Часть первая

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Глава I.

СКАЛЯРНЫЕ, ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

Чтобы максимально облегчить изучение математической теории поля, мы в этой главе ограничимся рассмотрением простейших стационарных полей на плоскости и будем пользоваться только прямоугольными декартовыми координатами.

§ 1. Скалярное поле и векторное поле его градиента

Скалярным полем называется область плоскости, каждой точке которой сопоставляется некоторое значение скалярной величины φ.

Так как произвольная точка на плоскости характеризуется координатами x, y или радиус-вектором $\vec{r}$, то аналитически любое скалярное поле может быть задано либо в виде функции координат $\varphi = \varphi(x, y)$, либо в функции радиус-вектора $\varphi = \varphi(\vec{r})$. Геометрически двумерное скалярное поле $\varphi = \varphi(x, y)$ можно рассматривать как некоторую поверхность в пространстве трех измерений, где всякой точке (x, y) плоскости соответствует своя высота $z = \varphi(x, y)$ (рис. 2).

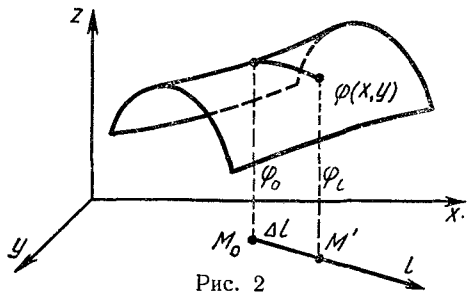

Рис. 2

Как известно из дифференциального исчисления, важнейшей аналитической характеристикой функции одной переменной $S=f(t)$ является ее производная $\frac{dS}{dt}$, определяющая быстроту изменения зависимой переменной S с изменением аргумента t. Какая же величина играет роль производной в случае скалярного поля $\varphi=\varphi(x, y)$?

Пусть $\varphi(x, y)$ является в заданной области непрерывной, однозначной и дифференцируемой функцией координат x и y. Чтобы дать количественную характеристику быстроты изменения скалярной величины φ в окрестности произвольной точки M поля, введем понятие производной по данному направлению.

Производной скалярного поля $\varphi=\varphi(x, y)$ по некоторому направлению l называется предел отношения приращения зависимой переменной в этом направлении к перемещению, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi_l-\varphi_0}{\Delta l}, \qquad (1)$$

где φ_0 и φ_l—значения скалярной функции φ соответственно в рассматриваемой точке M и соседней точке M', отстоящей от M на расстоянии Δl вдоль выбранного направления l (см. рис. 2).

Очевидно, что величина $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ зависит от выбора направления l. И поскольку через точку на плоскости можно провести бесчисленное множество различных направлений, то может показаться, что для дифференциальной характеристики скалярного поля необходимо задать в каждой точке (x, y) бесконечное количество производных $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ по всевозможным направлениям, проходящим через эту точку.

Оказывается, однако, что вследствие непрерывности и однозначности функции $\varphi=\varphi(x, y)$ для определения скорости ее изменения вдоль произвольного направления l достаточно знать только две производные по двум взаимно перпендикулярным направлениям, скажем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Чтобы в этом убедиться, введем представление об *эквипотенциальных линиях* (линии уровня), представляющих собой геометрическое место точек, которым соответствует одно и то же значение скалярной величины φ. Ясно, что уравнение эквипотенциальной линии имеет вид $\varphi(x, y)=\varphi_i=$ $=\text{const}$. Меняя значение постоянной φ_i, получим семей-

