a_{ij} . Так как (11) справедливо при всех значениях λ , то мы должны иметь

$$C_0 = C'_0, \quad C_1 = C'_1, \quad \dots, \quad C_n = C'_n, \quad (13)$$

т. е. C_0, C_1, \dots, C_n суть тоже ортогональные инварианты. C_0 и C_n ничего нового не дают, ибо $C_0 = (-1)^n$ есть просто постоянная, а C_n есть уже известный инвариант A ; но C_1, C_2, \dots, C_{n-1} суть новые инварианты. Обозначая C_1 через $(-1)^{n-1} S$, имеем

$$S = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

По доказанному, C_1 , а следовательно, и S , т. е. сумма диагональных членов, есть ортогональный инвариант.

§ 15. О приведении квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогональной подстановки

Выше была доказана теорема, что всякая квадратичная форма Φ может быть приведена путем линейной подстановки к каноническому виду:

$$\Phi' = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \quad (1)$$

(мы пишем теперь правую часть в виде n членов, считая, что некоторые из λ_i могут быть равны нулю).

Естественно возникает вопрос: можно ли добиться того же самого приведения путем ортогональной подстановки?

Ответ оказывается всегда утвердительным, если исходная форма имеет действительные коэффициенты. В этом случае коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ также оказываются действительными числами. Притом достаточно рассматривать подстановки с действительными коэффициентами,

Доказательство этого важного предложения не представляет никаких трудностей и может быть получено непосредственным обобщением доказательства, приведенного в тексте книги (§ 278) для $n=3$.

Не останавливаясь на этом, заметим только, что коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ канонической формы должны быть корнями уравнения n -й степени

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Действительно, определитель в левой части есть определитель D предыдущего параграфа. Такой определитель, составленный для канонической формы Φ' , есть, очевидно,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$$

Так как, на основании сказанного в предыдущем параграфе, определители D , составленные для исходной и преобразованной форм, тождественно равны, то будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda),$$

откуда становится ясным, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ суть корни уравнения (2).

Уравнение (2) носит название «векового», так как подобным уравнением определяются так называемые «вековые члены» в небесной механике.