два других скалярных поля $a'_x(\vec{r})$ и $a'_y(\vec{r})$ и поведение функции $\vec{a}$ в окрестности рассматриваемой точки будет определяться другой парой векторных величин $\nabla a'_x$ и $\nabla a'_y$.

Все это наводит нас на мысль, что в случае векторного поля имеет место такое же положение, что и в случае скалярного поля. Мы уже знаем, что поведение скалярной функции $\vec{\varphi}(r)$ характеризуется в каждой системе координат своей парой скалярных величин $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, которые являются компонентами вектора $\nabla\varphi$, имеющего непосредственный, инвариантный, не зависящий от выбора системы координат смысл. Точно так же поведение векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$ в любой системе координат характеризуется парой векторных величин ∇a_x и ∇a_y. Поскольку, однако, характеризующая поведение функции $\vec{a}(\vec{r})$ производная должна иметь объективный, инвариантный смысл и не должна зависеть от выбора осей, то следует рассматривать ∇a_x и ∇a_y как векторные составляющие в данной системе координат некоей более сложной величины, называемой *тензором* и обозначаемой в виде $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$. Тензор $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ и является производной векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$.

Из всего этого, в частности, следует, что тензор представляет собой инвариантную математическую величину, которая в каждой системе координат определяется парой векторных составляющих, подобно тому как вектор есть инвариантная величина, определяемая в каждой системе своей парой скалярных компонентов.

Перейдем теперь к подробному изучению тензорных величин.

§ 4. Тензоры и их свойства

Тензором называется величина $\hat{\Pi}$, характеризуемая в системе координат XOY двумя векторами $\vec{p}_x$ и $\vec{p}_y$, преобразующимися при переходе к другой системе координат $X'OY'$ в векторы p'_x и p'_y по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\vec{p}'_x &= \vec{p}_x\cos(\widehat{x', x}) + \vec{p}_y\cos(\widehat{x', y}),\\ \vec{p}'_y &= \vec{p}_x\cos(\widehat{y', x}) + \vec{p}_y\cos(\widehat{y', y}).\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Векторы $\vec{p}_x$ и $\vec{p}_y$ называются составляющими тензора $\hat{\Pi}$ по осям X и Y. Подчеркнем, что $\vec{p}_x$ и $\vec{p}_y$ не являются какими-то частями тензора (тензор есть единая величина), а лишь характеризуют эту величину в данной системе координат. В другой системе координат мы получим другие составляющие, причем каждая «новая» составляющая зависит от всех «старых» составляющих.

Подобно выражению вектора через компоненты $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, принято записывать тензор через составляющие $\hat{\Pi} = \vec{p}_x\vec{i} + \vec{p}_y\vec{j}$. (Следует иметь в виду, что эта запись символическая: $\vec{p}_x \cdot \vec{i}$ — не скалярное произведение двух векторов.)

Так как $\vec{p}_x$ и $\vec{p}_y$ — векторы, то их можно разложить на компоненты:

$$\vec{p}_x = p_{xx}\vec{i} + p_{xy}\vec{j},$$
$$\vec{p}_y = p_{yx}\vec{i} + p_{yy}\vec{j}.$$

Отсюда ясно, что тензор $\hat{\Pi}$ можно также определить четырьмя скалярными величинами, называемыми **компонентами тензора**, которые записываются в виде таблицы (матрицы):

$$\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{Vmatrix}.$$

В тензорном исчислении стремятся к максимальному сокращению математической записи, для чего переименовывают координаты x, y в x_1, x_2, а орты $\vec{i}$, $\vec{j}$ в $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, тогда для каждого вектора можно написать:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{2} \vec{i}_k a_k.$$

Аналогично для тензора получим:

$$\hat{\Pi} = \sum_{k}^{2} \vec{i}_k \cdot \vec{p}_k.$$

Соответственно в матричной форме:

$$\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}.$$

Если обозначить $\cos(\widehat{x_j, x_k}) = \alpha_{jk}$, то формулы преобразования компонентов вектора запишутся так:

$$a'_k = \sum_l \alpha_{kl} a_l.$$

Аналогично запишется формула для преобразования составляющих тензора $\vec{p}'_k = \sum_l \alpha_{kl} \vec{p}_l$. Легко показать, что для компонентов тензора формула, связывающая «старые» компоненты с «новыми», будет выглядеть так:

$$p'_{kl} = \sum_r \sum_s \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs}. \qquad (11)$$

Отсюда видно, что «новые» компоненты тензора являются линейными комбинациями «старых».

Таким образом, можно дать другое определение понятия «тензор».

Тензором называется величина, характеризуемая в системе координат XOY совокупностью четырех чисел p_{kl}, записываемых в виде матрицы:

$$\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}.$$

и преобразующихся при переходе к другой системе координат $X'OY'$ по формулам (11).

Так как мы рассматриваем только прямоугольные декартовы системы координат, то тензоры, о которых мы говорим, называются *ортогональными аффинными тензорами* второго ранга. Обычные векторы представляют собой тензоры первого ранга. А скалярные величины могут быть названы тензорами нулевого ранга.

Еще раз подчеркнем, что каждый тензор $\hat{\Pi}$ имеет непосредственный, инвариантный смысл, хотя в различных системах координат его составляющие $\vec{p}_k$ и компоненты p_{kl} выглядят по-разному.

