Последняя задача частично решается путем установления так называемых инвариантных соотношений между скалярными проекциями, определяющими вектор, или скалярными компонентами более сложной математической величины — *тензора*.

Ясно, что хотя значения a_x и a_y и зависят от выбора осей координат, тем не менее они определяют геометрический объект — вектор. Следовательно, между ними должны существовать одна или несколько зависимостей, которые характеризуют внутренние геометрические свойства этого объекта, не зависящие от выбора координатной системы и называемые *инвариантами*:

$$\Phi(a_x, a_y) = \Phi(a'_x, a'_y) = \text{inv}.$$

Каждый инвариант имеет непосредственный геометрический (или физический) смысл. Легко видеть, что в случае плоского вектора $\vec{a}$, определяемого двумя скалярными компонентами (проекциями) a_x и a_y, инвариантным соотношением является функция $a_x^2 + a_y^2$, равная квадрату длины вектора, это соотношение инвариантно к повороту прямоугольных осей координат, ибо, возведя в квадрат равенства (8) и сложив их, получим:

$$a_x'^2 + a_y'^2 = a_x^2 + a_y^2.$$

§ 3. Векторные поля и их дифференциальная характеристика

Пусть каждой точке $\vec{r}(x, y)$ плоскости (или части ее) соответствует некоторый вектор $\vec{a}(\vec{r})$, т. е. имеется векторная функция координат или векторное поле. Как определить быстроту изменения векторной переменной $\vec{a}$ в окрестности произвольной точки M? Ясно, что это задача дифференциального исчисления и она сводится к определению производной векторной функции $\vec{a}$ по векторному аргументу $\vec{r}$.

Как и в случае скалярного поля, начнем с определения производной по данному направлению l:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\vec{a}_l - \vec{a}_0}{\Delta l}, \tag{9}$$

где $\vec{a}_0$ и $\vec{a}_l$ — значения векторной функции $\vec{a}$ в точке M и близкой к ней на прямой l точке M_l.

Из (9) следует, что производная $\frac{\partial \vec{a}}{\partial l}$ есть величина векторная. Для другого направления l', проведенного через точку M, получим другой вектор $\frac{\partial \vec{a}}{\partial l'}$. Но это не значит, что для полной дифференциальной характеристики векторного поля в данной точке необходимо знать бесконечное количество производных от $\vec{a}$ по всем всевозможным направлениям.

Оказывается, что, как и в случае скалярного поля, достаточно знать всего две векторные производные по двум взаимно перпендикулярным направлениям, скажем $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \vec{a}}{\partial y}$. Дело в том, что производная по любому другому направлению весьма просто выражается через $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \vec{a}}{\partial y}$. Действительно, всякий вектор $\vec{a}$ полностью определяется в системе координат XOY двумя скалярными компонентами a_x и a_y. Поэтому любому векторному полю $\vec{a}(x, y)$ всегда в этой системе координат можно сопоставить эквивалентную совокупность двух скалярных полей $a_x(x, y)$ и $a_y(x, y)$. А так как производной скалярного поля является градиент, мы получаем, что пара векторов ∇a_x и ∇a_y, построенных в интересующей нас точке векторного поля, полностью характеризует в ее окрестности поведение функции $\vec{a}(\vec{r})$.

Но можно ли отсюда заключить, что производной векторной функции $\vec{a}(x, y)$ является пара векторов ∇a_x и ∇a_y? Внимательное рассмотрение существа дела показывает, что на этот вопрос следует ответить отрицательно. Подобно тому как в случае скалярного поля $\varphi(x, y)$ частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ представляли собой псевдоскалярные величины (их значения зависели не только от вида функции $\varphi(x, y)$, но и от выбора осей X и Y), в случае векторного поля $\vec{a}(x, y)$ градиенты ∇a_x и ∇a_y являются псевдовекторами, ибо они не имеют инвариантного смысла, а зависят от выбора осей координат. Ведь, выбрав новые оси X' и Y', мы тому же векторному полю $\vec{a}(x, y)$ сопоставим

два других скалярных поля $a'_x(\vec{r})$ и $a'_y(\vec{r})$ и поведение функции $\vec{a}$ в окрестности рассматриваемой точки будет определяться другой парой векторных величин $\nabla a'_x$ и $\nabla a'_y$.

Все это наводит нас на мысль, что в случае векторного поля имеет место такое же положение, что и в случае скалярного поля. Мы уже знаем, что поведение скалярной функции $\vec{\varphi}(r)$ характеризуется в каждой системе координат своей парой скалярных величин $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, которые являются компонентами вектора $\nabla\varphi$, имеющего непосредственный, инвариантный, не зависящий от выбора системы координат смысл. Точно так же поведение векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$ в любой системе координат характеризуется парой векторных величин ∇a_x и ∇a_y. Поскольку, однако, характеризующая поведение функции $\vec{a}(\vec{r})$ производная должна иметь объективный, инвариантный смысл и не должна зависеть от выбора осей, то следует рассматривать ∇a_x и ∇a_y как векторные составляющие в данной системе координат некоей более сложной величины, называемой *тензором* и обозначаемой в виде $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$. Тензор $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ и является производной векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$.

Из всего этого, в частности, следует, что тензор представляет собой инвариантную математическую величину, которая в каждой системе координат определяется парой векторных составляющих, подобно тому как вектор есть инвариантная величина, определяемая в каждой системе своей парой скалярных компонентов.

Перейдем теперь к подробному изучению тензорных величин.

§ 4. Тензоры и их свойства

Тензором называется величина $\hat{\Pi}$, характеризуемая в системе координат XOY двумя векторами $\vec{p}_x$ и $\vec{p}_y$, преобразующимися при переходе к другой системе координат $X'OY'$ в векторы p'_x и p'_y по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\vec{p}'_x &= \vec{p}_x\cos(\widehat{x', x}) + \vec{p}_y\cos(\widehat{x', y}),\\ \vec{p}'_y &= \vec{p}_x\cos(\widehat{y', x}) + \vec{p}_y\cos(\widehat{y', y}).\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$