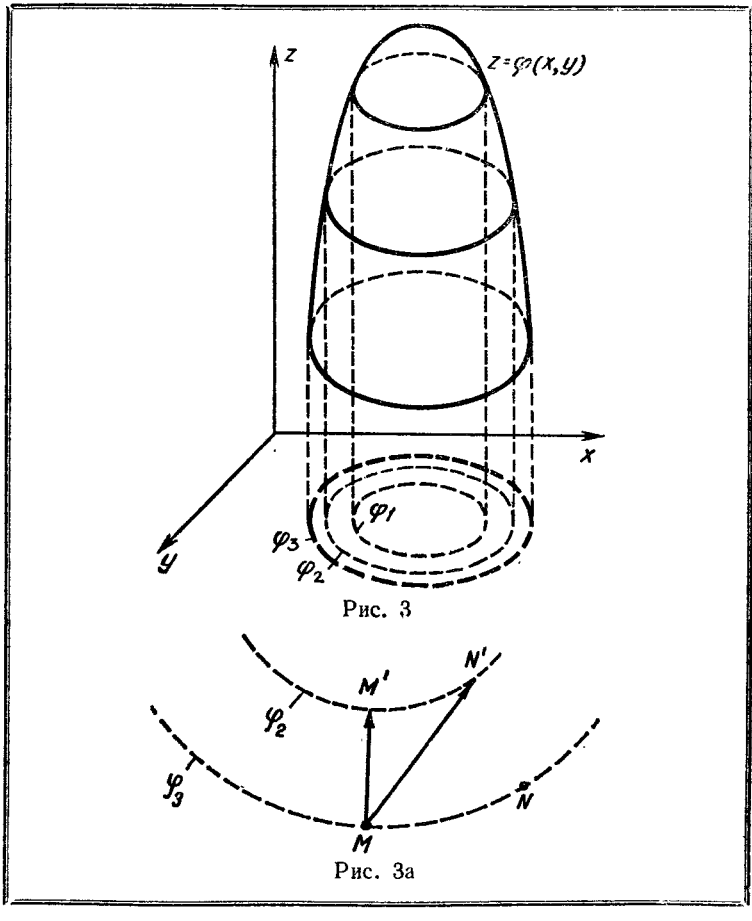

Рис. 3

Рис. 3а

ство линий уровня. Следует иметь в виду, что при геометрической интерпретации поля все эти линии лежат не на поверхности $z=\varphi(x, y)$, а на плоскости XOY, каждая из них представляет собой множество точек, которым соответствуют равные высоты z (рис. 3). У температурного поля линии уровня представляют собой *изотермы*; у электростатического поля — это *линии равного потенциала*.

Если на плоскости изобразить эквипотенциальные линии, соответствующие значениям скалярной функции $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, для которых $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \text{const}$ (рис. 3), то по виду семейства этих линий можно будет качественно

судить о быстроте изменения поля в любой точке по любому направлению: где гуще расположены линии уровня, там скалярная величина φ изменяется быстрее. Однако для количественной характеристики поля этого недостаточно.

Пусть нас интересует скорость изменения скалярной величины φ в окрестности точки M, в которой $\varphi = \varphi_3$ (рис. 3а). Проведем через M эквипотенциальную линию $\overset{\smile}{MN}$. Кроме того, построим близкую к $\overset{\smile}{MN}$ линию уровня $\overset{\smile}{M'N'}$, соответствующую несколько большему значению потенциала $\varphi_2 = \varphi_3 + \Delta\varphi$. Пусть вектор $\overrightarrow{MM'} = |MM'|\vec{n}$ направлен вдоль нормали к $\overset{\smile}{MM}$ в сторону возрастания φ, а вектор $\overrightarrow{MN'} = |MN'|\vec{l}$ — вдоль произвольного направления (где $\vec{n}$ и $\vec{l}$ — единичные векторы, направленные соответственно вдоль $\overrightarrow{MM'}$ и $\overrightarrow{MN'}$).

Из рисунков 3 и 3а ясно, что производные от φ по направлениям $\vec{n}$ и $\vec{l}$ соответственно равны:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\overline{MM'}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\overline{MN'}},$$

где пределы берутся при условии, что $\overset{\smile}{M'N'}$ неограниченно приближается к $\overset{\smile}{MN}$, т. е. $|MM'| \to 0$ и $|MN'| \to 0$. Так как при приближении $\overset{\smile}{M'N'}$ к $\overset{\smile}{MN}$ треугольник $MM'N'$ можно считать прямоугольным, то $|MM'| = |MN'|\cos(\widehat{l, n})$, и мы приходим к соотношению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(\widehat{l, n}). \qquad (2)$$

Отсюда следует, что в любой точке поля производная по нормали к линии уровня больше производной по любому другому направлению. Зная производную $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, можно по формуле (2) вычислить производную по произвольному направлению l, проходящему через рассматриваемую точку.