(Можно сказать, что составляющие тензора $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ являются «векторными проекциями» тензора $\hat{\Pi}$ на оси координат x_1 и x_2, а компоненты p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} — соответствующими «скалярными проекциями векторных проекций» тензора.) Поэтому для тензорного исчисления значение имеют только те свойства компонентов тензора, которые справедливы в любой системе координат, т. е. являются инвариантными.

Исходя из этого рассмотрим некоторые простейшие типы тензоров.

1. Нулевым тензором $\hat{0}$ называется тензор, все компоненты которого равны нулю:

$$\hat{0} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2. Единичным тензором $\hat{I}$ называется тензор, составляющими которого являются орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$, а матрица компонентов имеет вид:

$$\hat{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить с помощью формулы (11), что у тензоров $\hat{O}$ и $\hat{I}$ их компоненты сохраняют свои значения в любой системе координат.

3. Тензор $\hat{S}$ называется симметричным, если его компоненты удовлетворяют условию $s_{jk} = s_{kj}$, т. е. его матрица имеет вид:

$$\hat{S} = \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix}.$$

4. Тензор $\hat{A}$ называется антисимметричным, если $a_{jk} = -a_{kj}$, т. е. его компоненты образуют следующую матрицу:

$$\hat{A} = \begin{Vmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ясно, что свойства симметричности и антисимметричности — инвариантны.

5. Частным видом тензоров являются *диады* $\hat{D}$, составляющие которых (в любой системе координат!) суть коллинеарные векторы. Очевидно, что у диады строки и столбцы матрицы компонентов пропорциональны друг другу, а ее определитель равен нулю.

В произвольной системе координат матрица диады имеет вид:

$$\hat{D} = \begin{Vmatrix} a & b \\ ca & cb \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно умножать не только скалярно $(\vec{a}, \vec{b})$ и векторно $[\vec{a}, \vec{b}]$, но и тензорно $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Тензорным произведением векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ называется тензор, компоненты которого образуют следующую матрицу:

$$\hat{D} \equiv \{\vec{a}, \vec{b}\} = \begin{Vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{Vmatrix}.$$

Рекомендуем читателю убедиться, что компоненты a_jb_k действительно преобразуются по тензорному закону (11). Поскольку строки и столбцы матрицы отличаются постоянным множителем, то полученный тензор $\hat{D}$ является диадой, составляющие которой равны $\vec{D}_1 = a_1\vec{b}$ и $\vec{D}_2 = a_2\vec{b}$, т. е. коллинеарны второму сомножителю $\vec{b}$. Отсюда вытекает, что при повороте осей координат направление в пространстве составляющих диады не меняется, а их длины меняются совместно с проекциями первого сомножителя $\vec{a}$. Кроме того, ясно, что тензорное произведение векторов некоммутативно, т. е.

$$\{\vec{a}, \vec{b}\} \neq \{\vec{b}, \vec{a}\}.$$

Только в том частном случае, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными векторами, их тензорное произведение образует симметричную диаду и не зависит от порядка сомножителей.

Упражнение

1. В некоторой системе координат тензор имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 2\sqrt{3} \end{Vmatrix}.$$

Вычислить его компоненты и графически изобразить его составляющие в новой системе координат, повернутой относительно старой на угол 60°.

Ответ: $\begin{Vmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 5/2 & \sqrt{3} \end{Vmatrix}.$

2. В системе координат XOY математическая величина характеризуется матрицей:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В другой системе $X'OY'$, повернутой на 45° относительно нештрихованной, эта же величина определяется матрицей:

$$\begin{Vmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 3/2 & -7/2 \end{Vmatrix}.$$

Выяснить, является ли данная величина тензором.

3. В каком случае матрица тензорного произведения двух векторов содержит только один ненулевой элемент?

4. В какой системе координат одна из составляющих диады $\hat{D}=\{\vec{a}, \vec{b}\}$ обращается в нуль? Чему в этом случае равна длина второй составляющей? Является ли инвариантом суммарная длина составляющих диады $|\vec{D}_1+\vec{D}_2|$?

§ 5. Тензорная алгебра

Над тензорами как своеобразными математическими величинами, характеризующими определенные физические свойства реальных тел, можно производить ряд алгебраических операций: складывать, умножать на числа, умножать тензор на тензор и др. Поэтому множество тензоров образует алгебру, являющуюся обобщением векторной алгебры.

Поскольку тензор в любой системе координат характеризуется скалярными компонентами p_{jk}, то естественно любое действие над тензорами определять как операцию над компонентами; при этом результат операции должен быть инвариантен относительно преобразования координат.

Перейдем к ознакомлению с простейшими алгебраическими операциями над тензорами.

1. Суммой двух тензоров $\hat{\Pi}'$ и $\hat{\Pi}''$ называется тензор

$$\hat{\Pi}=\hat{\Pi}'+\hat{\Pi}'',$$

компоненты которого равны суммам компонентов слагаемых:

$$p_{jk}=p'_{jk}+p''_{jk}.$$

2. Произведением тензора $\hat{\Pi}$ на число λ называется тензор $\hat{\mathfrak{m}}=\lambda\hat{\Pi}$, компоненты которого t_{jk} равны произведению соответствующих компонентов p_{jk} на λ:

$$t_{jk}=\lambda p_{jk}.$$

Обобщением операций 1 и 2 являются линейные комбинации нескольких тензоров. Пусть даны n тензоров