Поскольку производная функции $\varphi = \varphi(x, y)$ по нормали к эквипотенциальной линии играет особую роль для дифференциальной характеристики скалярного поля, то оказалось полезным ввести понятие *градиента*.

Градиентом скалярного поля $\varphi(x, y)$ в данной точке M называется вектор, направленный по нормали $\vec{n}$ к проходящей через точку M линии уровня (в сторону возра-

стания φ) и численно равный производной от φ по этому направлению:

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что производная по любому направлению равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \operatorname{grad}_l \varphi. \qquad (4)$$

В частности, производные вдоль осей координат равны:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \operatorname{grad}_x \varphi, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \operatorname{grad}_y \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Читая равенства (5) справа налево, можно градиент определить по-иному.

Градиентом скалярной функции $\varphi(x, y)$ называется вектор, у которого проекции на оси координат равны соответственно частным производным от φ по x и y:

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}. \qquad (6)$$

Отсюда вытекает следующее выражение для абсолютного значения градиента, т. е. длины вектора $\nabla\varphi$:

$$|\operatorname{grad}\varphi| \equiv |\nabla\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}. \qquad (7)$$

Наконец, исходя из равенства (4) можно дать еще одно определение градиента.

Градиент скалярного поля $\varphi(x, y)$ в произвольной точке — это вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания функции в окрестности точки, равный производной от функции φ по этому направлению.

Из всего сказанного следует, что построенный в некоторой точке скалярного поля вектор $\nabla\varphi$ полностью характеризует аналитические свойства функции $\varphi(x, y)$ в окрестности этой точки. Таким образом, для аналитической характеристики всего скалярного поля необходимо знать векторы $\nabla\varphi$ во всех точках этого поля, иными словами, нужно знать векторное поле градиента.

Если каждой точке $\vec{r}(x, y)$ некоторой части плоскости сопоставляется определенная векторная величина $\vec{a}$, то говорят, что задано векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ или $\vec{a}(x, y)$.

Векторные поля графически изображают направленными отрезками, нанесенными в точках, отстоящих друг от друга на равных расстояниях.

Заметим, что поскольку вектор $\vec{a}$ на плоскости определяется двумя скалярными проекциями a_x и a_y, то задание векторного поля $\vec{a}(x, y)$ эквивалентно заданию двух скалярных полей $a_x(x, y)$ и $a_y(x, y)$. В результате мы приходим к заключению, что **дифференциальной характеристикой («производной») скалярного поля $\varphi(x, y)$, заданного в некоторой области плоскости, является векторное поле $\operatorname{grad}\varphi(x, y)$, определенное в той же области.**

Рассмотрим несколько примеров.

1. Задано скалярное поле $\varphi=(x^2+y^2)^{-1/2}=1/r$. Определить векторное поле градиента.

Воспользуемся для этой цели формулой (6). Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

то

$$\operatorname{grad}\varphi=-\frac{\vec{r}}{r^3},$$

где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Выясним смысл полученного решения. Легко видеть, что эквипотенциальные линии рассматриваемого скалярного поля удовлетворяют уравнению типа $x^2+y^2=\text{const}$, т. е. представляют собой окружности с центром в начале координат.

Поскольку по условию φ зависит только от расстояния r, то в пространстве трех измерений эта функция геометрически изобразится поверхностью вращения. Сечением этой поверхности плоскостью $y=0$ будет линия $\varphi=1/x$, представляющая собой равнобочную гиперболу, асимптотами которой являются оси x и φ.

Следовательно, поверхность $\varphi(x, y)$ есть гиперболоид вращения (рис. 4, *а*). Ясно, что в любой точке плоскости XOY направление быстрейшего возрастания высоты поверхности φ совпадает с направлением к центру. При этом, как ясно из вида этой поверхности, крутизна подъема φ при приближении к центру возрастает все быстрее. Это соответствует тому, что длина вектора $\nabla\varphi$ вдоль направления к началу координат возрастает обратно пропор-

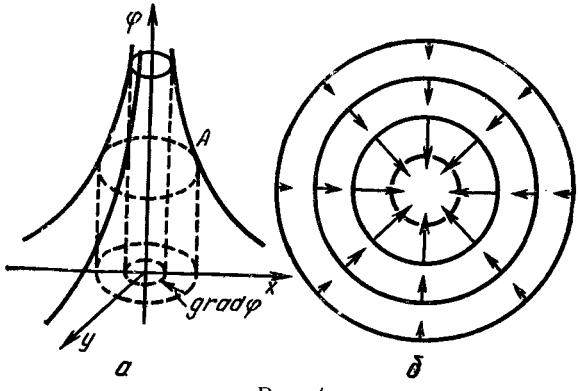

Рис. 4

ционально квадрату радиус-вектора точки:

$$|\nabla\varphi| = \frac{1}{r^2}.$$

Графическое изображение векторного поля grad φ приведено на рис. 4, *б*.

Теперь рекомендуем читателю самостоятельно решить и проанализировать примеры 2 и 3.

2. Определить и графически изобразить векторные поля градиентов скалярных функций: а) $\varphi = x^2 + y^2$, б) $\varphi = (\vec{c}, \vec{r})$ ($\vec{c}$ — постоянный вектор).

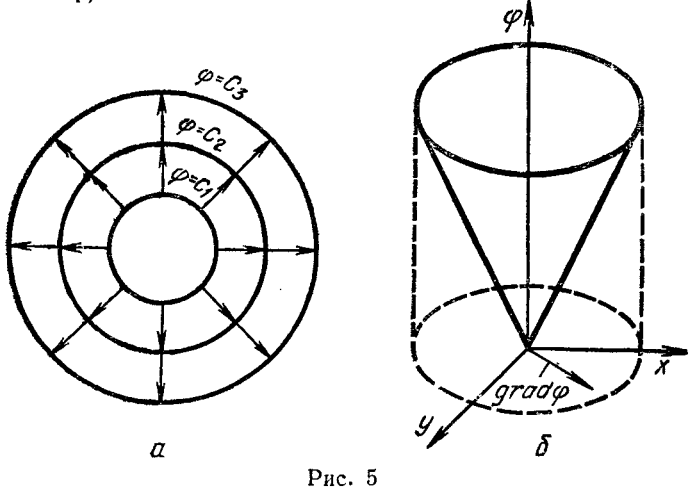

Рис. 5

Ответ: а) $\operatorname{grad}\varphi = 2\vec{r}$, б) $\operatorname{grad}\varphi = \vec{c}$.

3. Определить вид скалярного поля $\varphi(x, y)$ и геометрически изобразить его, если поле его градиента определяется формулой $\nabla\varphi = a\frac{\vec{r}}{r}$ (рис. 5, *а*).

Ответ: $\varphi = a\sqrt{x^2+y^2} = ar$; поверхность $\varphi(x, y)$ представляет собой конус с вершиной в начале координат (рис. 5, *б*).

§ 2. Аналитическое определение понятия вектора

Перейдем к более глубокому знакомству с векторными величинами и векторными полями. Как уже отмечалось, исторически векторное исчисление возникло в связи с потребностью физики количественно описывать быстроту движения, изменения быстроты движения, взаимодействия тел. Соответствующие величины имеют не только модуль, но и направление.

Если бы даже все физические величины обладали скалярным характером, то и в этом случае математическая физика не могла бы обойтись без векторов. Ведь быстрота изменения скалярной функции двух переменных $\varphi(x, y)$ не может быть охарактеризована скалярной функцией; для этого нужна переменная векторная величина $\nabla\varphi(x, y)$, играющая роль производной скалярного поля.

Правда, на первый взгляд представляется, что для указанной цели можно воспользоваться скалярными величинами $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, которые, как может показаться, лишь для удобства объединены в вектор $\nabla\varphi$.

Однако более внимательное рассмотрение показывает, что это не так. Дело в том, что частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, строго говоря, не являются скалярными (иногда их называют *псевдоскалярами*). Ведь значения этих частных производных зависят не только от вида функции $\varphi(x, y)$, но и от выбора осей координат. Выбрав по-иному направления этих осей, мы получим для указанных производных другие значения.

Нетрудно убедиться, что причиной таких свойств скалярных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ является то, что они являются проекциями вектора $\nabla\varphi$ на оси координат.

Непосредственный аналитический смысл, зависящий только от вида скалярного поля $\varphi(x, y)$, имеет в любой точке поля вектор $\nabla\varphi$, в то время как его проекции $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ зависят еще от выбора осей X и Y.